



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

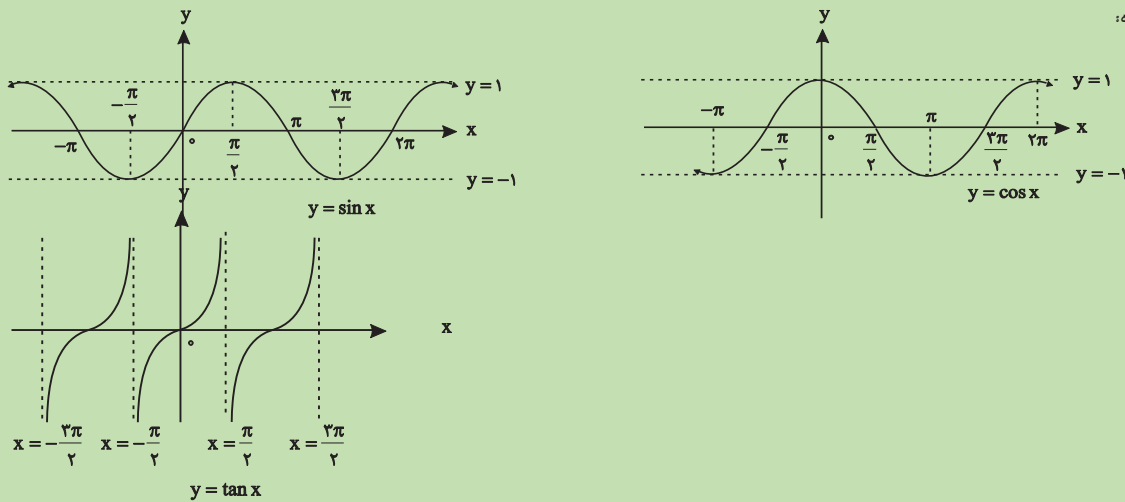
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

فصل ۲ مثلثاتی

نمودار توابع مثلثاتی ساده:

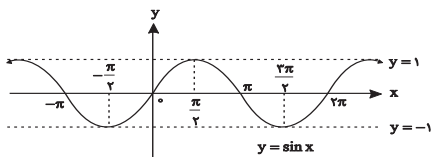


دوره تناوب

تابع با ضابطه $y = f(x)$ با دامنه D_f را در دامنه اش متناوب می گویند، هرگاه عدد حقیقی و ناصفر T وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند.

$$۱) \forall x \in D_f \quad (x \pm T) \in D_f, \quad ۲) \forall x \in D_f \quad f(x \pm T) = f(x)$$

این یعنی اینکه شکل تابع در فاصله های T واحدی تکرار به مثل تابع سینوس که در فاصله های 2π واحدی تکرار می شه



(۳۸) تابع $y = x - [x - 2]$ مفروض است.

(۳) نشان دهید تابع متناوب است.

(۲) حدود y را بیابید.

(۱) نمودار تابع را رسم کنید.

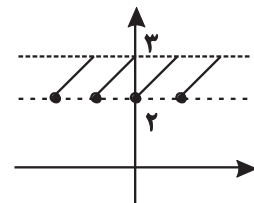
پاسخ: ☒

$$۱) y = x - [x - 2] = x - [x] + 2$$

وقتی این تابع را ساده کنیم به فرم تابع فارفاسکی که دو واحد به سمت بالا در امتداد محور y ها رفته می شود.

$$۲) 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 2 \leq x - [x] + 2 < 3 \Rightarrow 2 \leq y < 3 \text{ هر دو تابع}$$

$$۳) f(x) = x - [x] + 2 \Rightarrow T = \frac{1}{1} = 1 \text{ دوره تناوب تابع}$$



دوره تناوب اصلی تابع: اگر T دوره تناوب تابع f باشد آن گاه $nT, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ نیز دوره تناوب تابع است یعنی دوره تناوب تابع مجموعه ای بی شمار است، حال اگر این مجموعه دارای کوچک ترین عضو مثبت باشد آن را دوره ی تناوب اصلی می نامند.

دوره تناوب های مهم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = \sin^{r_{n-1}}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{r_{n-1}}(ax+b) \end{cases} &\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} \\ \begin{cases} f(x) = \sin^{r_n}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{r_n}(ax+b) \end{cases} &\Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|} \end{aligned}$$

۳۹) دوره تناوب کدام تابع بیشتر است ؟

$$y = \sin(3x + \frac{\pi}{4}) \quad (۴)$$

$$y = \cos \frac{x}{2} \quad (۳)$$

$$y = \cos \pi x \quad (۲)$$

$$y = \sin 4x \quad (۱)$$

گزینه ۳ درست است زیرا

$$\sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \pi x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$



(۱) هرگاه تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی ساده بود برای تعیین دوره تناوب اصلی تابع، ابتدا تناوب هر یک از توابع را حساب کرده سپس کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم.

(۲) هرگاه تابع به صورت حاصل ضرب دو یا چند تابع مثلثاتی ساده باشد. ابتدا آن را به مجموع تبدیل کرده سپس دوره تناوب آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۴۰) دوره تناوب تابع $y = \sin^2\left(\frac{3x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)$ را تعیین کنید.

پاسخ: ☒

$$y = \sin^2 \frac{3x}{4} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi}{3}, \quad y = \cos^2 \frac{2x}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \xrightarrow{\text{ک.م.م}} T = 12\pi$$



اگر مجموع دو کمان برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد آن‌گاه دو کمان متمم و اگر مجموع‌شان π باشد مکمل یکدیگرند.

$$a + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \cos b \\ \cos a = \sin b \\ \tan a = \cot b \\ \cot a = \tan b \end{cases}$$

$$a + b = \pi \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin a - \sin b = 0 \\ \cos a + \cos b = 0 \\ \tan a + \tan b = 0 \\ \cot a + \cot b = 0 \end{cases}$$

در صورت وجود

چند مثال:

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\cot 50^\circ = \tan 40^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$$

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$2) \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$3) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$(41) \text{ نشان دهید برای هر زاویه } \alpha \text{ داریم: } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (\text{شهریور ۹۴})$$

پاسخ: ✓

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$(42) \text{ در صورتی که } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ و زاویه } \alpha \text{ حاده باشد مقدار عددی } \cos 2\alpha \text{ را محاسبه کنید.} \quad (\text{خرداد ۹۴ - خارج کشور})$$

پاسخ: ✓

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$(43) \text{ خلاصه شده عبارت } \tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) \text{ را به دست آورید.}$$

پاسخ: ✓

$$\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} (2 \cos^2 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ = \cos 50^\circ$$

$$(44) \text{ خلاصه شده عبارت } \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin(\pi + a) - \sin(\pi - a) \cos a \text{ را بنویسید.}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin(\pi + a) - \sin(\pi - a) \cos a = \cos a (-\sin a) - \sin a \cos a = -2 \sin a \cos a = -\sin 2a$$

پاسخ: ✓

$$(45) \text{ نشان دهید برای هر زاویه } \alpha \text{ داریم: } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (\text{دی ماه ۹۲})$$

پاسخ: ✓

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(46) \text{ سینوس زاویه } 22/5^\circ \text{ را حساب کنید.} \quad (\text{خرداد ۹۱})$$

$$\text{پاسخ: } 22/5^\circ \text{ زاویه } 22^\circ \text{ درجه نسبت های مثلثاتی راجع نیست ولی به کمک زاویه } 45^\circ \text{ می توانیم اونا رو به دست بیاریم}$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$(47) \text{ با توجه به این که } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{، حاصل } \sin 7/5^\circ \text{ را بیابید.}$$

پاسخ: فب به فورده سفته ولی

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin^2 7/5^\circ = \frac{1 - \cos 15^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{2} \Rightarrow \sin 7/5^\circ = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}$$



(۱) در توابع: $f(x) = a \cos bx + c$, $f(x) = a \sin bx + c$ مقدار ماکزیمم تابع $|a| + c$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + c$

و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ خواهد بود. و یادت باشه: $c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$, $|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$

(۲) یعنی با داشتن ضابطه ی توابع فوق ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع تعیین می شود وبا داشتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب می توان ضابطه ی تابع را تعیین کرد.

یادت باشه:

(۱) در تابع $y = a \sin x$ خواهیم داشت. $y_{\max} = |a|$, $y_{\min} = -|a|$ که در مبداء مختصات صعودی است اگر $a > 0$ باشد و اگر $a < 0$ تابع نزولی عبور می کند.

(۲) اما تابع $y = a \sin bx$ دارای دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و $y_{\max} = |a|$, $y_{\min} = -|a|$

(۳) در تابع $y = \sin(bx + c)$ همان نمودار $y = \sin bx$ را داریم که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست انتقال دارد.

(۴۸) ضابطه تابع به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π , مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \quad |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \quad c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 2$$

$$y = 3 \sin 2x + 2$$

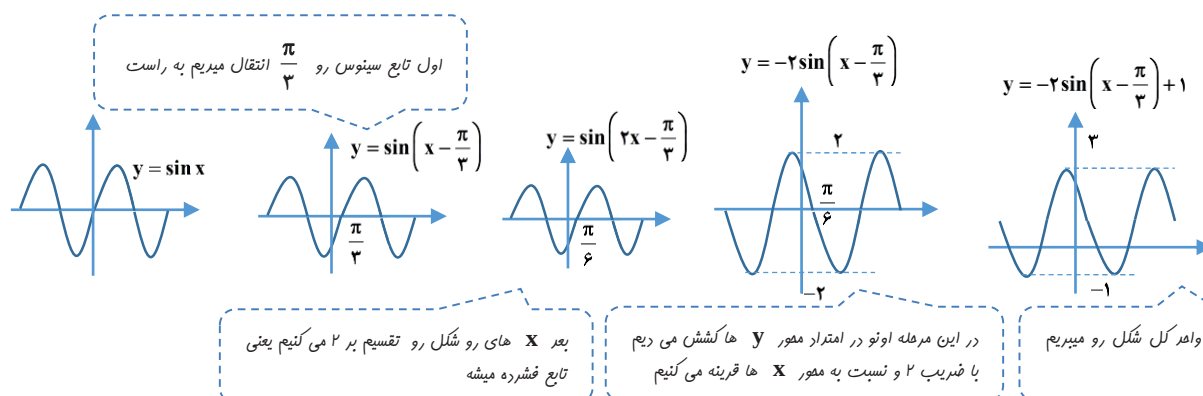
(۴۹) ولتاژ یک دستگاه لوازم خانگی بر حسب کسینوس نسبت به زمان دارای فرکانس یا دوره تناوب $\frac{1}{80}$ است و تغییرات ولتاژ در بازه $[-120, 120]$ است معادله ولتاژ این دستگاه را بنویسید.

