فصل

۵ کاربرد مشتق

مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنهٔ این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

درس اوّل — **اکسترمم‌های تابع**

درس دوم — **بهینه‌سازی**

درس اول

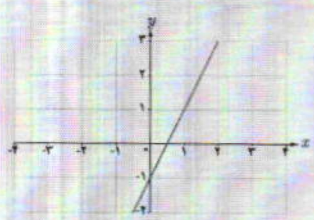
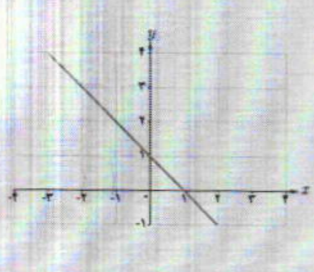
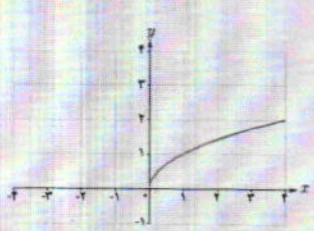
اکسترمم‌های تابع

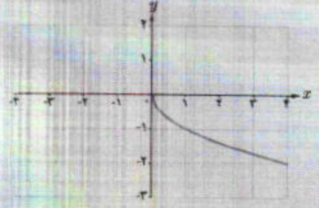
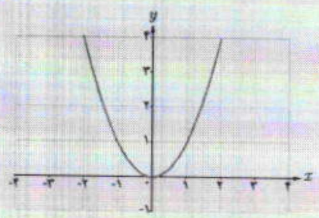
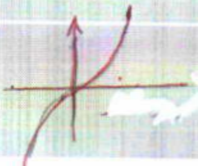
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

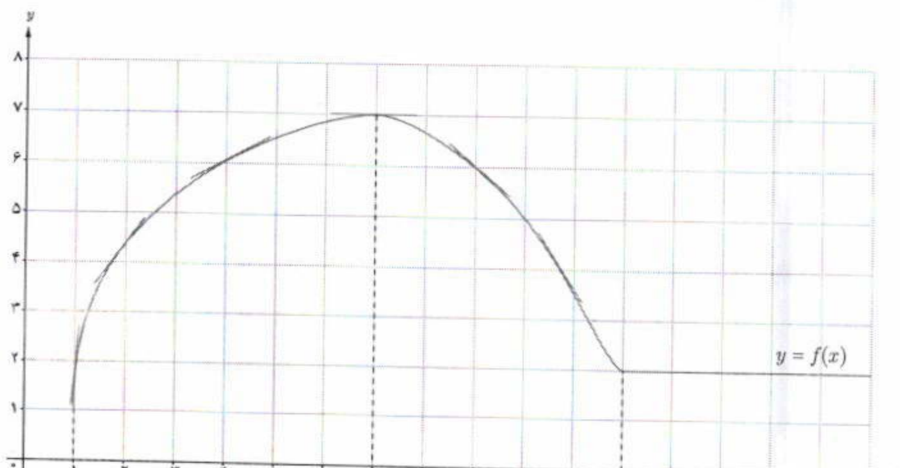
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x)=2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x)=2x-1$
g' همواره منفی است	$g'(x)=-1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است		$g(x)=-x+1$
h' در $(0,+\infty)$ مثبت است	$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع h در $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=\sqrt{x}$

$u(x) = -\sqrt{x}$		تابع u در $[\circ , +\infty)$ اکیداً نزولی است	$u'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$	u' در $(\circ , +\infty)$، همواره منفی
$k(x) = x^2$		تابع k در $(-\infty , \circ)$ اکیداً نزولی و در $(\circ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.	$k'(x) = 2x$	k' در $(-\infty,\circ)$ منفی و در $(\circ,+\infty)$ k' مثبت است. +
$l(x) = x^3$		تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی	$l'(x) = 3x^2$	l' در $(-\infty,\circ)$ مثبت و در $(\circ,+\infty)$ نیز مثبت است.

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید :



ملاحظه می‌شود که :

الف) در بازهٔ $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.

ب) در بازهٔ $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، منفی است؛ بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر صفر است.

