
بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر
www.tafrihicenter.ir/edu
کلیک کنید
نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم
www.tafrihicenter.ir

فصل ۳ حد

بخش پذیری

فرض کنید $p(x)$, $g(x)$ دو چند جمله ای با شند در این صورت چند جمله ای های منحصر به فرد $r(x), q(x)$ وجود دارند به طوری که $p(x)=g(x)q(x)+r(x)$
$p(x)$ را مقسوم و $g(x)$ را مقسوم علیه و $q(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی مانده می نامند .

اگر $p(x)$ از درجه n و مقسوم علیه $g(x)$ از مرتبه m باشد آنگاه خارج قسمت $q(x)$ از درجه $(n-m)$ و باقی مانده $r(x)$ حداکثر از درجه ی $(m-1)$ ا ست .

مثال

$p(x)$ مقسوم : درجه ۴

$g(x)$ مقسوم علیه : مرتبه ۱

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
x^3-2x+1 & \\
-(x^3-x^2) & \\ \cline{1-1}
x^2-2x+1 & \\
-(x^2-x) & \\ \cline{1-1}
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$q(x)$ خارج قسمت : مرتبه ۳

$r(x)$ باقیمانده صفر شده یعنی بخش پذیراست

نکته

۱) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای آنگاه باقی مانده تقسیم ، $p(x)$ بر $g(x)=x-a$ برابر ا ست با : $p(a)$

۲) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $(ax+b)$ ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه آن را بدست آورده و در مقسوم به جای x قرار می دهیم آنگاه داریم : $r=p\left(\frac{-b}{a}\right)$ بدیهی ا ست که اگر $r=0$ باشد ، $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر ا ست

۵۹) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد .

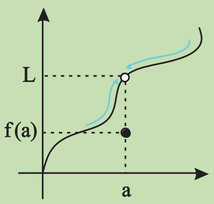
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2-(-1)+3=0 \Rightarrow k=2$$

۶۰) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش پذیر با شد ؟

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2-k\left(\frac{1}{2}\right)-8=0 \Rightarrow k=-12$$

مفهوم حد

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد دارد و مقدار آن L است هر وقت با میل کردن x به سمت a مقادیر $f(x)$ هم به سمت عدد معین L میل کند. در واقع حد یعنی رفتار تابع در مجاورت نقطه a و اصلاً ربطی به مقدار تابع در نقطه a ندارد.



– **حد راست:** اگر x از طرف راست به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_1 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

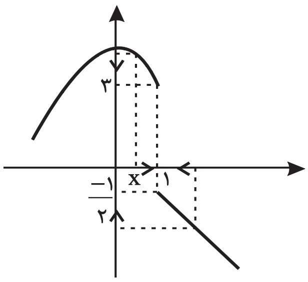
– **حد چپ:** اگر x از طرف چپ به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتقاب می‌کنیم از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور xها فارج می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که xها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم اگر شاخه‌هایی سمت چپ و راست نمودار f در x=a به عرض L روی محور y ها برسند آن‌گاه تابع در نقطه a حد دارد.



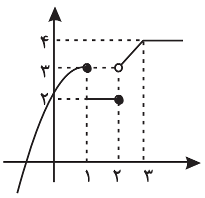
۶۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2}x & x\geq 1 \\ 4-x^2 & x<1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{2}x=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 4-x^2=4-1=3$$

تابع در این نقطه حد ندارد زیرا:

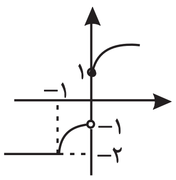


۶۲) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. حاصل عبارت $3\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$ $\quad\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ $\quad f(3)=4$

$$3\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)=3(3)-(3)+2(4)=14$$



۶۳) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

☑پاسخ:

$\lim_{x\to -1} f(x)=-2$ $\quad\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

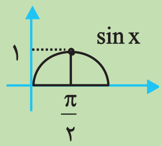
$\lim_{x\to 0^-} [f(x)]=[-1^-]=-2$ $\quad\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

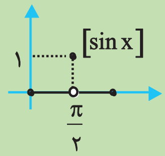
صفر مطلق

اساساً صفرمطلق یعنی تابع ای در تمامی یک بازه یعنی به ازای x های یک بازه $f(x)=۰$ می‌شود. مثلاً صفری که به وسیله براکت ساخته شود صفر مطلق است.

$$\begin{cases} ۱^- \cong \ ۰\le x<۱ \Rightarrow \left[۱^-\right]=۰ & \text{صفر مطلق} \\ ۰^+ \cong \ ۰\le x<۱ \Rightarrow \left[۰^+\right]=۰ & \text{صفر مطلق} \end{cases}$$

$$\forall x\in[۰,\frac{\pi}{۲}) \to [\sin x]=۰$$





$$\lim_{x\to ۰^+}[\sin x]=[\sin ۰^+]=[۰^+]=۰$$

تو یه بازه این تابع صفره. بنابراین صفرش مطلقه .

حدود توابع کسری

برای محاسبه حد توابع کسری به نکات زیر توجه داریم:

اگر صورت و مخرج کسر صفر نشه که خیلی راحته. مقدار گذاری می‌کنیم. خلاص

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}$$

اما اگه فقط مخرج صفر حدی بشه و صورت عدد ناصفر، جواب حد بی نهایت میشه.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L\ne ۰}{\underset{\text{صفر حدی}}{۰}}=\infty$$

اگه صورت و مخرج هر دو صفر بشن حالت‌های زیر رخ میده:

$$\lim_{x\to a}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

$$\lim_{x\to a}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰ \ \text{صفر مطلق}}{۰ \ \text{صفر مطلق}}=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰ \ \text{صفر حدی}}{۰ \ \text{صفر حدی}}=\text{ابهام}$$

اگر حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ داشت، باید آن را رفع ابهام کنیم که روش‌های رفع ابهام را خواهیم گفت .

۶۴) حاصل حدود $۱)\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}}{۲-\sqrt{x}}$ و $۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}}{۲-\sqrt{x}}=\frac{۴}{۲-\sqrt{۱}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{(x-۲)^۲}=\frac{۵}{(۰^\pm)^۲}=\frac{۵}{۰^+}=+\infty$$

هر چند حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده‌اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند، تابع در این نقطه حد ندارد.

۶۵) حاصل حدود روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$۱)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x} \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{[x]-۱}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=\frac{۰ \ \text{مطلق}}{۰ \ \text{حدی}}=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{[x]-۱}=\frac{x-۱}{\left[۱^+\right]-۱}=\frac{۰ \ \text{حدی}}{۰ \ \text{مطلق}}$$

وجود ندارد

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$

روش حل مسئله

سوالات ابهام‌دار

۱) در ابتدای کار ابهام $\frac{۰}{۰}$ را بیان کنید و بنویسید.

۲) عامل ابهام در $x=a$ ، $(x-a)$ می‌باشد. که باید آن را از صورت و مخرج فاکتور بگیریم و ساده کنیم. (به این کار می گن رفع ابهام)

۳) پس از ساده کردن ، مقدار $x=a$ را جایگذاری کنید و حد را به دست آورید.

۴) در هر مرحله lim یادت نره.

هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$ بشه اصطلاحاً می‌گویند حد ابهام صفر صفرم داره، معنیش این که عامل $(x-a)$ یعنی عامل صفر کننده هم در صورت و هم در مخرج وجود داره و باعث ابهام $\frac{۰}{۰}$ می شه. برای رفع ابهام یکی از روش‌های زیر را استفاده می‌کنیم.

از عامل $(x-a)$ هم در صورت و هم در مخرج فاکتور می‌گیریم و پس از ساده نمودن مقدارگذاری می‌کنیم. (در توابع چند جمله‌ای خطی بیشتر کاربرد داره)

۶۶) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+x-۶}{x-۲}$ ۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\frac{t+۱}{t^۳+۱}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}$

☑پاسخ:

وقتی $x\to ۲$ عامل صفر $(x-۲)$ میشه. در صورت و مخرج از اون فاکتور گرفتیم.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+x-۶}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۳)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}(x+۳)=۵$

اتحاد چاق و لاغر

۲) $\lim\limits_{t\to -۱}\frac{t+۱}{t^۳+۱}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{(t+۱)}{(t+۱)(t^۲-t+۱)}=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۱}{(t^۲-t+۱)}=\frac{۱}{۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x\cancel{(x-۱)}}{(x+۲)\cancel{(x-۱)}}=\frac{۱}{۳}$

۶۷) حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد و شهریور ۹۰)

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۳x^۲-۱۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{x^۲-۹}\right)$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۳x^۲-۱۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{۳(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۴}{۳(x+۲)}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{x^۲-۹}\right)=\lim\limits_{x\to ۳}\left(\frac{۲}{x-۳}-\frac{۱۲}{(x-۳)(x+۳)}\right)=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۶}{(x-۳)(x+۳)}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲}{(x+۳)}=\frac{۱}{۳}$

نکته : اگر تجزیه صورت و مخرج برای یافتن عامل ابهام مشکل باشد می توانیم با تقسیم هر کدام بر $(x-a)$ آن را تجزیه کنیم.

۶۸) حدود توابع زیر را تعیین کنید.

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1} \qquad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x} \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\left(x^2-x-1\right)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x-1}=\frac{1}{-2}$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-2)}\left(x^3-x\right)}=\frac{4+2+1}{8-2}=\frac{7}{6}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+x^2+x-1\right)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)}=\frac{2}{1}=2$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x+1 & x-1 \\ \hline
-(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\
x^3-2x+1 & \\
-(x^3-x^2) & \\
x^2-2x+1 & \\
-(x^2-x) & \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^2-3x+1 & x-1 \\ \hline
-(2x^2-2x) & 2x-1 \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}$$

روش حل مسئله

۲) هرگاه صورت یا مخرج عامل ابهام رادیکالی داشته باشد (مثلا: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)$) صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می کنیم پس از گویا و ساده کردن رفع ابهام نموده، حد را به دست می‌آوریم.

مزدوج‌های مهم:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=x-a \qquad (x-a)(x+a)=x^2-a^2$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=x\pm a \qquad (x\pm a)\left(x^2\mp ax+a^2\right)=x^3\pm a^3$$

۶۹) حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۱}{(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{۳۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲(x-۱)}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۴}$

۷۰) حدود روبه رو را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲x-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\cancel{(x-۲)}\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{۲}=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{(x-۸)(x+۸)}{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\times\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\cancel{(x-۸)}(x+۸)\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{(x-۸)}}=۱۹۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{(۳-x)(۳+x)}\times\dfrac{\sqrt{۳x+۷}+۴}{\sqrt{۳x+۷}+۴}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳x-۹}{(۳-x)(۳+x)(۸)}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳\cancel{(x-۳)}}{-\cancel{(x-۳)}(x+۳)(۸)}=\dfrac{-۱}{۱۶}$

۷۱) حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد وشهریور ۹۴- خارج کشور)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}}=\sqrt{۴}+۲=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x}+۱=۲$

۷۲)حد تابع زیر را تعیین کنید.

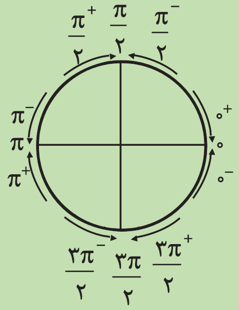
$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}$

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{۱-\sqrt{x}}\times\dfrac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)\left(۱+\sqrt{x}\right)}{۱-x=-\cancel{(x-۱)}}=-۴$

حدود توابع مثلثاتی در نقاط مرزی

در محاسبه حدهای یک طرفه در توابع مثلثاتی دونستن این که زاویه در کدوم ناحیه مثلثاتیه خیلی مهمه. مثلا وقتی $x \to ۰^-$ یعنی x در ربع چهارمه و به صفر نزدیک میشه، یا وقتی $x \to ۰^+$ یعنی x در ربع اوله و به صفر نزدیک میشه. این مطالب را در شکل زیر بررسی می‌کنیم.



