فصل ۴ مشتق

مشتق تابع در یک نقطه: فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، یعنی عدد حد شود اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم‌ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر این حد عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق ناپزیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود.

$$۱)f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad ۲)f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(x)-f(a)$ ۳. تشکیل و ساده کردن $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و روش‌های رفع ابهام آن را در حد دیدیم.

➢ در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(a+h)$ ۳. محاسبه $f(a+h)-f(a)$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

۸۶) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-۲|$ را در نقطه $x=۲$ مورد بررسی قرار دهید. (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x|x-۲|-۰}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=۲=f'(۲^+)\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{x-۲}=-۲=f'(۲^-)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

۸۷) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۲+۱$ را در نقطه‌ی $x=a$ محاسبه کنید. (خرداد ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(a+h)^۲+۱-a^۲-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{a^۲+۲ah+h^۲+۱-a^۲-۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲ah+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}۲a+h=۲a$$

۸۸) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱-x}{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{x}=-۱$$

۸۹) مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ را در نقاط $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^2-1\right|-0}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f'_+(1)\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2=f'_-(1)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپزیر است.

۹۰) مشتق تابع $f(x)=x^3+3x$ را در نقطه‌ی $x=1$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

☑پاسخ:

راه اول)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x^2+x+4=6$$

راه دوم)

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h^3+3h^2+3h\right)+(3+3h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(h^2+3h+6\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h^2+3h+6\right)=6$$

۹۱)با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ را به دست آورید. (هماهنگ کشوری ۸۸)

☑پاسخ:

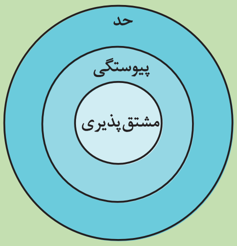
گویا کردن

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-(x+h)-4+x}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

مشتق راست: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق چپ: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.



هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.
عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.
یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.

نکته

اگر تابعی در $x=a$ فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و هم‌چنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.

روش حل مسئله

برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:

۱) پیوستگی تابع در $x=a$ را بررسی کنید. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=f(a)$ اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به‌خصوص در توابع قدرمطلقی، چند ضابطه‌ای و براکتی)

۲) مشتق چپ و راست را ازراه تعریف بررسی می‌کنیم. اگرداشته باشیم: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عدد شود می‌گوییم تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

۹۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-۲|$ را در $x=۲$ در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

☑پاسخ: تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x\to ۲}|x-۲|=۰=f(۲) \Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|-۰}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱=f'_+(۲)\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱=f'_-(۲)\end{cases}$$

۹۳) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با ....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۱$ برابر است با ....

☑پاسخ:

الف) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$　　$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$ جواب نهایی

ب) $g'(x)=\frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow m=g'(۱)=-۱$ جواب نهایی

۹۴) پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y=[۲x]$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟
۳) در تابع $y=\|۲-x\|$ حاصل $f'_+(۲)+f'_-(۲)$ کدام است؟

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$	هـ) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$

☑پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.

$$۱-۲x\ge ۰ \Rightarrow D_f=\left(-\infty,\frac{۱}{۲}\right] \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{۱-۲x}} \Rightarrow D_{f'}=(-\infty,\frac{۱}{۲})$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد.

$$\lim_{x\to ۱^-}[۲x]=[۲^-]=۱\ne f(۱)=۲$$

۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{|۲-x|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=-۱\end{cases} \Rightarrow f'_+(۲)+f'_-(۲)=۰$$

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع:

$f(x)=c$	$\Rightarrow$	$f'(x)=۰$
		مشتق تابع ثابت صفره
$f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ x$	$\Rightarrow$	$f'(x)=(۱)'=۰$
$f(x)=ax^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=nax^{n-۱}$
$f(x)=au^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=anu^{n-۱}u'$
$f(x)=۲x^۷$	$\Rightarrow$	$f'(x)=۱۴x^۶$
$h(x)=f(x)\pm g(x)$	$\Rightarrow$	$h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$
$h(x)=f(x)\times g(x)$	$\Rightarrow$	$h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ مهمه
$f(x)=\left(۲x^۲+۳x-۱\right)\left(۴x^۳+۲x^۲+۳\right)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=(۴x+۳)\left(۴x^۳+۲x^۲+۳\right)+\left(۱۲x^۲+۴x\right)\left(۲x^۲+۳x-۱\right)$
$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\Rightarrow$	$h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$ مهم
$h(x)=\dfrac{x^۲+۱}{x-۱}$	$\Rightarrow$	$h'(x)=\dfrac{۲x(x-۱)-(۱)\left(x^۲+۱\right)}{(x-۱)^۲}$
$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$
$f(x)=\dfrac{au+b}{cu+d}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^۲}u'$
$f(x)=\sqrt[n]{u^m}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