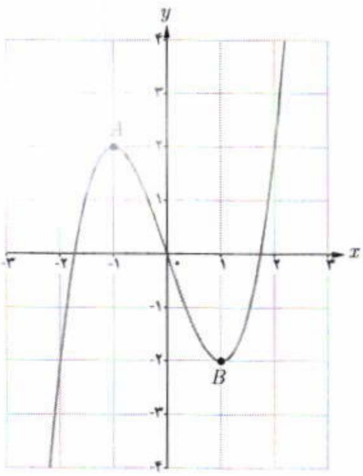
مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن‌را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال[1] : تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
بازه		$(-\infty , -۱)$		$(-۱ , ۱)$		$(۱ , +\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	-۲	اکیداً صعودی ↗	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید. درنقطه $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$ ماکزیمم و در نقطه $B\left|\begin{matrix}۱\\ -۲\end{matrix}\right.$ مینیمم وجود دارد

اکسترمم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱− و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

نقاط بحرانی تابع

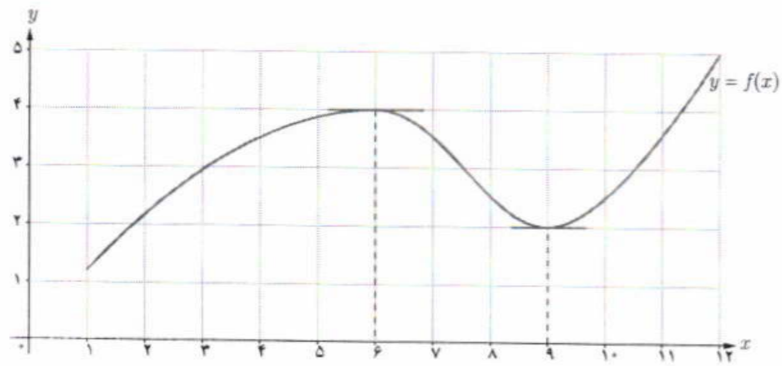
حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنهٔ تابع f باید به دنبال اکسترمم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از **نقاطی از دامنهٔ f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است**. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم :

تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ در نقاط B، C و D مشتق‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول ۲-، صفر و ۲ که جزو نقاط دامنهٔ f هستند، در دامنهٔ f' نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x) = -x^۲ - ۱$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(۰) = ۰$. بنابراین نقطهٔ $B(۰ , -۱)$، نقطهٔ بحرانی تابع g است.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

$$f'(۶) = ۰ \quad , \quad f'(۹) = ۰$$

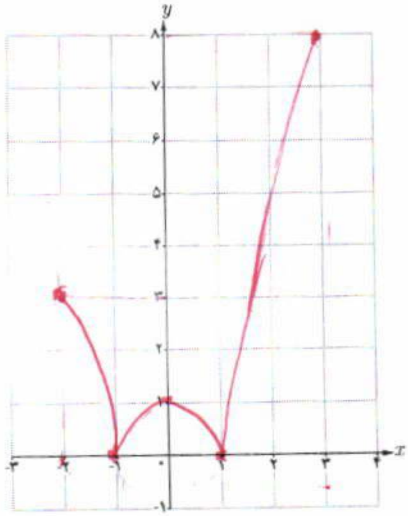


این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

قضیه فرما[۱] : اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = ۰$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

۱ــ Pierre de Fermat (۱۶۰۱ ــ ۱۶۶۵)

فعالیت



تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در بازهٔ $[-۲ , ۳]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید. در ۱ و -۱، min نسبی و مطلق دارد.
در ۰ Max نسبی دارد. در ۳، Max مطلق دارد.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوستهٔ $f(x) = |x^۲ - ۱|$ در بازهٔ بستهٔ $[-۲ , ۳]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیهٔ فوق، تنها وجود اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ به شرح زیر است:

۱ــ مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
۲ــ مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
۳ــ در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a , b]$ است.

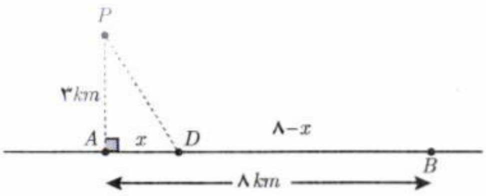
مثال: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱ , ۳]$ تعیین کنید.
حل: ابتدا به کمک f'، نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲$$
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \notin [-۱, ۳] \\ x = ۱ \ \text{نقطهٔ بحرانی} \end{cases}$$

علاوه بر نقطهٔ بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به‌دست می‌آوریم که در جدول مقابل آمده است.

x	-۱	۱	۳
$f(x)$	۱۳	-۷	۴۵

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازهٔ $[-۱ , ۳]$ برابر ۴۵ و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -۷ است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.



