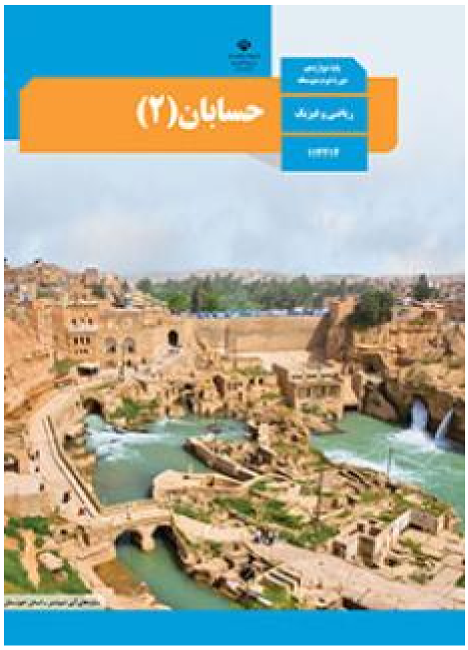
حسابان ۲

پایه ی دوازدهم «رشته ی ریاضی و فیزیک»



تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

مهر ۱۳۹۷

حسابان ۲

پایه ی دوازدهم «رشته ی ریاضی و فیزیک»

فصل ۱ : تابع

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۳۹۷

درس اوّل : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع بـه کمـک تبـدیلات مـی تـوان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبـدیلات را معرفـی می کنیم.

الف : انتقال های افقی و عمودی

قسمت اوّل : انتقال عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می تـوان انتقال عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) + k = y_\circ + k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) - k = y_\circ - k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ - k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم.

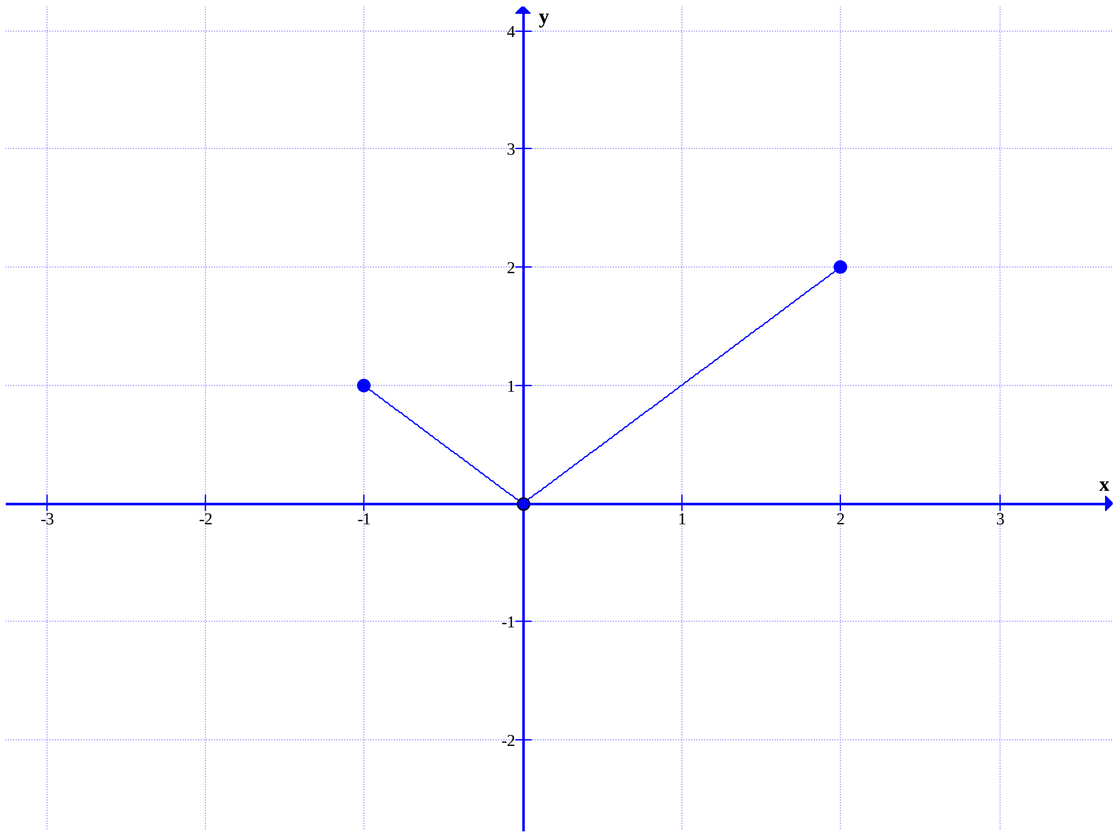
۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله‌ی $[-۱,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

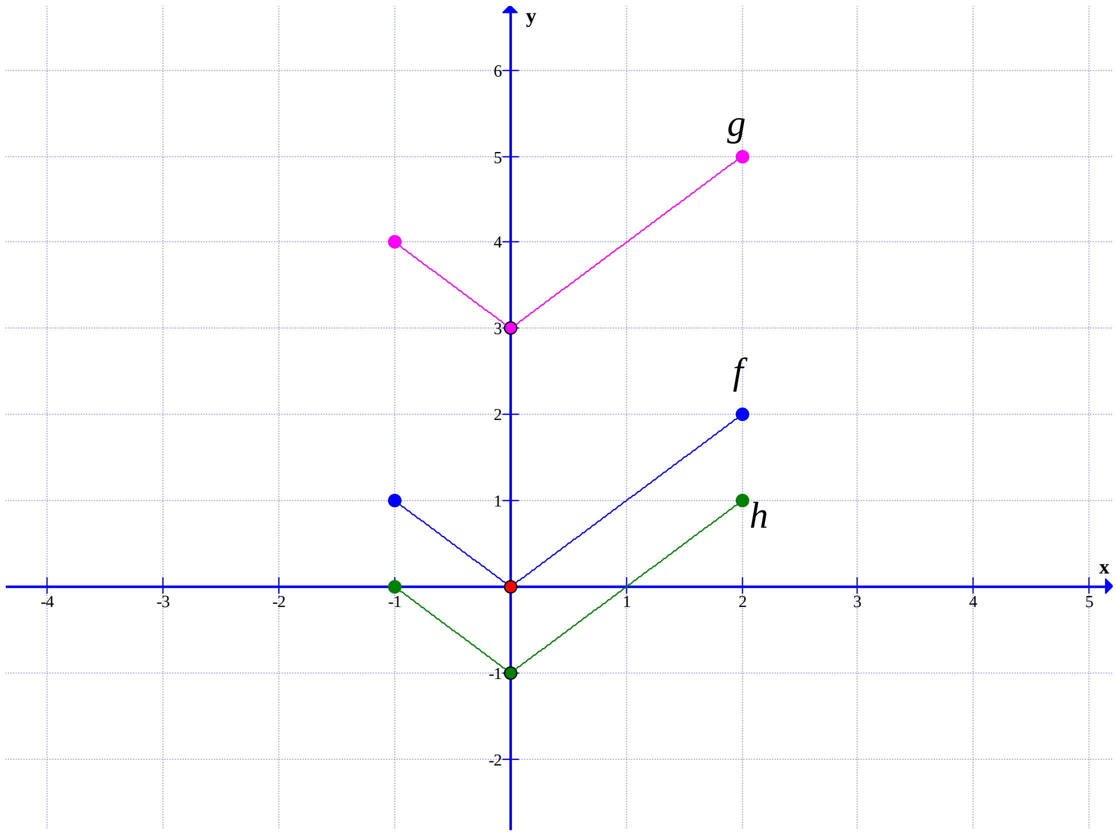
الف : نمودار تابع $g(x) = |x| + ۳$ را رسم کنید. ب : نمودار تابع $h(x) = |x| - ۱$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۱	۰	۲
y	۱	۰	۲

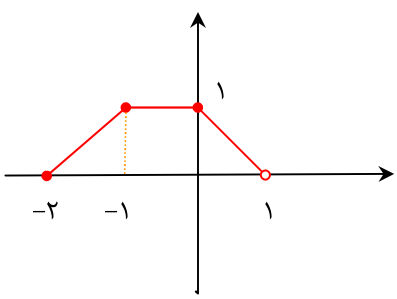


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط عرض آنها به اندازه‌ی k اضافه یا کم می شود.

تمرین ۱ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x) = f(x) - ۲$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

قسمت دوّم : انتقال افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ - k) = f(x_\circ - k + k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ - k, y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x-k)$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ + k) = f(x_\circ + k - k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x-k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم.