تعریف نشده $\tan \frac{\pi}{۲}$ ناحیه دوم $\tan \frac{\pi^+}{۲} = -\infty$ ناحیه اول $\tan \frac{\pi^-}{۲} = +\infty$

تعریف نشده $\tan \frac{۳\pi}{۲}$ ناحیه چهارم $\tan \frac{۳\pi^+}{۲} = -\infty$ ناحیه سوم $\tan \frac{۳\pi^-}{۲} = +\infty$

۷۳) حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۲}^+} \tan x$ ۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{۳}^+} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})}$ ۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$ ۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{۱}{\sin x}$ ۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۲}^+} \tan x = \lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۲}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{۳}^+} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{۱}{\sin x} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{۱}{\sin \pi^+} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos x}{۱-\sin x} = \frac{۱+۰}{۱-۱^-} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

روش حل مسئله

در حالت ابهام $\frac{۰}{۰}$ اگر عامل ابهام در صورت یا مخرج داخل قدر مطلق باشد، باید تکلیف قدر مطلق را با تعیین علامت مشخص کنیم و حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

۷۴) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{|۹-x^۲|}{x-۳}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{|۳-x|}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{|۹-x^۲|}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-(۳-x)(۳+x)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳^+}(۳+x)=۶$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{|۳-x|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۷}{۳-x}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=-۲\end{cases}$$

۷۵) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|+|x-۳||x+۳|}{|x-۳|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{|x-۳|}(۱+|x+۳|)}{\cancel{|x-۳|}}=\lim_{x\to ۳^-}(۱+|x+۳|)=۱+|۳+۳|=۷$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{|(x-۲)(x-۳)|}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

برای محاسبه‌ی حدودی که شامل عبارت براکتی است، اول تکلیف قسمت براکتی را تعیین می‌کنیم و به جای آن عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم، سپس به ادامه حد می‌پردازیم.

۷۶) حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}$$

☑ پاسخ:

$$۱)\ x\to ۳^+\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow [۳^+]=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{[۳^+]-۳}{x-۳}=\frac{۰\ \text{مطلق}}{۰\ \text{حدی}}=۰$$

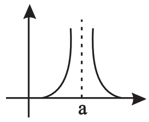
$$[(۱^+)^۳]=۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۳$$

$$[(۱^+)]=۱$$

حدود نامتناهی :

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد مثبت بسیار بزرگی ، بزرگتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود (در مجاورت $x=a$ عرض تابع بیکران یا همان بی نهایت می شود)



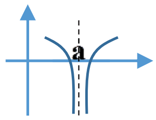
$\left| \begin{array}{l} x \to a \text{ عدد} \\ y \to +\infty \end{array} \right.$

۷۷) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}$ را به دست آورید .

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۱}{(x-۲)^۲} = \frac{۵}{(۰^{\pm})^۲} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty$$

هر چند ، حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند ، تابع در این نقطه حد ندارد .

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد منفی کوچکتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود .



$\left| \begin{array}{l} x \to a \text{ عدد} \\ y \to -\infty \end{array} \right.$

مثلاً

$$\lim_{x\to -۳} \frac{x-۴}{x^۲+۶x+۹} = \lim_{x\to -۳} \frac{x-۴}{(x+۳)} = \frac{-۷}{(۰^{\pm})^۲} = \frac{-۷}{۰^+} = -\infty$$

بعضی وقت ها حاصل حد در یک نقطه ۲ تا بی نهایت با علامت های متفاوت میشه

مثلاً)

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲x+۱}{x-۲} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲x+۱}{x-۲} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۲x+۱}{x-۲} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty \end{cases}$$

در توابع کسری ریشه هایی از مخرج کسر ، به شرط آن که در این نقاط بتوان حد گرفت و حد ∞ شود . (یعنی باید در همسایگی چپ یا راست ریشه مخرج تابع تعریف شده باشد) حدود بی نهایتی ایجاد می کنند .

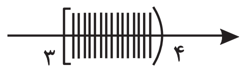
۷۸) حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۱}{[x]-۳}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۳}{x^۲} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$

می‌دانیم:



$$۲)\ D_f = R - \{x \mid [x] - ۳ = ۰\} = R - [۳,۴)$$

$\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$ این حد وجود ندارد، چون در همسایگی راست این نقطه تابع تعریف نشده

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۱}{[۳^-] - ۳} = \frac{۱}{۲-۳} = -۱$$

x		-۱		۱	
$\frac{۱-x}{۱+x}$	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$

$$۳)\ \lim_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -۱^+} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^+}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -۱^-} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^-}} = \end{cases}$$

با توجه به دامنه اساساً این حد وجود ندارد چون در سمت چپ نقطه $x = -۱$ تابع تعریف نشده .

