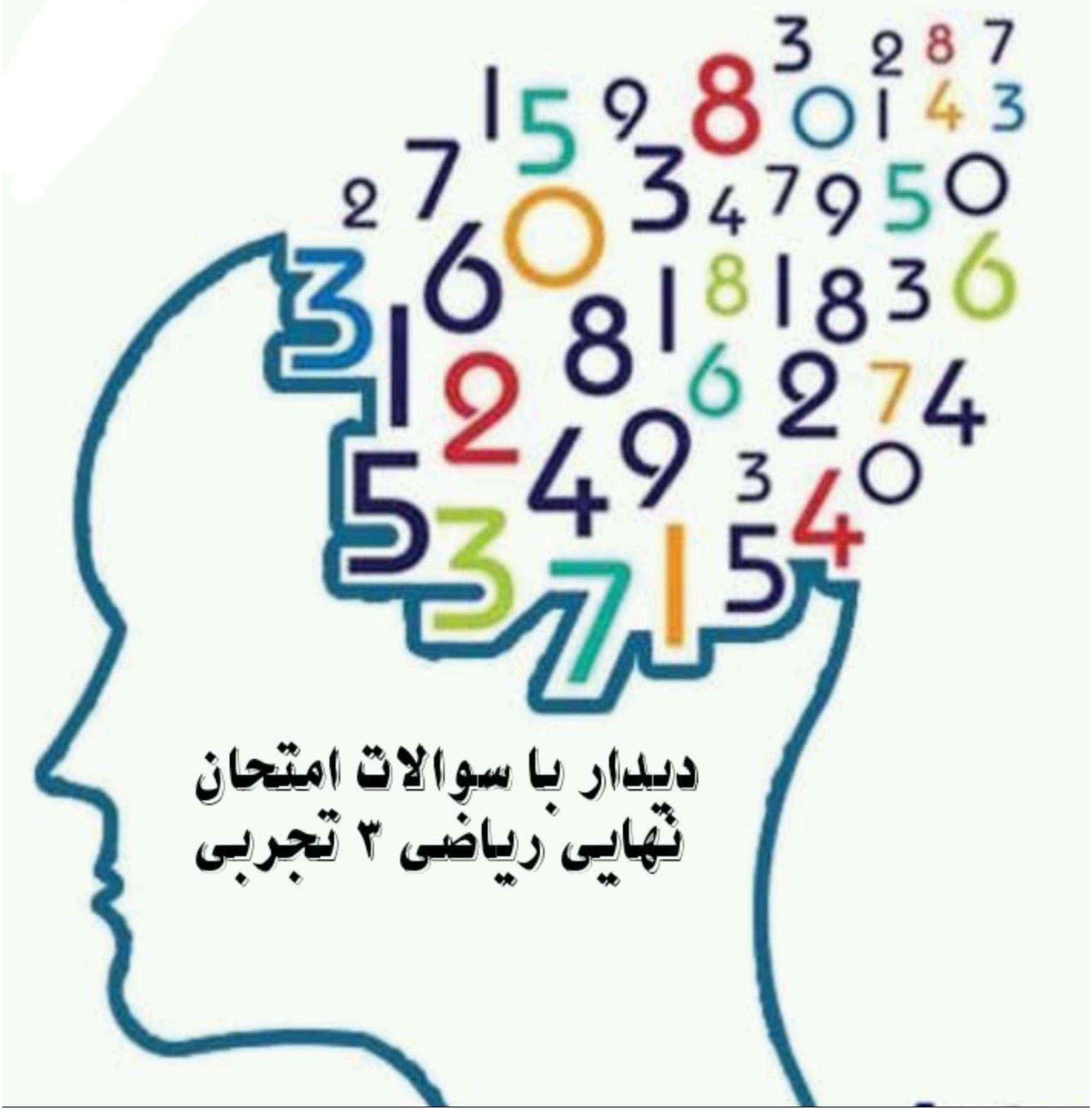
ریاضی ۳ به سبک روحانی



مولف : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۳۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . تدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۷ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .

دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .

۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.

۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.

خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.

فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم

از مهندس آرش آریان بابت ویراستاری ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج اردیبهشت ۱۳۹۸ : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

فهرست مطالب

فصل اول: تابع

اعمال روی توابع ۶
توابع صعودی نزولی ۹
ترکیب توابع ۱۱
تابع وارون ۱۴

فصل دوم: مثلثات

دوره تناوب ۱۷
نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۱۹
نمودار توابع مثلثاتی ۲۰
معادلات مثلثاتی ۲۲

فصل سوم : حد

بخش پذیری ۲۴
مفهوم حد و حد از روی نمودار ۲۵
حدود توابع کسری و ابهام $\frac{0}{0}$ ۲۷
حدود نامتناهی ۳۲
حد در بی نهایت ۳۳

فصل چهارم : مشتق

تعریف مشتق ۳۶
مشتق و پیوستگی و روش های محاسبه مشتق ۳۷
مشتق و خط مماس بر تابع ۴۱
آهنگ تغییر ۴۲

فصل پنجم : کاربرد مشتق

یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق ۴۳
نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی ۴۴
اکسترمم های مطلق ۴۵
بهینه سازی ۴۷

فصل ششم : هندسه مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی وبیضی ۴۸
دایره ۵۰

فصل هفتم : احتمال

مروری بر مبانی احتمال ۵۲
قانون احتمال کل ۵۳

آزمون ها

آزمون ۱ و پاسخنامه ۵۶
آزمون ۲ و پاسخنامه ۶۰
آزمون ۳ و پاسخنامه ۶۳
آزمون ۴ و پاسخنامه ۶۷
آزمون ۵ و پاسخنامه ۷۰
آزمون ۶ و پاسخنامه ۷۴
آزمون ۷ و پاسخنامه ۷۸

بارم بندی درس ریاضیات ۳ پایه دوازدهم – سال تحصیلی : ۹۸ – ۱۳۹۷ ترم اول

فصل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمره	۷	۵	۵	۳			

بارم بندی درس ریاضیات ۳ پایه دوازدهم – سال تحصیلی : ۹۸ – ۱۳۹۷ ترم دوم امتحان نهایی

فصل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمره	۱/۵	۱/۵	۱	۵/۵	۴	۴	۲/۵

دوستان و دانش آموزان عزیزم به تک تک سوالات کتاب درسی حتی سوالات حل شده مراجعه و اونارو حل و بررسی کنید ۳ الی ۴ سوال از تمرینات حل شده " داخل" کتاب میاد عیناً. کار در کلاس ها و فعالیت ها رو جدی بگیرید ومطمئن باشید امتحان نهائی از هر امتحانی راحتتره ، چون دقیقاً بر پایه کتاب درسی و فهم درست مطالب اون طراحی می شه .

جعبه ابزار

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

۳) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۶) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۷) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

۸) $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

۹) $\forall n\in N \qquad (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1$

۱۰) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۱۱) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۱۲) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

۱۳) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

۱۴) $(a-b)^3=a^3-b^3+3ab(a-b)$

۱۵) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

۱۶) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

۱۷) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۸) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

۱۹) $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

۲۰) $a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

۲۱) $(x+a)(a+b)=x^2+(a+b)x+ab$

مساحت ها ، حجم ها و محیط های مهم :

دایره : $S=\pi R^2 \quad , \quad P=2\pi R$

کره : $S=4\pi R^2 \quad , \quad V=\frac{4}{3}\pi R^3$

استوانه : $S=2\pi Rh+2\pi R^2 \quad , \quad V=\pi R^2 h$

مخروط : مولدمخروط $L^2=R^2+h^2 \quad , \quad V=\frac{\pi}{3}R^2 h$

قدر مطلق

۱) $|u|\ge 0 \quad , \quad |u|=0 \Rightarrow u=0$

۲) $|u|=|-u| \quad \Rightarrow \quad |u-v|=|v-u|$

۳) $-|u|\le u\le |u|$

۴) $\sqrt[2n]{u^{2n}}=|u|$

۵) $|u|=K \xrightarrow{K>0} u=\pm K$

۶) $|u|=|v| \longrightarrow u=\pm v$

۷) $K>0 \Rightarrow \begin{cases} |u|\le K \Leftrightarrow -K\le u\le K \\ |u|\ge K \Leftrightarrow u\ge K \quad \vee \quad u\le -K \end{cases}$

۸) $\begin{cases} |uv|=|u||v| \\ \left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|} \qquad v\ne 0 \end{cases}$

فصل ۱ تابع

اعمال روی توابع

بررسی تابع $kf(x)$

برای رسم نمودار kf باید عرض هر نقطه‌ی f را در عدد k ضرب کنیم.

$$(kf)(x)=kf(x)\ \Rightarrow \begin{cases} D_{kf}=D_f \\ R_{kf}=\{ky \mid y\in R_f\} \end{cases}$$

$k>1$: تابع f در راستای محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود.

$0<k<1$: تابع f در راستای محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود.

$-1<k<0$: تابع ابتدا نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ فشرده می‌شود.

$k=-1$: تابع فقط نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود.

$k<-1$: تابع نسبت به محور x ها منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ کشیده می‌شود.