نکته

$$y=\left(\text{عبارت های جبری}\right)^n \rightarrow y'=n\times\left(\text{مشتق عبارت جبری}\right)\times\left(\text{عبارت های جبری}\right)^{n-1}$$

۹۵) مشتق بگیرید .

۱) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{۱}{۲}(۱)x^{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

توان — مشتق عبارت کسری — عبارت کسری با یک توان کمتر

۲) $f(x)=\left(\frac{۲x+۱}{x-۲}\right)^۴ \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(۴)\left(\frac{۲(x-۲)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۲)^۲}\right)\left(\frac{۲x+۱}{x-۲}\right)^۳$

۳) $f(x)=\frac{\left(۳x^۲-۱\right)^۳}{x+۱} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{۳(۶x)\left(۳x^۲-۱\right)^۲(x+۱)-\left(۳x^۲-۱\right)^۳(۱)}{(x+۱)^۲}$

۴) $y=\sqrt{x}(۲x-۱)^۵ \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲x-۱)^۵+۵(۲)(۲x-۱)^۴\sqrt{x}$

۵) $y=\frac{x^۲-۱}{(۳x+۵)^۲} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۲x(۳x+۵)^۲+۲(۳)(۳x+۵)\left(x^۲-۱\right)}{(۳x+۵)^۴}$

۹۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$۱)\ f(x)=\left(\frac{۲x+۱}{x}\right)^{۵} \qquad ۲)\ g(x)=(\sqrt{۵-۷x})(۴-\frac{x}{۳})$$

☑پاسخ:

$$۱)\ y'=۵\left(\frac{۲(x)-(۱)(۲x+۱)}{x^{۲}}\right)\left(\frac{۲x+۱}{x}\right)^{۴}$$

$$۲)\ y'=\frac{-۷}{۲\sqrt{۵-۷x}}(۴-\frac{x}{۳})-\frac{۱}{۳}(\sqrt{۵-۷x})$$

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \qquad \Rightarrow \qquad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))'=u'f'(u) \qquad , \qquad ((u)^{m})'=m(u')(u)^{m-۱}$$

۹۷) اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=\frac{-۲}{۳}$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{x-۱})$ در $x=۵$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{-h}=-f'(۲)=\frac{-۲}{۳} \quad\Rightarrow\quad f'(۲)=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \quad \left(f(\sqrt{x-۱})\right)'=\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}f'(\sqrt{x-۱})\right)_{x=۵}=\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۱}{۶}$$

۹۸) اگر $f'(x)=\frac{۱}{۲x^{۲}+۳}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ را در $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{۱}{x}\right)\right)'=\frac{-۱}{x^{۲}}f'\left(\frac{۱}{x}\right)_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)\times\left(\frac{۱}{۲\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۳}\right)_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-۲\times\frac{۱}{۲\times(۲)+۳}=\frac{-۲}{۷}$$

۹۹) اگر $f'(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ باشد، مشتق تابع $y=f(۵x^{۲}-x)$ را نسبت به x تعیین کنید. (هماهنگ کشوری ۸۵)

☑پاسخ:

$$y=f(۵x^{۲}-x) \quad\Rightarrow\quad y'=(۵x^{۲}-x)'f'(۵x^{۲}-x) \;\Rightarrow\; y'=(۱۰x-۱)f'(۵x^{۲}-x)=(۱۰x-۱)\sqrt{(۵x^{۲}-x)^{۲}+۱}$$

۱۰۰) مشتق $f(\sqrt[۳]{۶x+۲})$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر -۲ است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