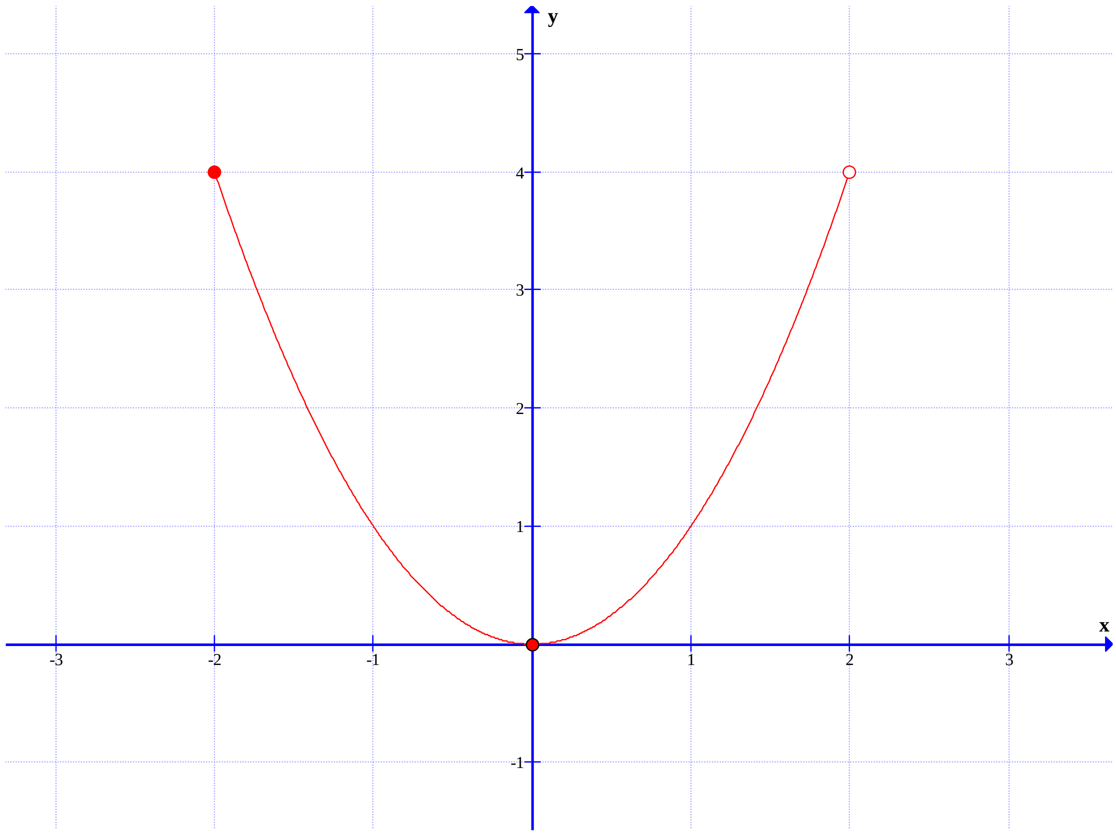
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x) = (x+۳)^۲$ را رسم کنید.

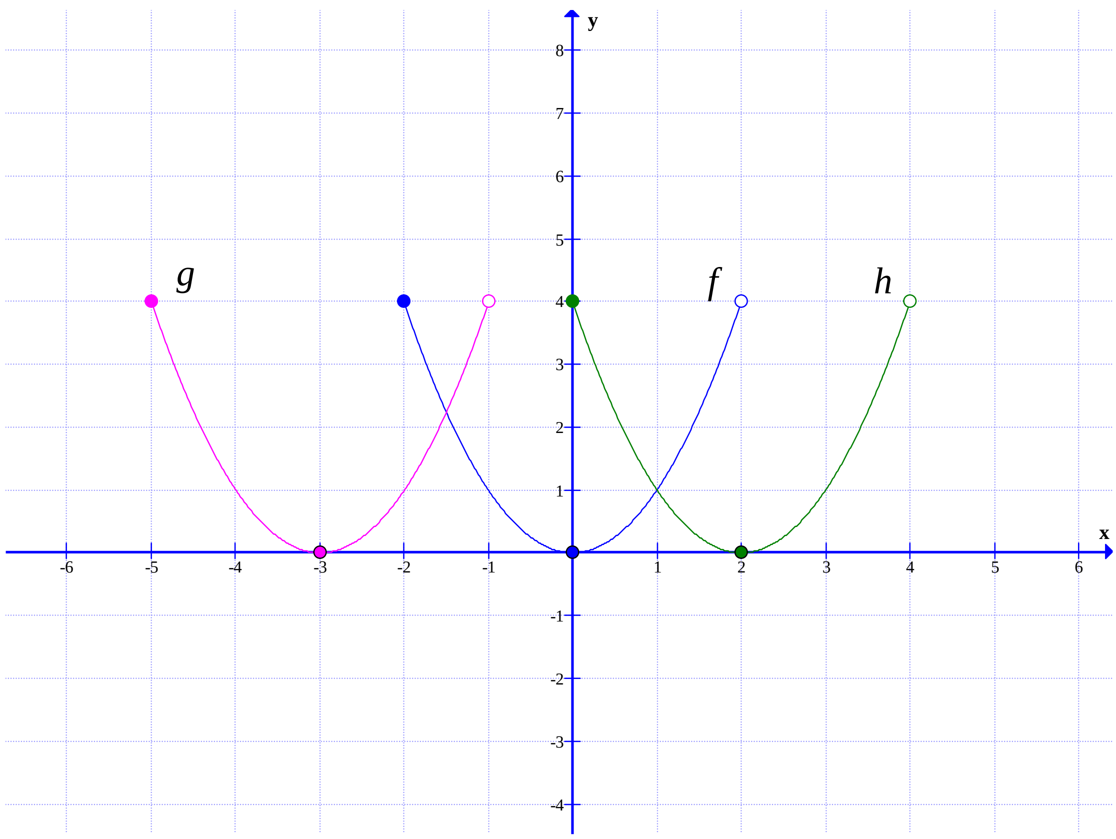
ب : نمودار تابع $h(x) = (x-۲)^۲$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^۲$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۲	۰	۲
y	۴	۰	۴

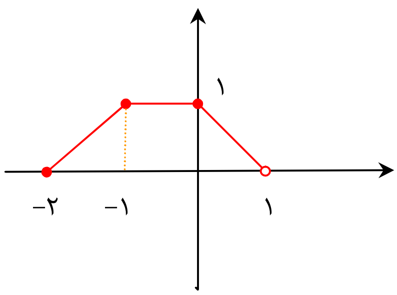


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط طول آنها بـه انـدازه‌ی k واحـد اضافه یا کم می شود.

تمرین ۲ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

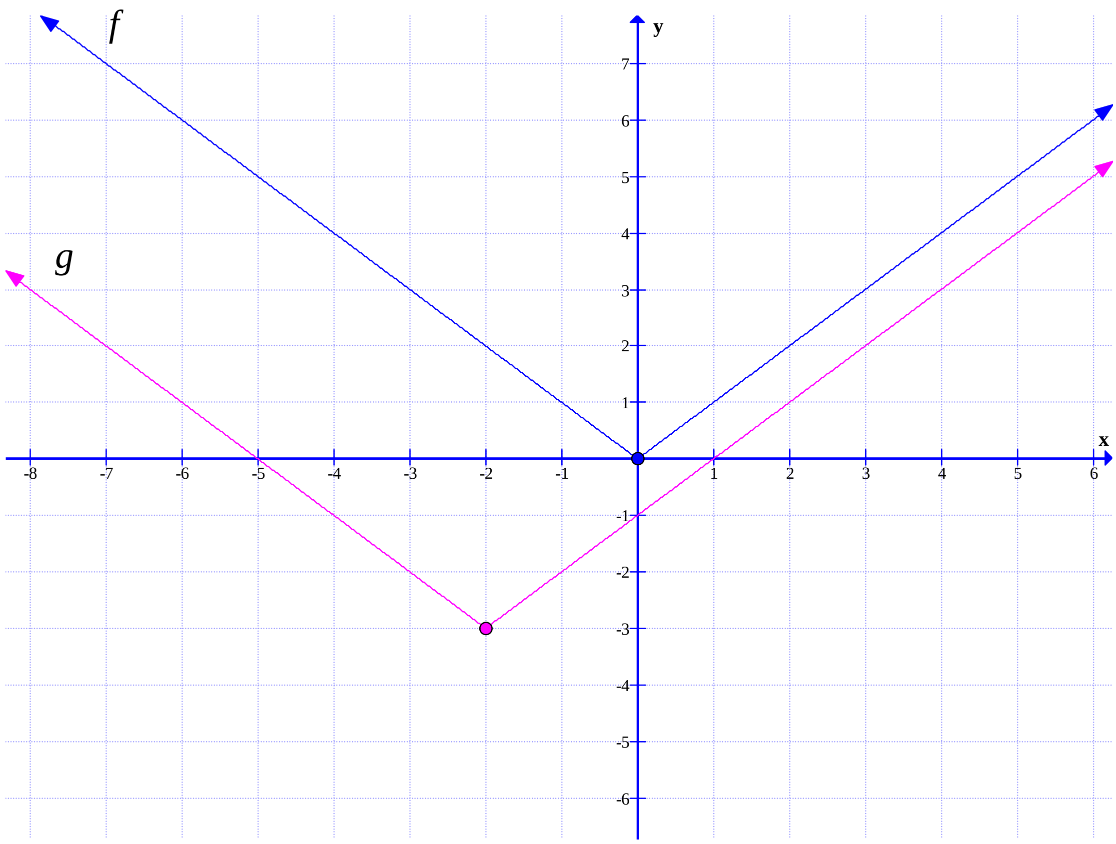
ب : نمودار تابع $g(x) = f(x-۲)$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

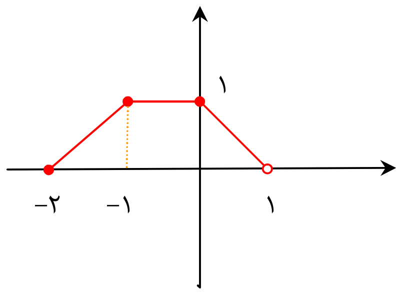
توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم[1]. بـه مثال زیر توجه کنید.

مثال : برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x+۲|-۳$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



---

[1] . لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.



تمرین ۳ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

تمرین ۴ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف) $g(x)=\sin x+۲$ ب) $h(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ج) $k(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})+۱$

***

ب : انبساط و انقباض عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف شده باشد،آنگاه

$$g(x_۰)=kf(x_۰)=ky_۰$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_۰,ky_۰)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقاط را ثابت نگه داریم.

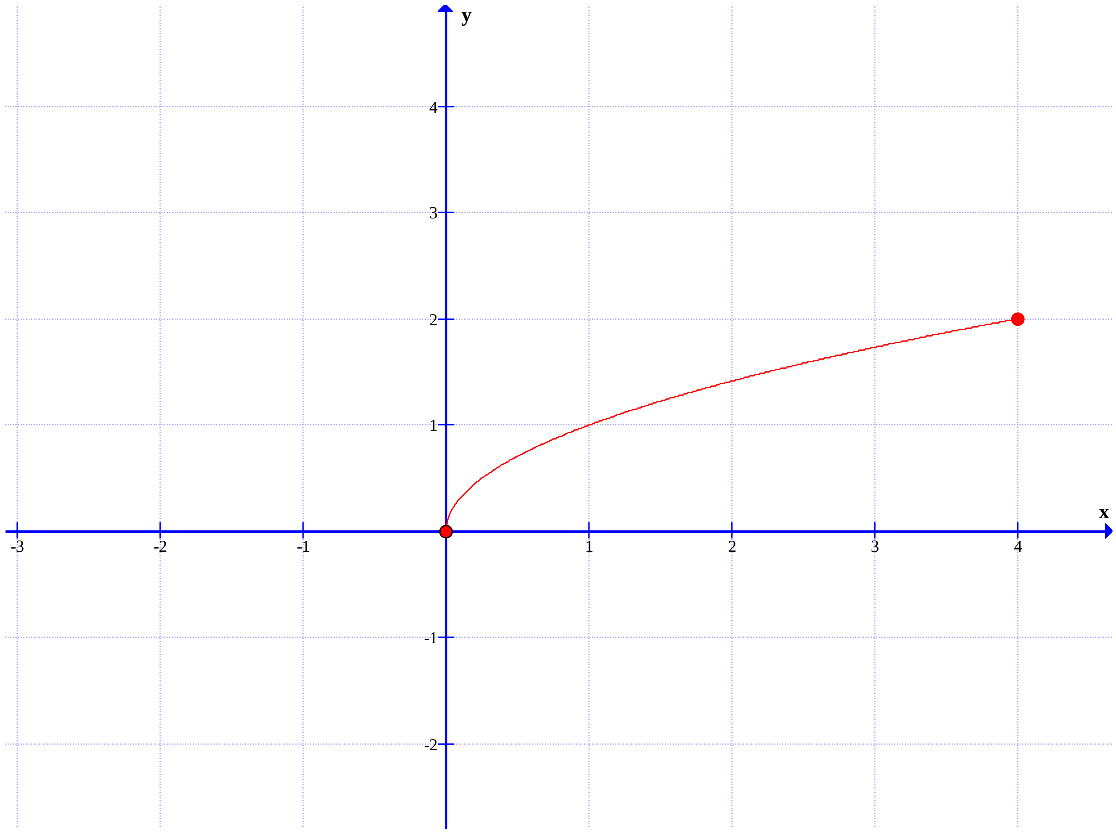
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[۰,۴]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=۳\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

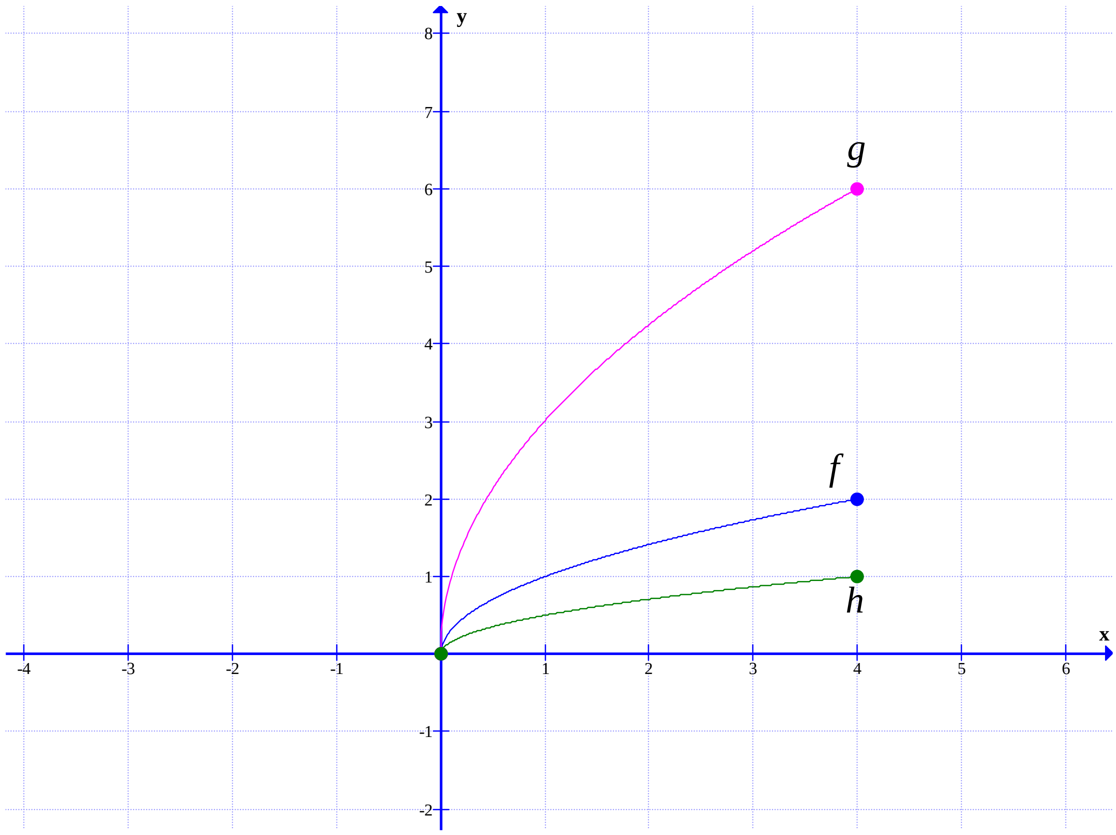
x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g طول نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی عـرض نقـاط را در ضریب $f(x)$ ضرب می کنیم.