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازه‌ی $[m,n]$ باشد، آن‌گاه با فرض مثبت بودن k برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[km,kn]$ می‌باشد و اگر k منفی باشد، برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[kn,km]$ خواهد بود.

دامنه‌ی توابع $f(x)$, $kf(x)$, $f(x)+k$ یکسان‌اند.

بررسی تابع $g(x)=f(kx)$

در این توابع دامنه تغییر می‌کند، اما برد هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

$$D_f=[a,b]\ \Rightarrow\ a\le kx\le b\ \Rightarrow \begin{cases} \text{if}\ \ k>0\ \Rightarrow \dfrac{a}{k}\le x\le \dfrac{b}{k} \\ \text{if}\ \ k<0\ \Rightarrow \dfrac{a}{k}\ge x\ge \dfrac{b}{k} \end{cases} \Rightarrow\ \ D_g=\left\{\dfrac{x}{k}\ \middle|\ x\in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} g(x)=f(kx) \\ |k|<1\ \text{کشیدگی} \\ |k|>1\ \text{فشردگی} \end{cases}$$

نکته

✷ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم . سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم .

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0<a<1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر $(a>1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

نکته

✸اگر نقطه A روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x)=f(ax+b)$ برابراست با :

$$\text{if}\quad A(x_۰,y_۰)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_۰-b}{a}\\ y_۰\end{matrix}\right. \in g(x)=f(ax+b)$$

$$\text{if}\quad A(x_۰,y_۰)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_۰-b}{a}\\ ky_۰\pm k'\end{matrix}\right. \in g(x)=kf(ax+b)\pm k'$$

نکته

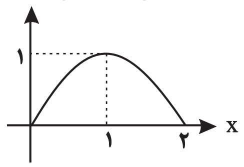
✸ بررسی تابع $y=f(x-a)$ $(a>۰)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم .

✸ بررسی تابع $y=f(x+a)$ $(a>۰)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم .

۱) نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است. نمودار تابع $g(x)=f(-۲x)$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید .

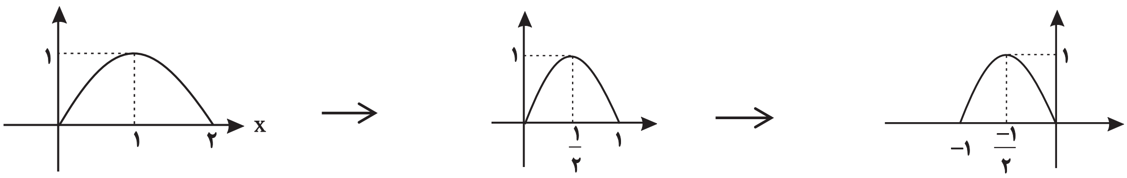


☑پاسخ: $D_f=[۰,۲]\ ,\ R_f=[۰,۱] \Rightarrow f(x) \Rightarrow ۰\le x\le ۲ \Rightarrow f(-۲x) \Rightarrow ۰\le -۲x\le ۲ \Rightarrow -۱\le x\le ۰$

در تابع f ، x باید

حالا باید $-۲x$ تو دامنه f باشه

طرفین نامساوی رو بر -۲ تقسیم



فشردگی طولی به خاطر ضریب ۲ واحدی x داخل پرانتز

تقارن طولی به خاطر منفی داخل پرانتز

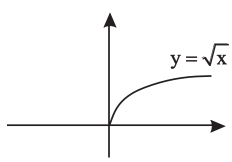
$D_g=[-۱,۰]\quad , \quad R_g=[۰,۱]$

نکته برد توابع $f(x)$ ، $f(kx)$ ، $f(x+k)$ یکسان‌اند.

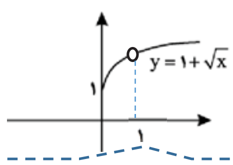
۲) به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

☑پاسخ: برای هر کاری به جز دامنه گرفتن، اول تا جای ممکن تابع را ساده کنید. (ثواب داره !)

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۱-\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x}$$

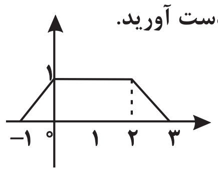


حالا شکل $\sqrt{x}$ رو یه واحد می‌بریم بالا



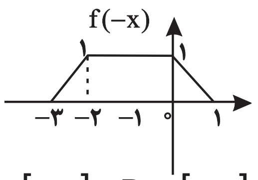
اینجا بخاطر دامنه تابع کسری ، تابع سوراخ داره

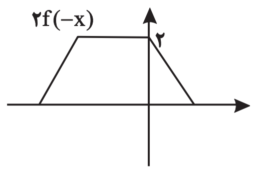
۳) اگر نمودار $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $g(x)=2f(-x)-1$ را رسم کنید و دامنه و برد $g(x)$ را به دست آورید.

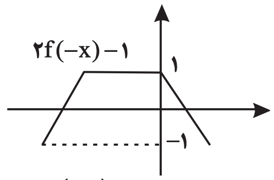


☑پاسخ:

یک واحد ببر پایین — y ها رو دو برابر کن (کشیدگی عرضی) — یعنی x های دامنه را قرینه کن.

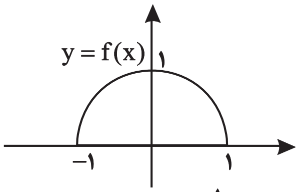






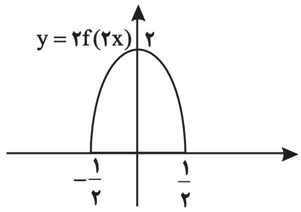
$0\le f(x)\le 1 \quad 0\le f(-x)\le 1 \Rightarrow 0\le 2f(-x)\le 2 \Rightarrow -1\le 2f(-x)-1\le 1$ ، $D_f=[-1,3]$, $D_g=[-3,1]$

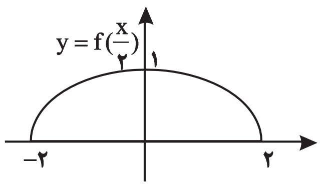
۴) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. نمودار توابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $g(x)=2f(2x)$ را رسم کنید.



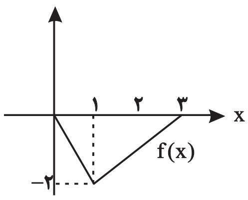
☑پاسخ:

فشردگی طولی به خاطر ضریب دو واحدی x و کشیدگی عرضی به خاطر ضریب دو واحدی f — کشیدگی طولی به خاطر ضریب $\frac{1}{2}$ واحدی x



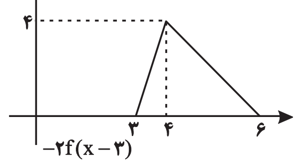


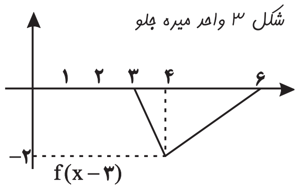
۵) در زیر نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع $y=f(x-3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)



☑پاسخ:

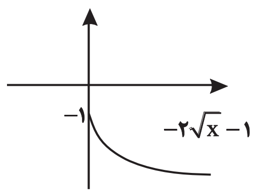
شکل قرینه نسبت به محور xها دو واحد انبساط عرضی دارد. — شکل ۳ واحد میره جلو



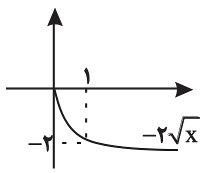


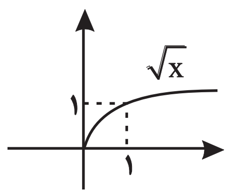
۶) ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-2f(x)-1$ را رسم کنید.(خرداد ۹۲)

☑پاسخ:



۱ واحد میره پایین

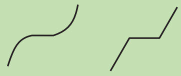




توابع صعودی و توابع نزولی

تابع صعودی: تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند.

$$\forall \ x_1,x_2 \in D_f :\ x_1<x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1)\le f(x_2)$$

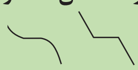


تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود.

$$\forall x_1,x_2 \in D_f :\ x_1<x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$$

تابع نزولی: تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y کاهش یابد و یا ثابت بماند.

$$\forall \ x_1,x_2 \in D_f :\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$



تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز کاهش یابد.

$$\forall \ x_1,x_2 \in D_f :\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

نکته

۱. در هر بازه که تابع ثابت باشه، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.

۲. هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشه ولی یکنوا نباشه مثل تابع: $y=\frac{1}{x}$

روش حل مسئله

۱) اول از $x_1<x_2$ متعلق به دامنه تابع شروع کنید و سعی نمایید $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بسازید.

۲) دقت کنید کدام نامساوی برقرار است $f(x_1)\le f(x_2)$ یا $f(x_1)\ge f(x_2)$ اولی یعنی صعودی بودن تابع و دومی یعنی نزولی بودن آن

۷) نشان دهید تابع $f:(0,+\infty)\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ نزولی اکید است.

☑پاسخ:

$$0<x_1<x_2 \ \Rightarrow\ 0<(x_1)^2<(x_2)^2 \Rightarrow 1+(x_1)^2<1+(x_2)^2 \Rightarrow \frac{1}{1+(x_1)^2}>\frac{1}{1+(x_2)^2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

۸) صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=\sqrt{2x-4}$ را روی دامنه‌اش بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{2x-4} \quad\Rightarrow\quad 2x-4\ge 0 \quad\Rightarrow\quad x\ge 2 \quad\Rightarrow\quad D_f=[2,+\infty)$$

$$x_1<x_2 \quad\Rightarrow\quad 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-4<2x_2-4 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2x_1-4}<\sqrt{2x_2-4} \quad\Rightarrow\quad f(x_1)<f(x_2)$$

تابع در دامنه‌اش صعودی است.

۹) با استفاده از ضابطه‌ی، صعودی یا نزولی بودن تابع: $f(x)=-2(x+1)^3-1$ را بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$x_1<x_2 \ \Rightarrow 2(x_1+1)^3<2(x_2+1)^3 \Rightarrow\ -2(x_1+1)^3-1>-2(x_2+1)^3-1 \ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2) \ \Rightarrow$$

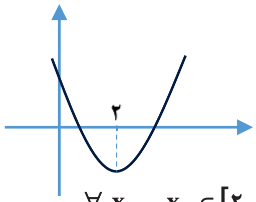
بنابراین تابع نزولی است.

۱۰) در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^2-4x+1$ دامنه تابع را به گونه ای محدود کنید که تابع اکیداً صعودی باشد .

☑پاسخ:

راس این سهمی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ و چون $a=1>0$ دهنه سهمی رو به بالاست و از $x=2$ به بعد تابع صعودی است .

اینم اثباتش



$\forall\ x_1\ ,\ x_2\in[2,+\infty)$ $\qquad x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$

باید نشون بدیم

چون x ها بزرگتر از ۲ اند داریم

$$x_1<x_2\ \Rightarrow\ (x_1-2)<(x_2-2)\Rightarrow(x_1-2)^2<(x_2-2)^2\ \Rightarrow\ (x_1-2)^2-3<(x_2-2)^2-3$$

$$x_1^2-4x_1+1<x_2^2-4x_2+1\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$$

روش حل مسئله

۱) نمودار تابع را رسم کنید.

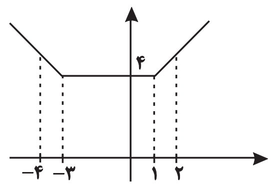
۲) برای هر بازه به صورت مجزا صعودی یا نزولی بودن را بررسی کنید.

۱۱) با رسم نمودار تابع $y=|x-1|+|x+3|$ مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:

$$y=|x+3|+|x-1|\Rightarrow\begin{cases}x=-3 & \text{ریشه قدر مطلق اول}\\ x=1 & \text{ریشه قدر مطلق دوم}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & x<-3\\ 4 & -3\le x\le 1\\ 2x+2 & x>1\end{cases}$$



x	−۴	−۳	۱	۲
y	۶	۴	۴	۶

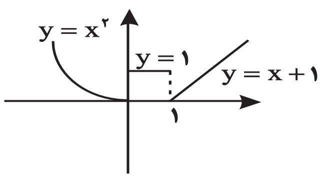
$\forall x\in(-\infty,-3)$ نزولی $\qquad \forall x\in(-3,1]$ ثابت $\qquad \forall x\in(1,+\infty)$ صعودی

۱۲) ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

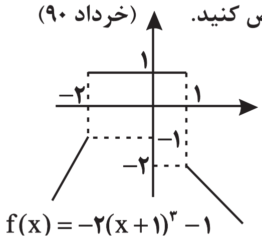
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$$

☑پاسخ:

۱۳) تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است در بازه‌ی $[0,1]$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



۱۴) تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ 1 & -2<x<1\\ -2x & x>1\end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)



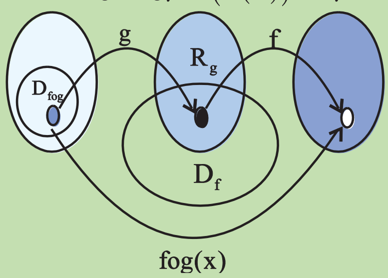
☑پاسخ: تابع در بازه‌ی $(-\infty,-2)$ صعودی است و در بازه‌ی $(-2,1)$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ نزولی است.

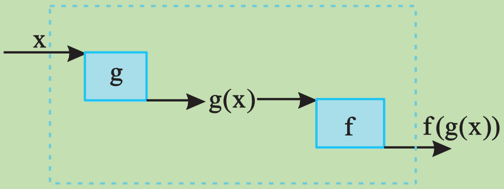
ترکیب توابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ آن‌گاه $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه‌ی تابع $f(x)$ نداشته باشد، $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \phi$ آن‌گاه با جای‌گزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$، تابع fog تشکیل می‌شود.





۱۵) اگر $f = \{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$, $g = \{(-۱,۰),(۱,۲),(۲,۴),(۵,۳)\}$ دو تابع باشند: (شهریور ۹۵)

تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$\begin{array}{l} -۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} \times \\ ۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳) \in fog \\ ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Rightarrow (۲,۵) \in fog \\ ۵ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} \times \end{array} \quad \Rightarrow \quad fog = \{(۱,۳),(۲,۵)\}$$

۱۶) اگر $g = \left\{(۲,\sqrt{۲}),(-۱,۲),\left(\frac{۱}{۴},۳\right),\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)\right\}$, $f = \left\{(۰,۲),(۱,-۱),\left(۳,\frac{-۱}{۴}\right),(-۲,۳),(-۱,۰)\right\}$ باشند، تابع gof را بدست آورید.

(خرداد ۹۴)

☑ پاسخ:

$$\begin{array}{l} ۰ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \sqrt{۲} \Rightarrow (۰,\sqrt{۲}) \in gof \\ ۱ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۲ \Rightarrow (۱,۲) \in gof \\ ۳ \xrightarrow{f} \frac{-۱}{۴} \xrightarrow{g} \times \\ -۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} \times \\ -۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} \times \end{array}$$

اینا به جایی نمیرن

$$gof = \{(۰,\sqrt{۲}) , (۱,۲)\}$$

۱۷) اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$, $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۱)

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

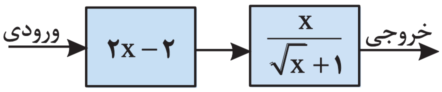
☑ پاسخ:

$$\begin{cases} ۰ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} ۱ \Rightarrow (۰,۱) \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۲-۳} \\ ۵ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۳} \Rightarrow (۵,\sqrt{۳}) \end{cases} \Rightarrow \quad fog = \{(۰,۱),(۵,\sqrt{۳})\}$$

تعریف نشده

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = ۰\} \quad \Rightarrow \quad D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$$

۱۸) اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

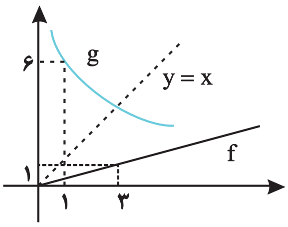


☑پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲x-۲=۴ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

۱۹) شکل مقابل نمودارهای توابع f,g است و f تابعی خطی می‌باشد، $gof(۳)+fog(۱)$ کدام است؟

☑پاسخ:



$$f(x)=\frac{۱}{۳}x \Rightarrow$$

تابع f خطی ، و با شیب $\frac{۱}{۳}$ و گذرا از مبدأ است.
بنابراین معادله آن به این صورت می‌باشد.

$$f(g(۱))=f(۶)=\frac{۱}{۳}(۶)=۲$$
$$g(f(۳))=g(۱)=۶$$
$$gof(۳)+fog(۱)=۶+۲=۸$$

نکته

تعداد زیادی از سوالات ترکیب دو تابع مربوط به تعیین دامنه ترکیب دو تابع بدون تشکیل ضابطه و از راه تعریف است. دقت کن :

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$$
$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.
۲) فرمول دامنه ترکیب رو با توجه به یکی از سه مورد بالا بنویسید.
۳) با استفاده از فرمول و محدودیت های هر دامنه، دامنه ترکیب را حساب کنید.

۲۰) توابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض‌اند. (خرداد ۸۵)

الف) بدون تشکیل ضابطه‌ی fog دامنه را تعیین کنید. ب) در صورت وجود، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

☑پاسخ:

الف) $D_{fog}=\{x\in D_g=R-\{۰\} \mid g(x)\in D_f=[۱,+\infty)\}=\{x \mid x\in R-\{۰\}\ ,\ \frac{۱}{x}\geq ۱\}=\{x \mid x\in R-\{۰\}\ ,\ x\leq ۱\}=(-\infty,۱]-\{۰\}$

ب) $gof=g(\sqrt{x-۱})=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$

یعنی در تابع g بجای x ، ضابطه $f(x)$ رو قرار بده

۲۱) اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ، $g(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۴x}$ باشد دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

☑پاسخ: $f(x)=x+|x|=\begin{cases}\sqrt{۲x} & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases} \Rightarrow x+|x|\geq ۰ \Rightarrow D_f=R$ ، $D_g=R-\{۰,۴\}$

می‌دانیم: $\forall x\in(-\infty,۰] \Rightarrow \sqrt{x+|x|}=۰$ ، $\sqrt{x+|x|}=۴ \Rightarrow \sqrt{۲x}=۴ \Rightarrow ۲x=۱۶ \Rightarrow x=۸$

در نتیجه: $D_{gof}=\{x:x\in R$ و $\sqrt{x+|x|}\neq ۰,۴\}=(۰,+\infty)-\{۸\}$

۲۲) اگر $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ ، $g(x)=\sqrt{x-۳}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $۳(f-g)(۴)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع fog را بیابید.

☑پاسخ:

الف) $۳(f-g)(۴)=۳\left(\dfrac{۱}{۴-۱}-\sqrt{۴-۳}\right)=-۲$

ب) $D_f=R-\{۱\}$ ، $D_g=[۳,+\infty) \Rightarrow D_{fog}=\{x\mid x\in D_g \,,\, g(x)\in D_f\}=\{x\mid x\in[۳,+\infty) \,,\, \sqrt{x-۳}\neq ۱\}=[۳,+\infty)-\{۴\}$

۲۳) اگر $g(x)=\dfrac{۱}{x-۳}$ ، $f(x)=۳x-۲$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۰)

الف) $(۳f+۲g)(۴)$ ب) D_{fog}

☑پاسخ:

الف) $۳f=۳(۳x-۲)=۹x-۶$ ، $۲g=\dfrac{۲}{x-۳} \Rightarrow ۳f+۲g=(۹x-۶)+\left(\dfrac{۲}{x-۳}\right)\Rightarrow(۳f+۲g)(۴)=۳۲$

ب) $D_{fog}=\left\{x\in D_g=R-\{۳\} \,\middle|\, \dfrac{۱}{x-۳}\in D_f=R\right\}=R-\{۳\}$

۲۴) توابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{۳x-۲}{۱-x}}$ ، $g(x)=۲x$ مفروض‌اند. دامنه تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳- خارج کشور)

☑پاسخ:

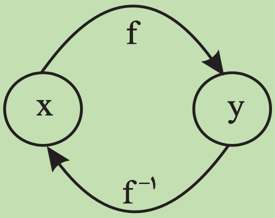
x		$\frac{۲}{۳}$		۱	
$\frac{۳x-۲}{۱-x}$	$-$	۰	$+$		$-$

، $D_f=\left[\dfrac{۲}{۳},۱\right)$ ، $D_g=R$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R\mid ۲x\in\left[\frac{۲}{۳},۱\right)\right\}=\left\{x\in R\mid \frac{۲}{۳}\leq ۲x<۱\right\}=\left\{x\in R\mid \frac{۱}{۳}\leq x<\frac{۱}{۲}\right\}=\left[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right)$$

تابع وارون

اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس‌پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است.



$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f \qquad D_f=R_{f^{-1}}$$

$$\forall x\in D_{f^{-1}} \quad f\left(f^{-1}(x)\right)=x \qquad \forall x\in D_f \quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a)=b$ آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$

نکته

۱) نمودار توابع f,f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند.

۲) نمودار f,f^{-1} در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار f,f^{-1} بر هم منطبق باشند، مانند: $y=\frac{1}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:
$f^{-1}(x)=\log_2^x \ , \ f(x)=2^x$

روش حل مسئله

۱) ابتدا ثابت کنید تابع یک به یک است. (قسمت خسته‌ی کار) این طوری:

$$\forall x_1,x_2\in D_f:\ f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$$

کمتر سوال میاد ، بیشتر می خواد که ضابطه تابع معکوس رو مستقیم به دست بیارید

۲) تابع را بر حسب x بنویسید یعنی از ضابطه‌ی داده شده x رو بر حسب y تنها کنید. (قسمت سخت کار)

۳) درنهایت تابع حاصل را به صورت $y=f^{-1}(x)$ بنویسید.