۷۹) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{|x|} + \frac{x^۲ + ۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{|۰^\pm|} + \frac{(۰^\pm)^۲ + ۱}{(۰^\pm)^۲} = \frac{۱}{۰^+} + \frac{۱}{۰^+} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲ - ۳x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۳)} = \frac{۱}{۰^+(۰^+ - ۳)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۰ - ۳}{|۰^\pm|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

حد در بینهایت : اگه متغییر ما بره به سمت بینهایت یعنی $x \to \infty$ و عرض تابع یعنی y آن به یک عدد نزدیک شود می گوییم تابع ما در بینهایت حد دارد و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

به عبارت دیگر

$$\left| \begin{array}{l} x \to \infty \\ y \to \text{عدد بشه} \end{array} \right.$$

روش حل مسئله

در کتاب درسی تاکید به محاسبه حد در بینهایت توابع کسری که صورت و مخرج آنها چند جمله ای می باشند داره . برای محاسبه حد توابع کسری وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ میل می کند در صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور بگیر، ساده کن و حاصل حد رو پیدا کن .

یادت باشه : در توابع کسری وقتی $x \to \pm\infty$ میل می کند و صورت و مخرج کسر ∞ می شود و ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می دهد می توان از قاعده پرتوان استفاده کرد یعنی در صورت و مخرج جمله ای که بزرگترین توان از x را دارد در نظر می گیریم و حد عبارت حاصل را محاسبه می کنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-2}+.......}{a'x^m+b'x^{m-1}+.......}=\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

یعنی

۱) وقتی جواب حد عدد ناصفر بشه معنیش اینکه توان صورت و مخرج برابره

۲) اگه جواب حد صفر بشه توان مخرج بیشتر از توان صورته .

۳) اگه بی نهایت شد یعنی توان و مرتبه ی صورت بزرگتراز توان و مرتبه ی مخرجه .

۸۰) حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)$ چند برابر $\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$ است ؟

$$\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}9+\frac{7}{(-\infty)^3}=9+0=9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\frac{-6}{2}=-3$$

هر دو تابع ، هنگامی که x شان بینهایت می شود ، عرض شان عدد شده، پس هر دو در بینهایت حد دارند و اولی -3 برابر دومی است .

۸۱) حدود زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+4}{x^2+3x-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-2x^3}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^3-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

۸۲) حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}$ را به دست آورید .

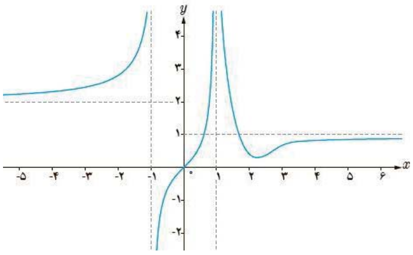
رادیکال میره به سمت ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{3x}=\frac{-2x}{3x}=\frac{-2}{3}$$

۸۳) حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{۵x^۲+\sqrt{x^۲+x}}{۲x^۲-۳x-۱}$ را حساب کنید .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^۲+\sqrt{x^۲+x}}{۲x^۲-۳x-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{۵x^۲}{۲x^۲}=\frac{۵}{۲}$$

۸۴) حاصل تمامی حدود زیر را محاسبه کنید .



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$$

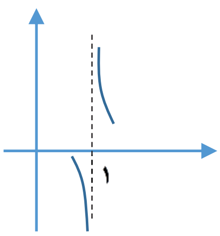
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]+\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[۲^+]+[۱^-]=۲+۰=۲$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-۱^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-۱^-}f(x)=+\infty\end{cases}$$

۸۵) حد کدام تابع شبیه شکل مقابل است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{-x}{x-۱}$

۲) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{۱}{(x-۱)^۲}$

۳) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{-۱}{۱-x}$

$$\lim_{x\to۱}\frac{-۱}{۱-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{-۱}{۱-x}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to۱^-}\dfrac{-۱}{۱-x}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$