$$v(t) = a \cos(bt) + c$$

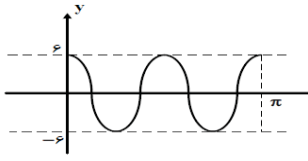
$$\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{80} \Rightarrow b = 160\pi \quad , \quad a = \frac{120 - (-120)}{2} = 120 \quad , \quad c = \frac{120 - 120}{2} = 0 \Rightarrow v(t) = 120 \cos 160\pi t$$

پاسخ: ☒

(۵۰) نمودار تابع $y = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ را رسم کنید.



۵۱) شکل مقابل نمودار $y = a \cos bx$ است. مقادیر a, b را تعیین کنید و مقدار تابع در $x = \frac{7\pi}{12}$ به دست آورید.



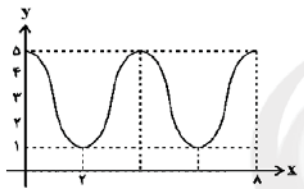
پاسخ: در بازه $[0, \pi]$ شکل منفی دو بار تکرار شده است پس دوره تناوب $T = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|}$ است در نتیجه $b = 4$

و تغییرات تابع در بازه $[-6, 6]$ است و چون روتر تابع در مبدأ نزولی است پس $a = 6$ است و معادله منفی به صورت $y = 6 \cos 4x$ خواهد بود.

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 6 \cos\left(4 \times \frac{7\pi}{12}\right) = 6 \cos \frac{7\pi}{3} = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

در نتیجه :

۵۲) نمودار تابع $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل روبروست است. حاصل $a + b$ کدام است؟



پاسخ: در نقطه‌ی $x = 0$ داریم: $f(0) = a \cos b\pi(0) + 3 = a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$

طبق نمودار فاصله‌ی $x = 0$ تا $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی یافتن تمام کمان‌هایی است که در معادله صدق می‌کنند، هر معادله‌ی مثلثاتی در صورت داشتن جواب به یکی از معادلات زیر تبدیل می‌شود. به حل و بسط هر یک می‌پردازیم.

۱) $\sin x = m = \sin \theta$

۲) $\cos x = m = \cos \theta$

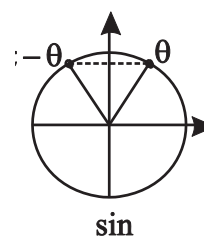
معادلات سینوسی

(۱)

$$\sin x = m = \sin \theta$$

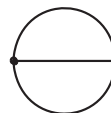
$$(-1 \leq m \leq 1)$$

$$x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

جواب‌های عمومی $k \in \mathbb{Z}$ 

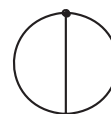
◀ حالت‌های خاص

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$



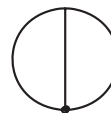
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

ریشه‌های مضاعف



$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

ریشه‌های مضاعف

۵۳) معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

☑ پاسخ:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x & \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - x & \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases}$$

(دی ماه ۹۳)

۵۴) معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کرده جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند را تعیین کنید.

☑ پاسخ:

$$\sin x(2\sin x - 1) = 0$$

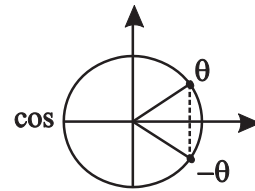
$$\begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = k\pi \\ 2\sin x - 1 = 0 & \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

معادلات کسینوسی

$$\cos x = m = \cos \theta$$

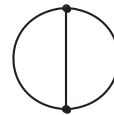
$$-1 \leq m \leq 1$$

$$x = \begin{cases} 2k\pi - \theta \\ 2k\pi + \theta \end{cases} \quad \text{پوآب‌های عمومی}$$

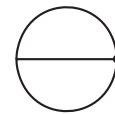


◀ حالت‌های خاص

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$



$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$



۵۵) معادله $\cos^3 x - \cos x = 0$ را حل کنید.

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos^3 x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

۵۶) معادله $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ را حل کنید.

☑ پاسخ:

۲ شره دو ۱

$$1 + \cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{4} = \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 = \cos 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(شهریور ۹۳)

۵۷) معادله $\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.

☑ پاسخ:

$$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(شهریور ۹۴)

۵۸) معادله $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید.

☑ پاسخ:

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$