۲۵) معکوس توابع زیر کدام است؟

۱) $y=ax+b$ ۲) $f(x)=x^3+3x^2+3x$

☑پاسخ:

۱) $y=ax+b \Rightarrow ax=y-b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

۲) $f(x)=x^3+3x^2+3x \Rightarrow y=x^3+3x^2+3x+1-1=(x+1)^3-1 \Rightarrow y+1=(x+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y+1}=x+1$

$x=\sqrt[3]{y+1}-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

مکعب کامل می‌کنیم

۲۶) در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

☑پاسخ:

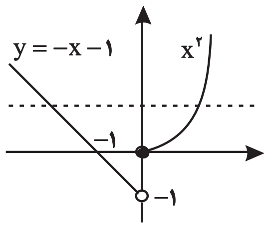
$f(x)=\frac{3x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(7)=? \Rightarrow \frac{3x+1}{x-1}=7 \Rightarrow 7x-7=3x+1 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f^{-1}(7)=2$

$f(x)=x^2-2x\ ,\ x\le 2 \Rightarrow f^{-1}(5)=? \Rightarrow x^2-2x=5 \Rightarrow x^2-2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{24}}{2}=\begin{cases}1+\sqrt{6} & \text{ق}\\ 1-\sqrt{6} & \text{ق}\end{cases}$

۲۷) به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (خرداد ۹۴)

$$f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\geq 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$$

☑پاسخ: مطابق شکل خطوط افقی $y=k\geq 0$ منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد شد.



۲۸) تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$, $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ (شهریور ۹۴)

☑پاسخ: اولاً تابع $f(x)$ یک به یک است چون

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{x_1}+3=\frac{1}{x_2}+3\Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{1}{x}+3\Rightarrow \frac{1}{x}=y-3\Rightarrow x=\frac{1}{y-3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x-3}=g(x)$$

۲۹) وارون پذیری تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی تابع وارون را به دست آورید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1)=(2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_2x_1-2x_2+x_1-1\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow yx-y=2x+1\Rightarrow yx-2x=y+1\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

۳۰) نشان دهید تابع $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

☑پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون‌پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2:\ 1+\sqrt[3]{x_1-5}=1+\sqrt[3]{x_2-5}\Rightarrow \sqrt[3]{x_1-5}=\sqrt[3]{x_2-5}\Rightarrow x_1-5=x_2-5\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5}\Rightarrow y-1=\sqrt[3]{x-5}\Rightarrow (y-1)^3=(x-5)\Rightarrow x=(y-1)^3+5\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^3+5$$

۳۱) ثابت کنید تابع $f(x)=(x-2)^2$, $x\geq 2$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

☑پاسخ:

اثبات معکوس پذیری

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2\longrightarrow |x_1-2|=|x_2-2|\xrightarrow{x\geq 2} x_1=x_2$$

$$y=(x-2)^2\Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x-2)^2}\Rightarrow \sqrt{y}=|x-2|\xrightarrow{x\geq 2}\sqrt{y}=x-2\quad x=\sqrt{y}+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$$

۳۲) وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور ۹۲)

$$f(x)=\sqrt{x+3}-5$$

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\longrightarrow \sqrt{x_1+3}-5=\sqrt{x_2+3}-5\Rightarrow x_1+3=x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{x+3}-5\Rightarrow y+5=\sqrt{x+3}\Rightarrow (x+3)=(y+5)^2\Rightarrow x=(y+5)^2-3\Rightarrow f^{-1}(x)=(x+5)^2-3$$

۳۳) اگر $f(a)=۳ax-۵$ و نقطه‌ی $(۴,۳)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ باشد، اولاً مقدار a را به دست آورید. ثانیاً ضابطه‌ی تابع وارون f را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$(۴,۳)\in f^{-۱} \Rightarrow (۴,۳)\in f \Rightarrow f(۳)=۳a(۳)-۵=۴ \Rightarrow ۹a=۹ \Rightarrow a=۱$$

$$f(x)=۳x-۵ \Rightarrow y=۳x-۵ \Rightarrow y+۵=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۵}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۵}{۳}$$

نکته

۱) $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

۲) در توابع‌ای با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک) اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه تابع و تابع معکوس با هم برابرند.

یعنی : $f(x)=f^{-۱}(x)$

۳۴)اگر $f(x)=۴x-۳$, $g(x)=x+۲$ تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

پاسخ:

$$y=۴x-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۴} \quad , \quad y=x+۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x-۲$$

$$(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}=f^{-۱}\left(g^{-۱}(x)\right)=\frac{x-۲+۳}{۴}=\frac{x+۱}{۴}$$

۳۵) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$, $g(x)=x^۲$, $x>۰$ آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

☑پاسخ:

$$y=۱+\sqrt{x} \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^۲ \quad , \quad y=x^۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt{x}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

۳۶) تابع وارون $y=x^۳$ ، تابع .... است. (دی ماه ۹۰)

☑پاسخ:

$$y=f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

۳۷)در ماشین زیر ضابطه تابع g را تعیین کنید.

$$x \longrightarrow \boxed{x^۳+۱} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$$

☑پاسخ:

$$g(x)=f^{-۱}$$

$$f(x)=x^۳+۱ \Rightarrow y=x^۳+۱ \Rightarrow y-۱=x^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$