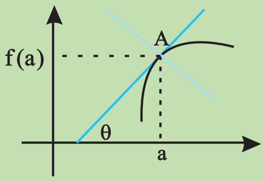
☑پاسخ: $\sqrt[۳]{۶x+۲}=۲ \quad\Rightarrow\quad x=۱$

$$\sqrt[۳]{۶x+۲}=۲ \;\Rightarrow\; x=۱ \;\Rightarrow\; \left(f(\sqrt[۳]{۶x+۲})\right)_{x=۱}=\left(\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{(۶x+۲)^{۲}}}f'(\sqrt[۳]{۶x+۲})\right)_{x=۱}=\frac{۶}{۱۲}f'(۲)=-۲ \;\Rightarrow\; f'(۲)=-۴$$

شیب خط مماس بر منحنی و معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:

اگر خط L در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد،
شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

شیب خط مماس در نقطه‌ی A $\quad m=\tan\theta=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$



۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\begin{vmatrix} a \\ f(a)\end{vmatrix}$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m=f'(a)$ و

$m'=\dfrac{-1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

خط مماس $\quad L: \quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$

خط قائم $\quad L': \quad y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

۱۰۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y=x^2-1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی تابع بنویسید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-(1-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$A\begin{vmatrix} 2 \\ (2)^2-1=3\end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad L: \quad y-3=2(x-2)$$

۱۰۲) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y=\dfrac{x}{x-2}$ را در نقطه‌ی $A(3,3)$ به دست آورید. (خرداد ۹۲)

☑پاسخ:

$$y'=\frac{-2}{(x-2)^2} \quad\Rightarrow\quad m=y'_{(3)}=-2 \quad\Rightarrow\quad y-3=-2(x-3)$$

۱۰۳) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(1)=3(1)^2=3=m \Rightarrow m'=\frac{-1}{3} \Rightarrow L: y-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$ خط قائم

۱۰۴) معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بنویسید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1} \quad\Rightarrow\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در $x=1$ خطی موازی محور y هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است. $\quad L: \quad x=1$

آهنگ تغییر و آهنگ متوسط

نکته

شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده

تغییر آهنگ = شیب خط مماس در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ $= m = f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۱۰۵) تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+۵x+۴$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=۳$, $\Delta x=۰/۴$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=۳$ به دست آورید.

☑پاسخ:

الف) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^۲+۵(x+\Delta x)+۴-(x^۲+۵x+۴)}{\Delta x}$$

ب) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(۳+۰/۴)^۲+۵(۳+۰/۴)+۴-((۳)^۲+۵(۳)+۴)}{۰/۴}=\frac{۱/۲+۰/۱۶+۲}{۰/۴}=\frac{۳/۳۶}{۰/۴}$$

ج) $$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\quad\Rightarrow\quad f'(۳)=(x^۲+۵x+۴)'_۳=(۲x+۵)_۳=۱۱$$

۱۰۶) اگر $f(t)=t^۲+۳t$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد ، نسبت آهنگ متوسط تغییر f در بازه ی زمانی $۱\le t\le ۱/۲$ به آهنگ لحظه ای تغییر f در $t=۱$ کدام است ؟

$$\frac{f(۱/۲)-f(۱)}{۱/۲-۱}=\frac{((۱/۲)^۲+۳(۱/۲))-(۱+۳)}{۰/۲}=\frac{۱۰/۴}{۲}=۵/۲$$

$$f'(۱)=(۲t+۳)_{x=۱}=۵\quad\Rightarrow\quad\frac{۵/۲}{۵}=۱/۰۴$$

۱۰۷) در چه نقطه ای از بازه $[۹,۲۵]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

$$\frac{f(۲۵)-f(۹)}{۲۵-۹}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۹}}{۱۶}=\frac{۲}{۱۶}\quad,\quad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt{x}=۴\Rightarrow x=۱۶$$

۱۰۸) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)}=۴۰\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)^۲$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می شود ؟

$$\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=\frac{-۴}{۱۰}\quad,\quad V'(t)=۸۰\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)=\frac{-۸۰}{۱۰۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)=\frac{-۴}{۱۰۰}$$

$$۲-\frac{t}{۵۰}=۱\quad\Rightarrow\quad t=۵۰$$

حالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می دیم