g	x	۰	۱	۴
	y	۰	۳	۶

h	x	۰	۱	۴
	y	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱



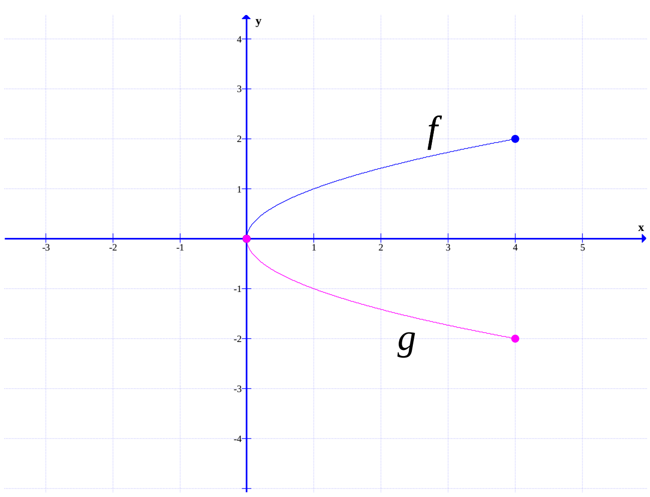
توجه :

۱ : اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -\sqrt{x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۵ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=۲\cos x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

***

ج : انبساط و انقباض افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ,y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{۱}{k}x_\circ)=f(\frac{۱}{k}\times kx_\circ)=f(x_\circ)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{۱}{k}x_\circ,y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طول نقاط را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

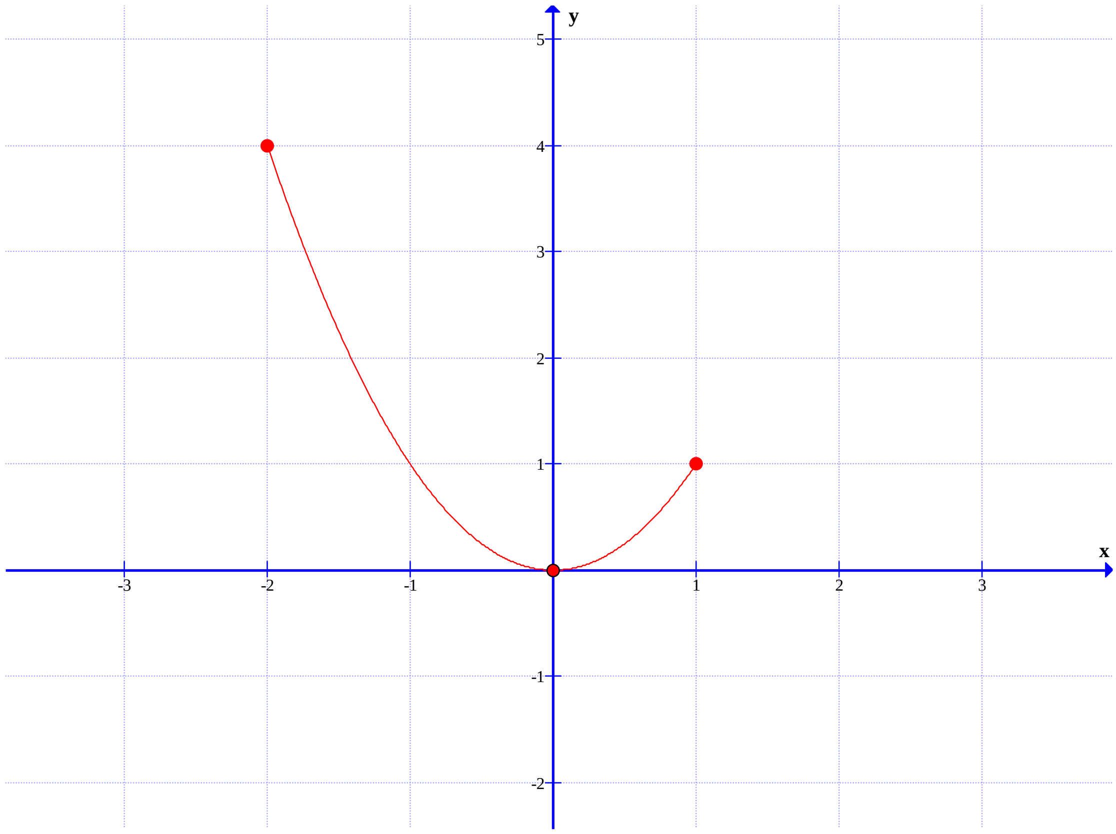
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=(۲x)^۲$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=(\frac{۱}{۳}x)^۲$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

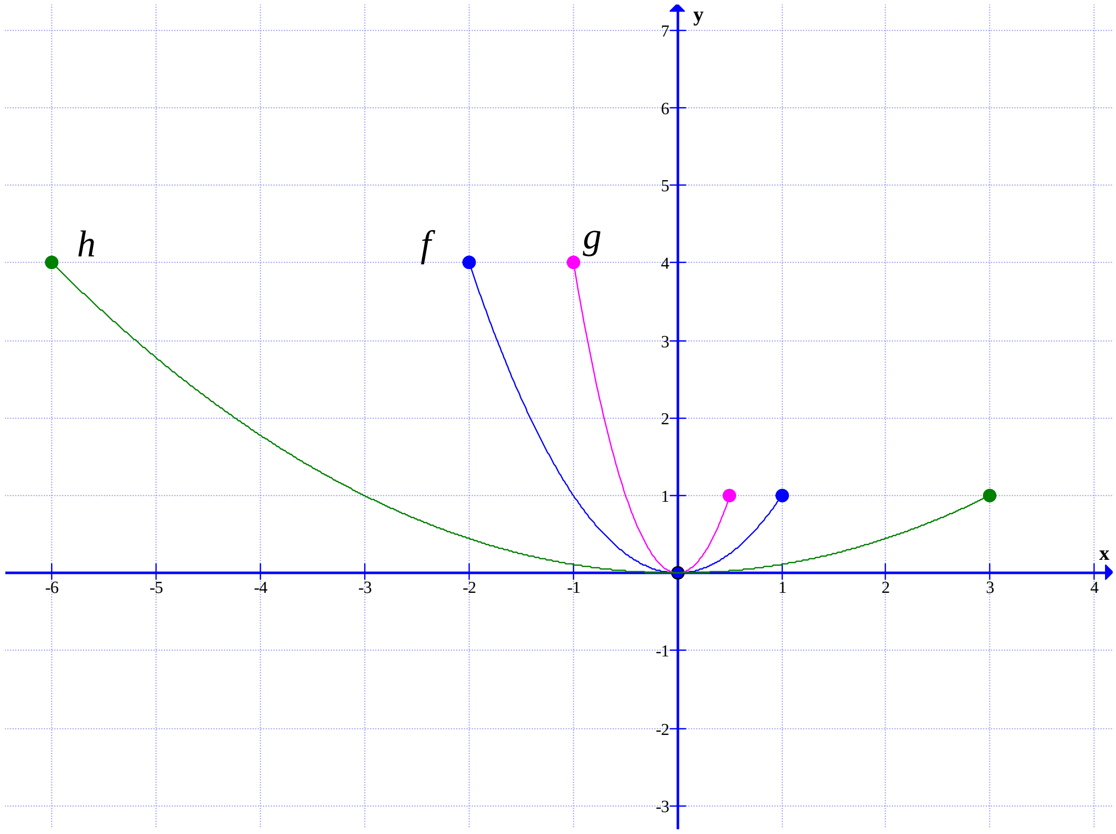
x	-۲	۰	۱
y	۴	۰	۱



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g عرض نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی طول نقاط را در معکوس ضریب x ضرب می کنیم.

g	x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$
	y	۴	۰	۱

h	x	-۶	۰	۳
	y	۴	۰	۱



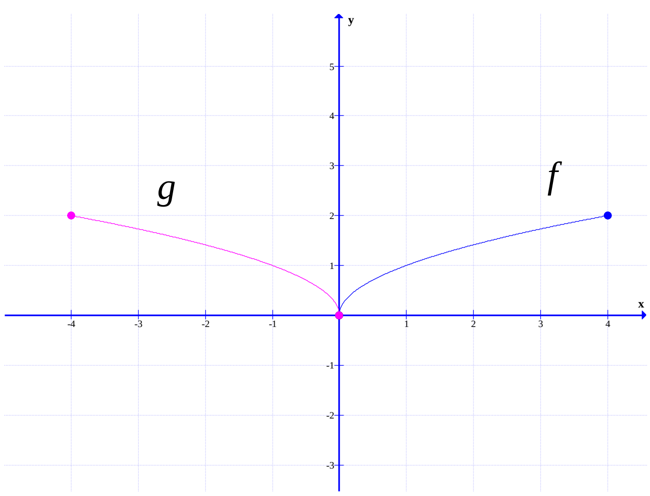
توجه :

۱ : اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = f(-x)$ بـه دسـت مـی آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۶ : نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=\sin 2x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را با همدیگر انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=3f(2x)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{x_0}{2})=3f(2\times\frac{x_0}{2})=3f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0}{2},3y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0,y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=3f(2x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را سه برابر کرده و طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را به همراه انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

مثال الف : برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(2x+1)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{x_0-1}{2})=f(2\times\frac{x_0-1}{2}+1)=f(x_0-1+1)=f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0-1}{2},y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0,y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طول نقاط را ابتدا در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و سپس یک واحد از آن کم کنیم.

مثال ب : اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(۲x)+۱$ تعریف شده باشد. آنگاه

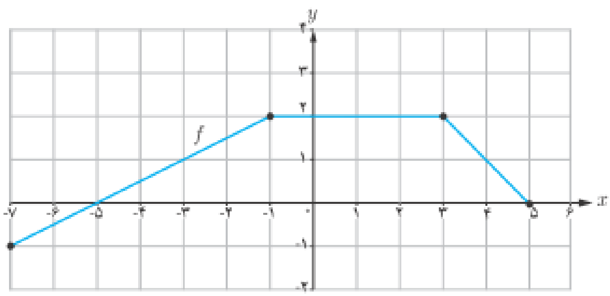
$$g(\frac{x_۰}{۲})=f(۲\times\frac{x_۰}{۲})+۱=f(x_۰)+۱=y_۰$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_۰}{۲},y_۰+۱)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x)+۱$، کافی است، طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و به عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

تمرین ۷ : اگر نمودار تابع f به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $g(x)=f(۲x+۱)$ ب) $h(x)=f(۲x)-۳$ ج) $k(x)=۲f(x)-۱$

***

نتیجه : خلاصه‌ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع $y=f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می شود.

تابع جدید		نحوه‌ی تبدیل	نتیجه
$y=f(x)+k$	طول نقاط ثابت می ماند.	به عرض نقاط k واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می رود.
$y=f(x)-k$		از عرض نقاط k واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می رود.
$y=kf(x)$		عرض نقاط در k ضرب می شود.	اگر $0<k<1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می شود. اگر $k>1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.
$y=f(x+k)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	از طول نقاط k واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می رود.
$y=f(x-k)$		به طول نقاط k واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می رود.
$y=f(kx)$		طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.	اگر $0<k<1$ نمودار در جهت افقی منبسط می شود. اگر $k>1$ نمودار در جهت افقی منقبض می شود.

تمرین برای حل :

۸ : نقطه‌ی $(-۸,۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه بـه چه نقطه ای متناظر می شود.

۱ -۸) $g(x) = f(x) - ۱$

۲ -۸) $g(x) = f(x) + ۲$

۳ -۸) $g(x) = ۳f(x)$

۴ -۸) $g(x) = f(۲x)$

۵ -۸) $g(x) = ۳f(x-۱)$

۶ -۸) $g(x) = ۵f(x+۱) + ۲$

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۲ -۹) $g(x) = ۲ + \sqrt{x-۱}$

۲ -۹) $g(x) = \sqrt{۲+x}$

۲ -۹) $g(x) = \sqrt{۱-x}$

۲ -۹) $g(x) = ۲ + \sqrt{x}$

۲ -۹) $g(x) = \sqrt{۲x+۱} - ۳$

۲ -۹) $g(x) = -۲\sqrt{x}$

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم کنیـد. سـپس بـه کمـک تبـدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

ب) $h(x) = ۲\cos\frac{x}{۳}$

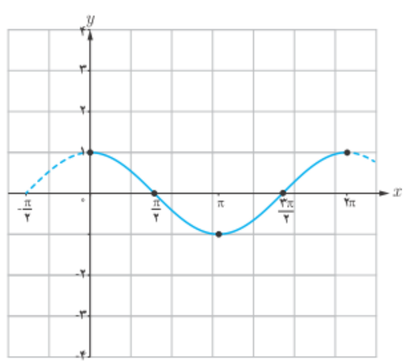
الف) $g(x) = \cos ۲x - ۱$

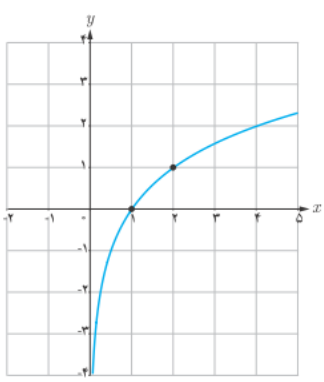
۱۰: در زیر نمودار توابع $y = ۲^x$ و $y = \log_۲^x$ و $y = \cos x$ رسم شده اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

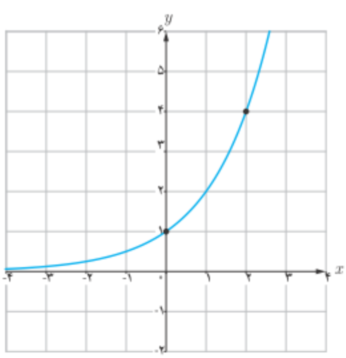
ج) $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$

ب) $y = \log_۲^{x+۲}$

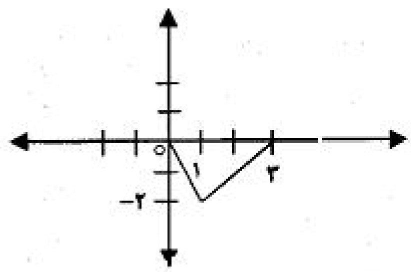
الف) $y = ۲^{x-۱} + ۲$







۱۱ : در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، سپس نمودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۲ : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-۲,۱]$ و برد $[۱,۵)$ را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی های تبدیلات دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $g(x) = ۲f(x-۱) - ۳$

ب) $h(x) = f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@mathameri

سایت :

www.mathtower.ir

درس دوّم : تابع درجه۳ ، توابع یکنوا و تقسیم و بخش پذیری

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع یکنوا می پردازیم و در نهایت تقسیم چندجمله ای ها و ویژگی های آن و همچنین بخش پذیری دو چندجمله ای را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : توابع چند جمله ای و تابع درجه۳

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$f(x)=c$ تابع چندجمله ای از درجه صفر[1]

ب) تابع خطی

$f(x)=ax+b$ تابع چندجمله ای از درجه یک

ج) تابع درجه۲(سهمی)

$f(x)=ax^2+bx+c$ تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تابع چندجمله ای از درجه سه

مثال : نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه‌ی آن را بنویسید.

$$f(x)=x^2(1-x)^3$$

حل :

1 . برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی شود.

$$f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۳}=x^{۲}(۱-۳x+۳x^{۲}-x^{۳})=x^{۲}-۳x^{۳}+۳x^{۴}-x^{۵}$$

این تابع چندجمله ای از درجه‌ی ۵ است.

توجه :

۱ : طبق تعریف توابع چندجمله ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی چندجمله ای محسوب نمی شوند.

۲ : دامنه‌ی هر تابع چندجمله ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.(مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم.)

تمرین ۱ : تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله ای است. درجه‌ی توابع چندجمله ای را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x)=(x-۱)^{۲}+۳$

ب) $f(x)=\dfrac{۲x-۳}{x^{۲}+۵x-۱}$

پ) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵x+۱}$

ت) $f(x)=|x-۲|$

ث) $f(x)=x(۲+x)(۲-x)+۱$

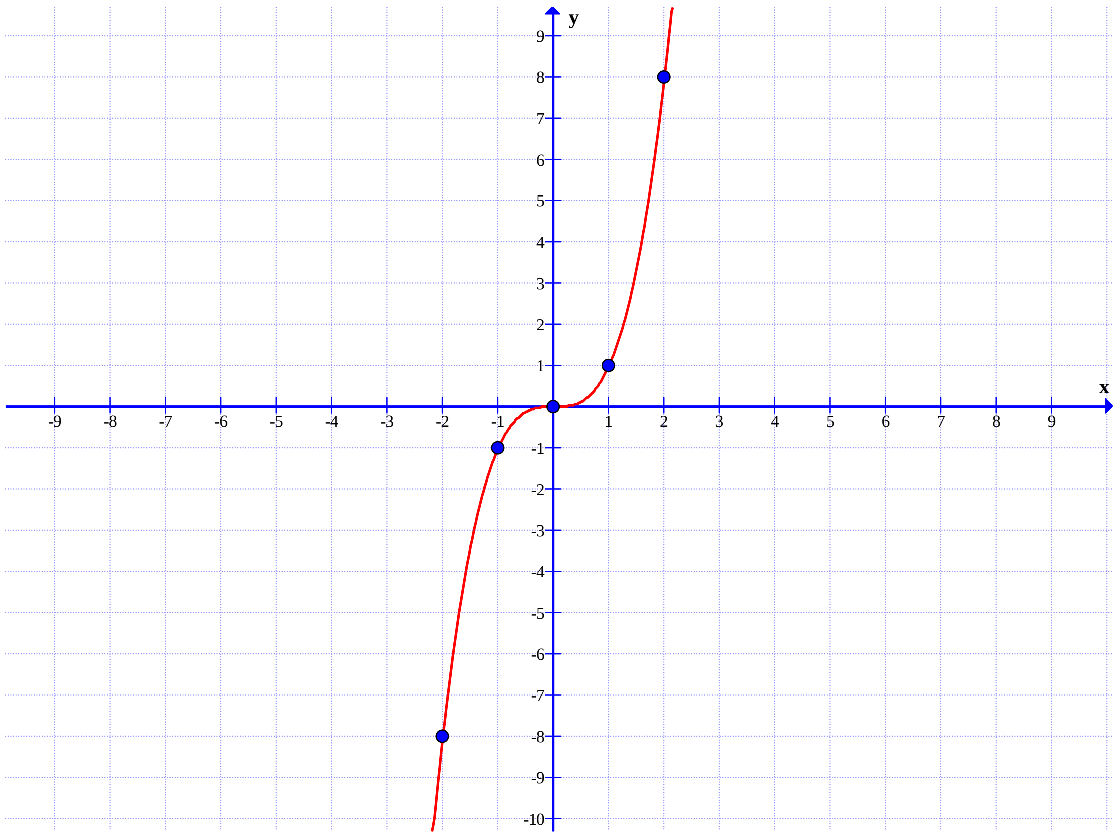
ج) $f(x)=\sin x$

ساده ترین تابع چندجمله ای درجه‌ی۳ به صورت زیر است.

$$f(x)=x^{۳}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸



تمرین۲ : به دو طریق نشان دهید که تابع $f(x)=x^{۳}$ وارون پذیر است. سپس وارون آن را تعیین کنید.

تمرین۳ : به کمک رسم نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابـع زیـر را رسم کنید.

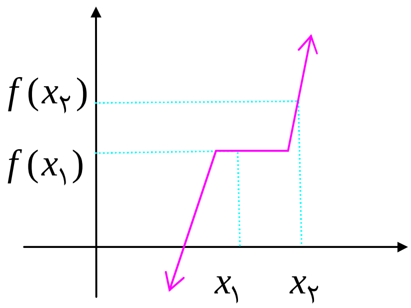
الف) $f(x)=(x+۱)^{۳}$ ب) $f(x)=-x^{۳}+۱$ ج) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$

***

قسمت دوّم : توابع یکنوا

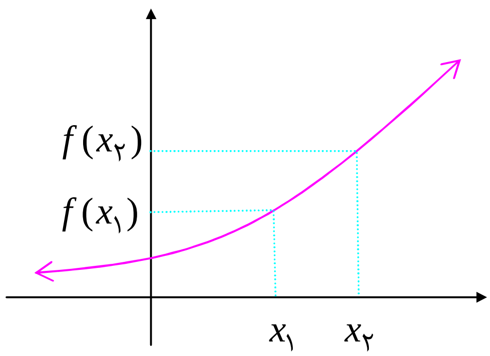
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,;x_1<x_2\to f(x_1)\le f(x_2)$$



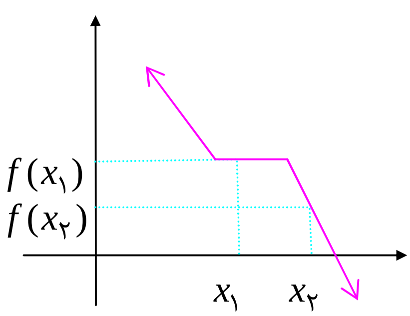
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,;x_1<x_2\to f(x_1)< f(x_2)$$



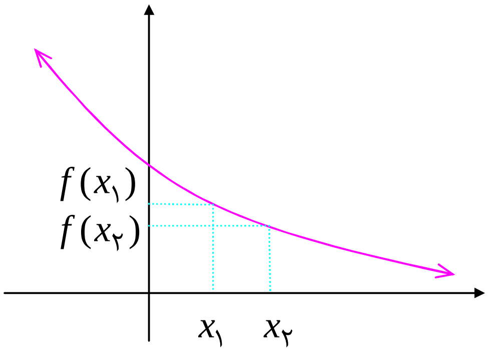
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,;x_1<x_2\to f(x_1)\ge f(x_2)$$



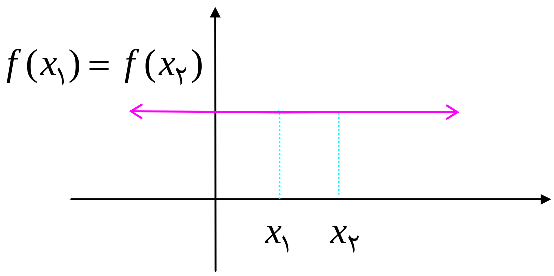
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش ثابت است، هرگاه :

$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است ولی یکنوا نیست.

۳ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

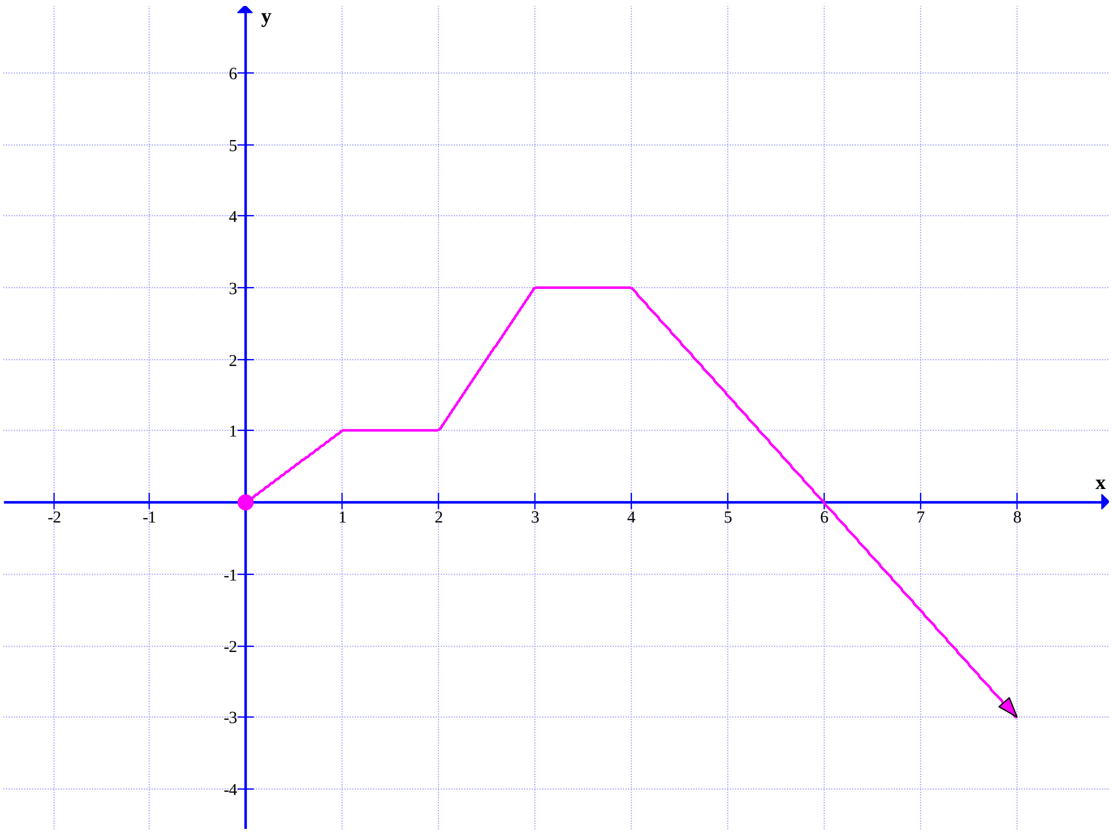
۴ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

تمرین۴ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۱)[۰,۱]	۳)[۱,۴]	۵)[۳,۴]
۲) [۱,۲]	۴)[۳,۶]	۶)[۴,+∞)



تمرین ۵ : صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=[x-۱]$ را در دامنه اش به کمک تعریف بررسی کنید.

حل:

$f(x)=[x]-۱$

$x_۱ < x_۲ \to [x_۱] \le [x_۲] \to [x_۱]-۱ \le [x_۲]-۱ \to f(x_۱) \le f(x_۲) \Rightarrow$ تابع صعودی است.

تمرین۶ : صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف) $y=۲^{x+۱}$ ب) $y=-۳x+۲$

حل:

الف)

$x_۱ < x_۲ \to x_۱+۱ < x_۲+۱ \to ۲^{x_۱+۱} < ۲^{x_۲+۱} \to f(x_۱) < f(x_۲) \Rightarrow$

تابع صعودی اکید است.

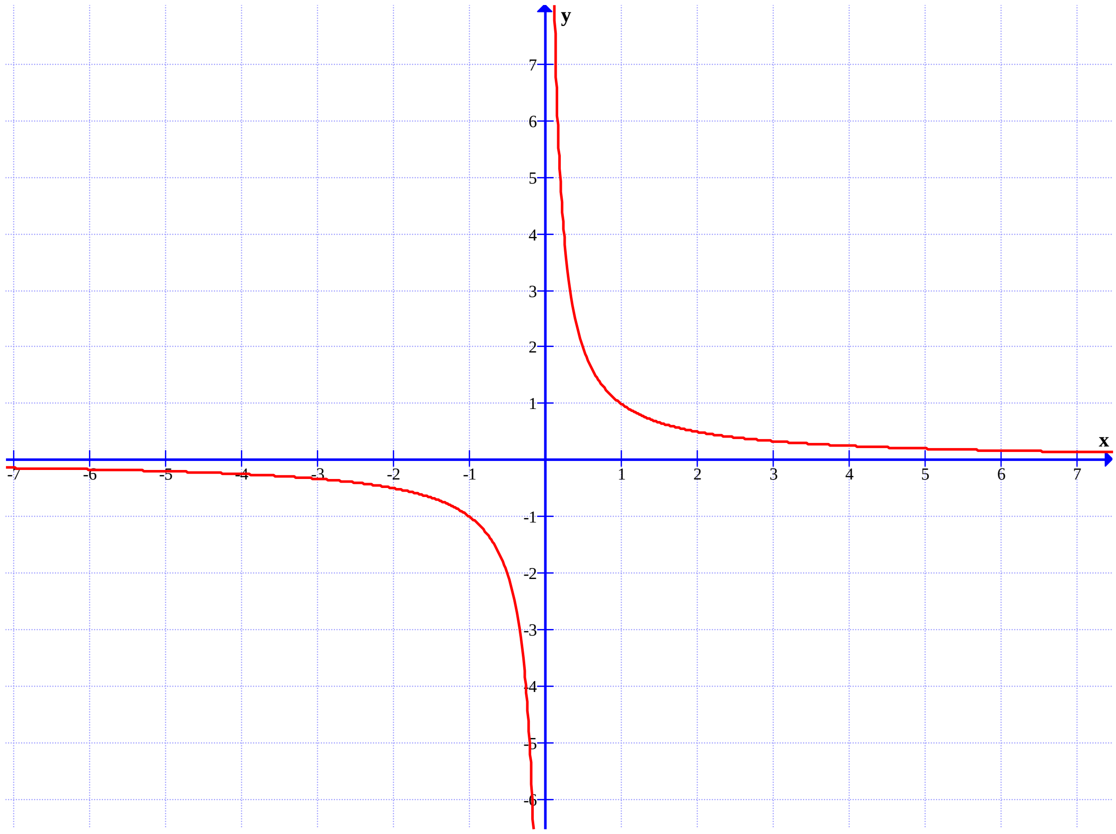
ب)

$x_۱ < x_۲ \to -۳x_۱ > -۳x_۲ \to -۳x_۱+۲ > -۳x_۲+۲ \to f(x_۱) > f(x_۲) \Rightarrow$

تابع نزولی اکید است.

توجه : اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنـوایی آن(صـعودی و نزولـی بـودن) آن بررسی نمی شود.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع $R-\{۰\}$ است. همچنین این تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف : تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید است.

ب : تابع در فاصله‌ی $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است.

ج : تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱]-\{۰\}$ ، نه صعودی و نه نزولی است.

د : صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً $[-۱,۱]$ بررسی نمی شود.

تمرین۷ : ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

مثال : تابع $y=۲^{x+۱}$ صعودی اکید و تابع $y=-۳x+۲$ نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

تمرین برای حل :

۸ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله ای صعودی ، در چه فاصله ای نزولی و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف) $f_۱(x) = |x+۲|-۳$

ب) $f_۲(x) = -x^۲ - ۶x + ۱۰$

ج) $f_۳(x) = \sqrt{۱-x}$

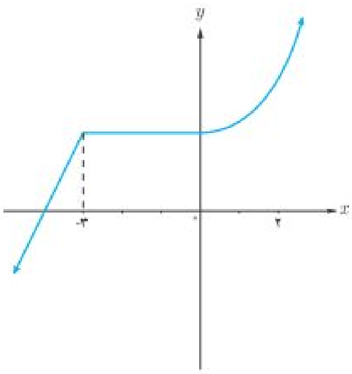
د) $f_۴(x) = |۱+x| + |۱-x|$

۹ : نمودار هر یک از توابع زیر را را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله ای صعودی و در چه فاصله ای نزولی است و در چه فاصله ای ثابت است؟

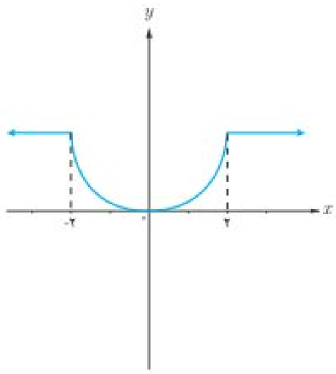
الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq -۱ \\ ۲ & x < -۱ \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} x^۲ & x < -۲ \\ ۴ & -۲ \leq x \leq ۱ \\ -x^۲ - ۲ & x > ۱ \end{cases}$

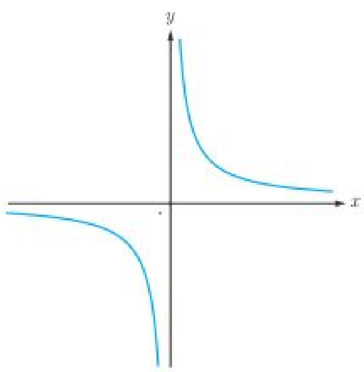
۱۰ : نمودار توابع f و g و h در زیر رسم شده اند.



$y=f(x)$



$y=g(x)$



$y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله هایی اکیداً نزولی است؟

۱۱ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود، اکیداً یکنوا است؟

الف) $f(x) = \sqrt{۲-x}$

ب) $g(x) = ۲^{-x}$

ج) $h(x) = \log_۲^x$

۱۲ : تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ج) ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۳ : آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد؟

۱۴ :

الف : اگر تابع f در یک فاصله اکیداّ صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب : اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۱۵: اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای $f-g$ می توان گفت؟

:۱۶

الف) فرض‌کنید تابع f در یک بازه اکیداً صعودی باشد و bو a متعلق به این بازه باشند.اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\le b$

ب) اگر $\log(x+۱)\le\log(۲x-۳)$، حدود x را به دست آورید.

:۱۷

الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداّ نزولی باشد و b و a متعلق به این بازه باشند.اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴}\le(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را به دست آورید.

❊❊❊

قسمت سوّم : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ که درجه‌ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $B(x)$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

$$\begin{array}{c|l} \text{مقسوم} & \text{مقسوم علیه} \\ A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x)\ \text{خارج قسمت} \\ \cline{1-1} R(x)\ \text{باقی مانده} & \end{array}$$

مرحله‌ی اوّل : ابتدا چند جمله ای های مقسوم ($A(x)$) و مقسوم علیه ($B(x)$) را استاندارد می کنیم.

مرحله‌ی دوّم : اوّلین جمله‌ی مقسوم را بر اوّلین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند.) و حاصل را به عنوان اوّلین جمله‌ی خارج قسمت قرار می دهیم.

مرحله‌ی سوّم : خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اوّلین باقی مانده را نتیجه می دهد.

مرحله‌ی چهارم: مانند مرحله‌ی دوّم ، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

توجه : مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-3x^2+3x^3+x^5+3x-5)\div(1+x^2)$$

حل : ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می کنیم.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+3x^3-3x^2+3x-5 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 \pm x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3+2x-3 \\
2x^3-3x^2+3x-5 & \\
\underline{-2x^3 \pm 2x} \qquad\qquad & \\
-3x^2+x-5 & \\
\underline{\mp 3x^2 \mp 3} \quad & \\
x-2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\[2ex]
\dfrac{2x^3}{x^2}=2x \\[2ex]
\dfrac{-3x^2}{x^2}=-3
\end{array}
$$

تمرین ۱۷ : تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

1) $(x^2-5x-1)\div(x-3)$

2) $(3x^2+2x^3-4x-1)\div(x-1)$

3) $(x^4-5x^2-1+7x)\div(-2+x)$

4) $(x^5+1)\div(x^3+x^2-1)$

5) $(x^3+x^2y-2y^3-xy^2)\div(x+y)$

تمرین۱۸ : مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر ۶ شود.

قضیه‌ی تقسیم

اگر چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ا ی غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{c|c}
A(x) & B(x) \\ \cline{2-2}
\cdots & Q(x) \\ \cline{1-1}
R(x) &
\end{array}
$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)+R(x)$$

$$\deg(R(x))<\deg(B(x))$$

مثال : تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^3+x^2+6x+1)\div(2+x)$$

حل:

$$\begin{array}{r|l}
-x^3+x^2+6x+1 & x+2 \\ \cline{2-2}
{}_{+}x^3 -_{+}2x^2 \qquad\quad & -x^2+3x \\ \cline{1-1}
3x^2+6x+1 & \\
{}_{-}3x^2 +_{-}6x \quad & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\dfrac{-x^3}{x}=-x^2 \\[2ex]
\dfrac{3x^2}{x}=3x
\end{array}$$

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^2+3x)(x+2)+1=-x^3-2x^2+3x^2+6x+1=-x^3+x^2+6x+1$$

تمرین۱۹: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم x^2+kx+1 بر $x+1$ برابر ۵ شود.

تمرین۲۰ : مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای های $3x^2-4x+2$ و kx^3+2x^2-x در تقسیم بر $x+1$ هم باقی مانده شوند.

بخش پذیری در چند جمله ای ها

چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای $B(x)$بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود[2]. در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{r|l}
A(x) & B(x) \\ \cline{2-2}
\cdots & Q(x) \\ \cline{1-1}
R(x) &
\end{array}$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)$$

تمرین۲۱ : نشان دهید که $3x^4+5x^3+6x^2-5+7x$ بر $3x+5$ بخش پذیر است.

تمرین۲۲ : نشان دهید که عبارت $4x^5-3x^2+x-2$ بر $x-1$ بخش پذیر است.

تمرین۲۳ : مقدار k را طوری بیابید که $4x^2+kx+2$ بر $x+1$ بخش پذیر شود.

---

2. چند جمله ای $B(x)$ را عامل $A(x)$ نیز می نامند.

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\times(x-a)+R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x=a$

$$\Rightarrow P(a)=Q(a)\times\underbrace{(a-a)}_{\cdot}+R(a)\rightarrow P(a)=R(a)$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین ۲۴ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳x^۲-۵x+۴$ بر $x-۱$ را حساب کنید.

تمرین ۲۵ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲x^۸-۵x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب کنید.

تمرین ۲۶ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ را حساب کنید. $(a\neq ۰)$

حل :

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R(x)$$

$$\rightarrow P(x)=a(x+\frac{b}{a})Q(x)+R(x)$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} P(-\frac{b}{a})=a\underbrace{(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a})}_{\cdot}Q(-\frac{b}{a})+R(-\frac{b}{a})$$

$$\rightarrow P(-\frac{b}{a})=R(-\frac{b}{a})$$

یعنی برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ کافی است ریشه‌ی $ax+b$ را در عبارت $P(x)$ جایگزین کنیم.

نتیجه : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر $P(-\frac{b}{a})$ است.

تمرین ۲۷ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)=۴x^۳+۲x^۲-۳x+۵$ بر $۲x+۳$ را حساب کنید.

تمرین برای حل :

۲۸ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳x^{۲} - ۲x - ۸$ بر $x - ۲$ را حساب کنید.

۲۹ : مقدار m را طوری بیابید که $P(x) = x^{۲} + mx - ۲$ بر $x - ۳$ بخش پذیر باشد.

۳۰ : نشان دهید که $P(x) = x^{۴} - ۱۶$ بر $x - ۲$ بخش پذیر است.

۳۱ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^{۳} + x - ۲$ بر $۲x + ۱$ را حساب کنید.

۳۲ : مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش پذیر باشد.

***

قسمت چهارم : معرفی چند اتحاد دیگر

در این جا در پی آن هستیم که چند اتحاد مفید دیگر را ارائه کنیم. در سال های قبل به یاد دارید که :

$$x^{۲} - a^{۲} = (x - a)(x + a)$$

$$x^{۳} - a^{۳} = (x - a)(x^{۲} + ax + a^{۲})$$

اکنون می خواهیم این اتحاد ها را تعمیم دهیم. برای این کار تمرین زیر را انجام دهید.

تمرین ۳۳ : از تقسیم $x^{۴} - a^{۴}$ بر $x - a$ نشان دهید که

$$x^{۴} - a^{۴} = (x - a)(x^{۳} + ax^{۲} + a^{۲}x + a^{۳})$$

نتیجه : برای هر عدد طبیعی n عبارت $x^{n} - y^{n}$ بر $x - y$ بخش پذیر است. همچنین :

$$x^{n} - y^{n} = (x - y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + ... + xy^{n-۲} + y^{n-۱})$$

تمرین ۳۴ : عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^{۵} - ۱$

ب) $x^{۶} - ۶۴$

تمرین ۳۵ : اگر n فرد باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

حل : اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x-(-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \ldots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n فرد است لذا، $n-1$ زوج می باشد و .... . پس :

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

تمرین ۳۶ : عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^7 + 128$$

حل :

$$A = x^7 + 128 = x^7 + 2^7$$

$$= (x+2)(x^6 - x^5(2) + x^4(2)^2 - x^3(2)^3 + x^2(2)^4 - x(2)^5 + (2)^6)$$

$$= (x+2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

تمرین ۳۷ : اگر n زوج باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

حل : اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x-(-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \ldots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n زوج است لذا، $n-1$ فرد می باشد و ..... پس :

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

تمرین۳۸ : عبارت زیر را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

$$A = x^4 - 16$$

توجه : اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد. به کمک اتحادهای فوق داریم:

الف :

$$a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + a^{n-۳} + a^{n-۴} + ... + a^۲ + a + ۱)$$

مثال :

$$x^۷ - ۱ = (x-۱)(x^۶ + x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)$$

ب : در حالتی که n فرد باشد.

$$a^n + ۱ = (a+۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + a^{n-۳} - a^{n-۴} + ... + a^۲ - a + ۱)$$

مثال :

$$x^۷ + ۱ = (x+۱)(x^۶ - x^۵ + x^۴ - x^۳ + x^۲ - x + ۱)$$

مثال : عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^۷ - x^۳$$

حل :

$$A = x^۷ - x^۳ = x^۳(x^۴ - ۱) = x^۳(x-۱)(x^۳ + x^۲ + x + ۱)$$

تمرین برای حل :

۳۹ : عبارت $x^۶ - ۱$ را طوری تجزیه کنید که $x - ۱$ یک عامل آن باشد.

۴۰ : عبارت $x^۶ - ۱$ را طوری تجزیه کنید که $x + ۱$ یک عامل آن باشد.

۴۱ : عبارت $x^۵ + ۳۲$ را طوری تجزیه کنید که $x - ۲$ یک عامل آن باشد.

۴۲ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $x^۵ - y^۵ =$

۲) $x^۴ - y^۴ =$

۳) $۱ - x^۶ =$

۴) $x^۵ - ۳۲y^۵ =$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@mathameri

سایت :

www.mathtower.ir