مثال ۵ : آرمان درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B درساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟

حل : نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطهٔ $x=vt$ یا معادل آن $t=\frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین :

زمان پارو زدن مسیر P تا D : $t_۱=\frac{PD}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}$

زمان پیاده‌روی مسیر D تا B : $t_۲=\frac{DB}{۴}=\frac{۸-x}{۴}=۲-\frac{۱}{۴}x$

زمان کل رسیدن از P به B : $t=t_۱+t_۲$

$$t(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}+(۲-\frac{۱}{۴}x) \qquad x\in[۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۹\Rightarrow x=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳(\text{km})$$

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است :

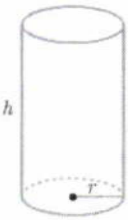
x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		−	۰	+	
$t(x)$ برحسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴}\simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲}\simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل : باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



$1(\text{lit}) = 1000\text{cm}^3$ حجم استوانه

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده $= S$: مساحت کل استوانه

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

$S'(r) = -\frac{2000}{r^2} + \cancel{4}\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{2\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$

$S(r) = \frac{2000}{\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}} + 2\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2} = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

حجم در باز $S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$

$S'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

$S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل : اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم :

هزینه t ساعت حرکت: $C = 800000t + (320v^2)t$

هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$C'(v) = 0 \Rightarrow -\frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \Rightarrow +800000 = 320v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{800000}{320} = 25000$

$v = \pm\sqrt{25000}$ $\quad C'(v) = \frac{320v^2 - 800000}{v^2} = 0$

v	$-\infty$		$-\sqrt{25000}$		0		$\sqrt{25000}$	
$C'(v)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$C(v)$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان

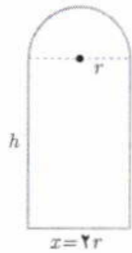
$$\begin{array}{c|ccc} y & & -5 & \\ \hline p'(y) & - & 0 & + \\ & \searrow & \min & \nearrow \end{array}$$

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. $x-y=10 \rightarrow x=10+y$

$P = xy = y(10+y) = y^2+10y \qquad P' = 2y+10 \qquad P'=0 \rightarrow y=-5 \qquad x = 10+(-5)=5$

۴ دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای برروی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت پنجره : $S =$ مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره

$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$

با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

$S'(r) = -2r\left(\frac{\pi+4}{2}\right) + \frac{9}{2} \qquad S'(r)=0 \Rightarrow$

$-r(\pi+4) = -4{,}5 \rightarrow r = \frac{4{,}5}{\pi+4}$

S نسبت به r درجه دوم است.

$$\begin{array}{c|ccc} r & & \frac{4{,}5}{\pi+4} & \\ \hline S'(r) & + & 0 & - \\ & \nearrow & \max & \searrow \end{array}$$

دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس: ۱۳۱۷، مساحت: ۲/۵ هکتار)

تمرین

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

$C(x) = 2x \times 2000000 + 2y \times 8000000$

$C(x) = 4000000x + 16000000(\frac{10000}{x})$

$C'(x) = 4 \times 10^6 - \frac{16 \times 10^{10}}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16 \times 10^{10}}{4 \times 10^6}$

$x = 2 \times 10^2 = 200 \qquad y = \frac{10000}{200} = 50$

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

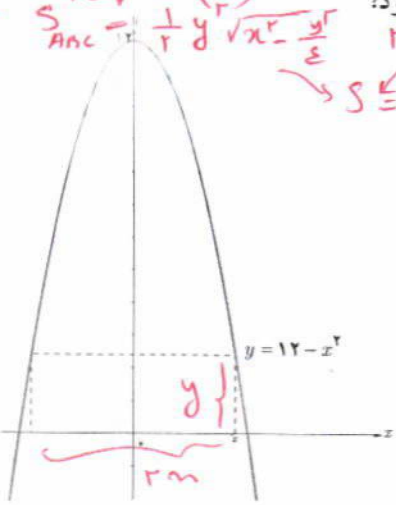
$AH = \sqrt{x^2 - (\frac{y}{2})^2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$

$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$

$S = \frac{1}{2}(100 - 2x)\sqrt{x^2 - \frac{(100-2x)^2}{4}} \rightarrow S'(x) = 0$

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



$S = (2x)y = 2x(12 - x^2)$

$S(x) = 24x - 2x^3$

$S'(x) = 24 - 6x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

۴ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه 2cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

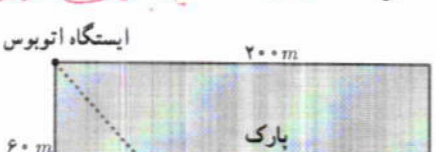
$xy = 32 \qquad y = \frac{32}{x}$

$S = (x+2)(y+4) = (\frac{32}{x} + 4)(x+2)$

$S(x) = 4x + \frac{64}{x} + 40 \rightarrow S'(x) = 4x^2 - 64 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \quad x = 4 \rightarrow y = 8$

$S = 6 \times 12 = 72$ حداقل

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان