



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



ماهواره طلوع



ماهواره امید



ماهواره صدا



ماهواره بر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق پذیری و پیوستگی

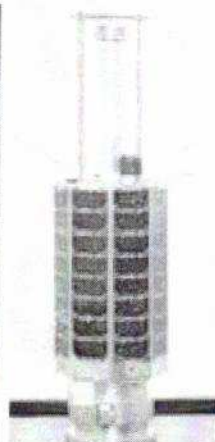
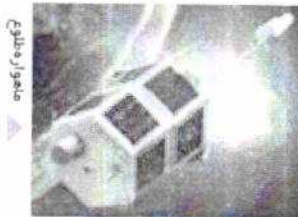
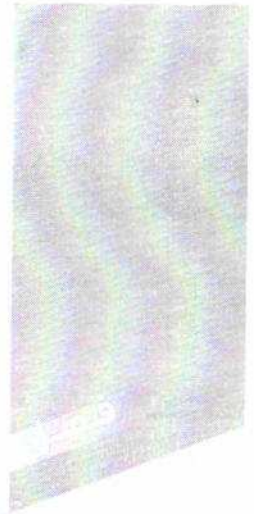
آهنگ تغییر

درس اول

درس دوم

درس سوم

مشق



ماهور بهر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق پذیری و پیوستگی

آهنگ تغییر

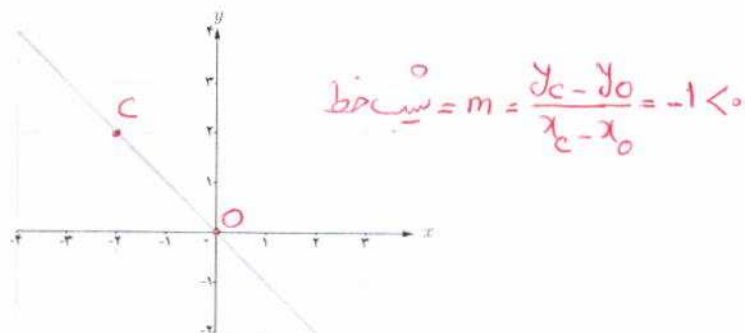
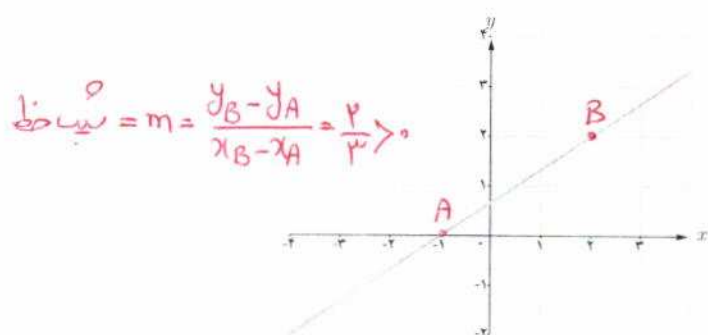


درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

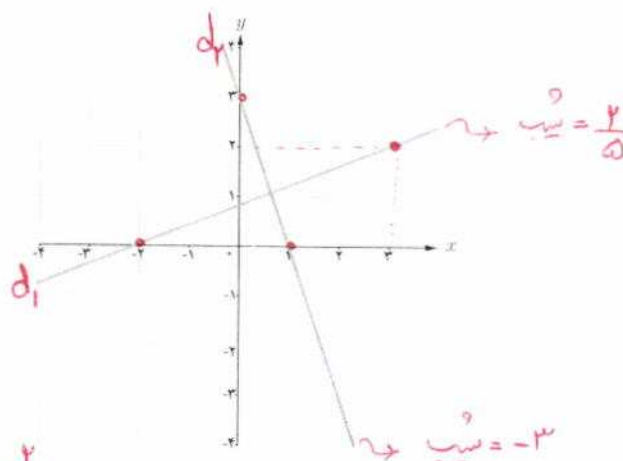
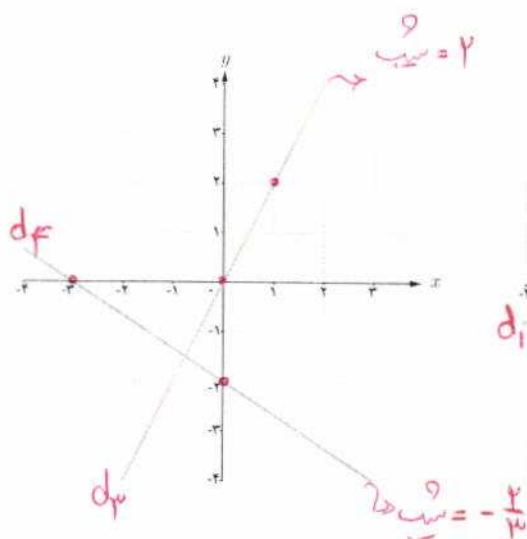
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$

با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 , d_2 , d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

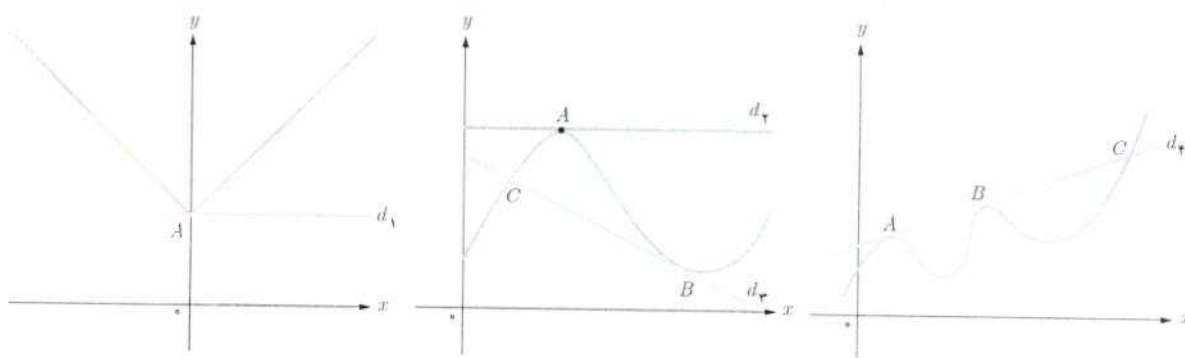




خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_1 در نقطه A ، خط d_2 در نقطه B و خط d_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_4 و d_5 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



خواندنی

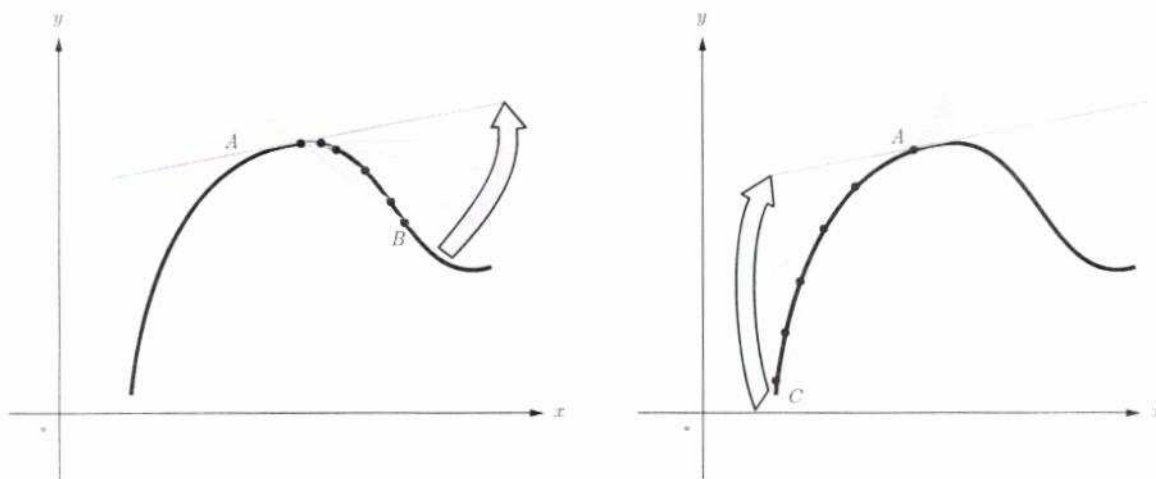
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیم‌ها و مینیم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ **خط مماس بر منحنی در نقطه A**

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف تابع $f(x) = -x^2 + 1$ داده شده است. اگر $0 \leq x \leq 1$ نقاط $E(3, f(3))$ و $D(4, f(4))$ ، $C(5, f(5))$ ، $B(6, f(6))$ ، $A(2, f(2))$ از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

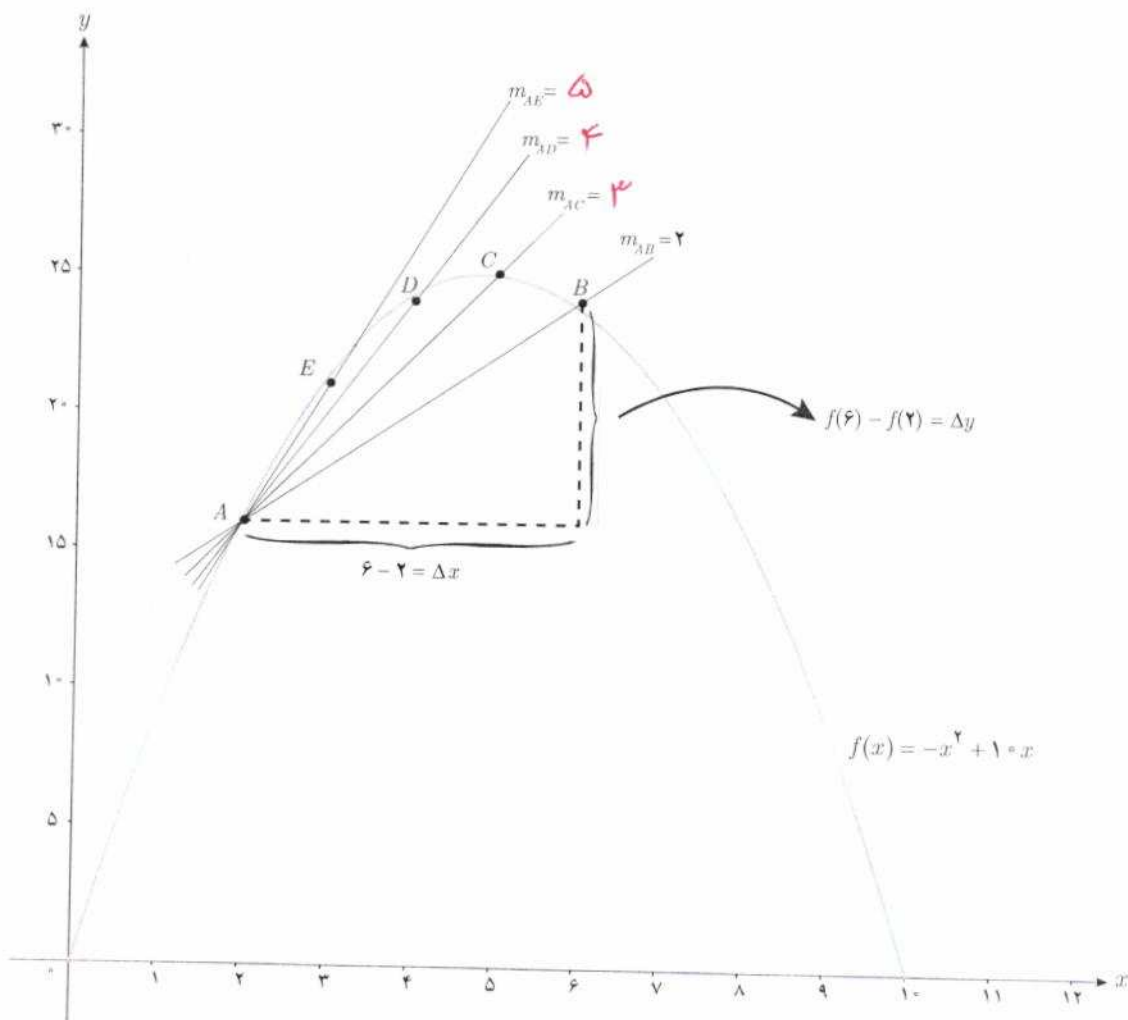
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 14}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 14}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 14}{1} = 7$$

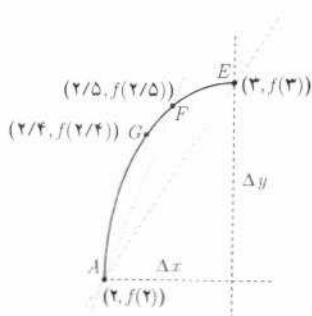


همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δx و Δy نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟ *لوحیات و کوچه های شون*

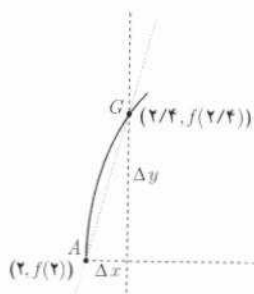
$[2, 6]$	2 ————— 6	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	2 ————— 5	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	2 ————— 4	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	2 ————— 3	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/75 - 16}{0/5}$$

$$= \frac{2/75}{0/5} = 5/5$$



$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{18/24 - 16}{0/4}$$

$$= \frac{2/24}{0/4} = 5/4$$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = -x^3 + 1 \cdot x$ در فاصله $[2, 3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. بازه $[a, b]$

$$[2, 2/4] \quad \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{18/24 - 16}{0/4} = \frac{2/24}{0/4} = 5/6$$

$$[2, 2/3] \quad \frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{17/27 - 16}{0/3} = \frac{1/27}{0/3} = 5/7$$

$$[2, 2/2] \quad \frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/16 - 16}{0/2} = \frac{1/16}{0/2} = 5/8$$

$$[2, 2/1] \quad \frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/59 - 16}{0/1} = \frac{0/59}{0/1} = 5/9$$

$$[2, 2/0.1] \quad \frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.599 - 16}{0/0.1} = \frac{0/0.599}{0/0.1} = 5/99$$

$$[2, 2/0.01] \quad \frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.5999 - 16}{0/0.01} = \frac{0/0.5999}{0/0.01} = 5/999$$

⋮

$$[2, 2+h]$$

(h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ? = 5$$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 1 \cdot 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6 \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{صفر نزدیک شود، یعنی داریم:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:}$$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \circ (3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 + h - 21}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4 \end{aligned}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

$$A \text{ نقطه} \quad f'(2) = 6 = \text{شیب خط مماس در نقطه } A$$

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$



معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه ای به طول ۲- بنویسید.

$$\begin{aligned} \text{شیب خط} \quad f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4 \end{aligned}$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

مثال: اگر $f'(2)$ ، $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ را از دستور بالا به دست آورید:

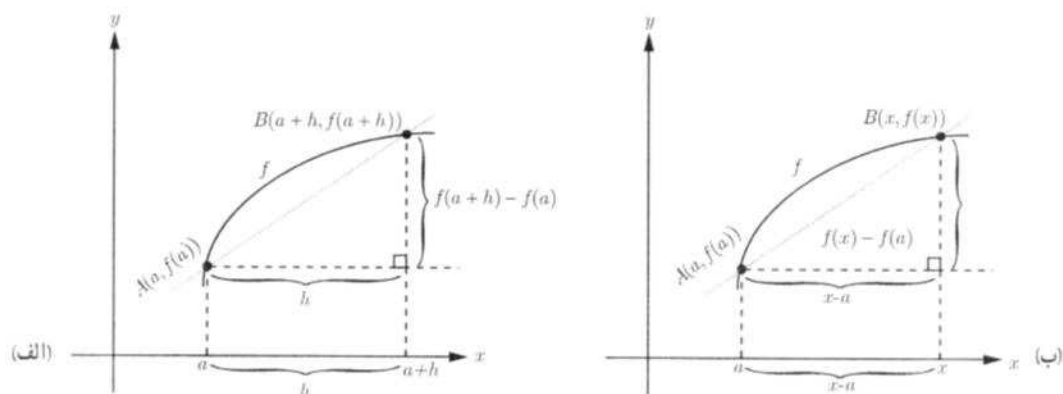
$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 \circ (2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 2 + \Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6 \end{aligned}$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی} \text{ شیب خط مماس} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت

$$\text{دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h}$$

روش اول:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

روش دوم:

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 14}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x-2) = -4$$

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 10x - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} -(x-5) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} -(x-5) = 0$$

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(1)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. نقاط F و A .

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

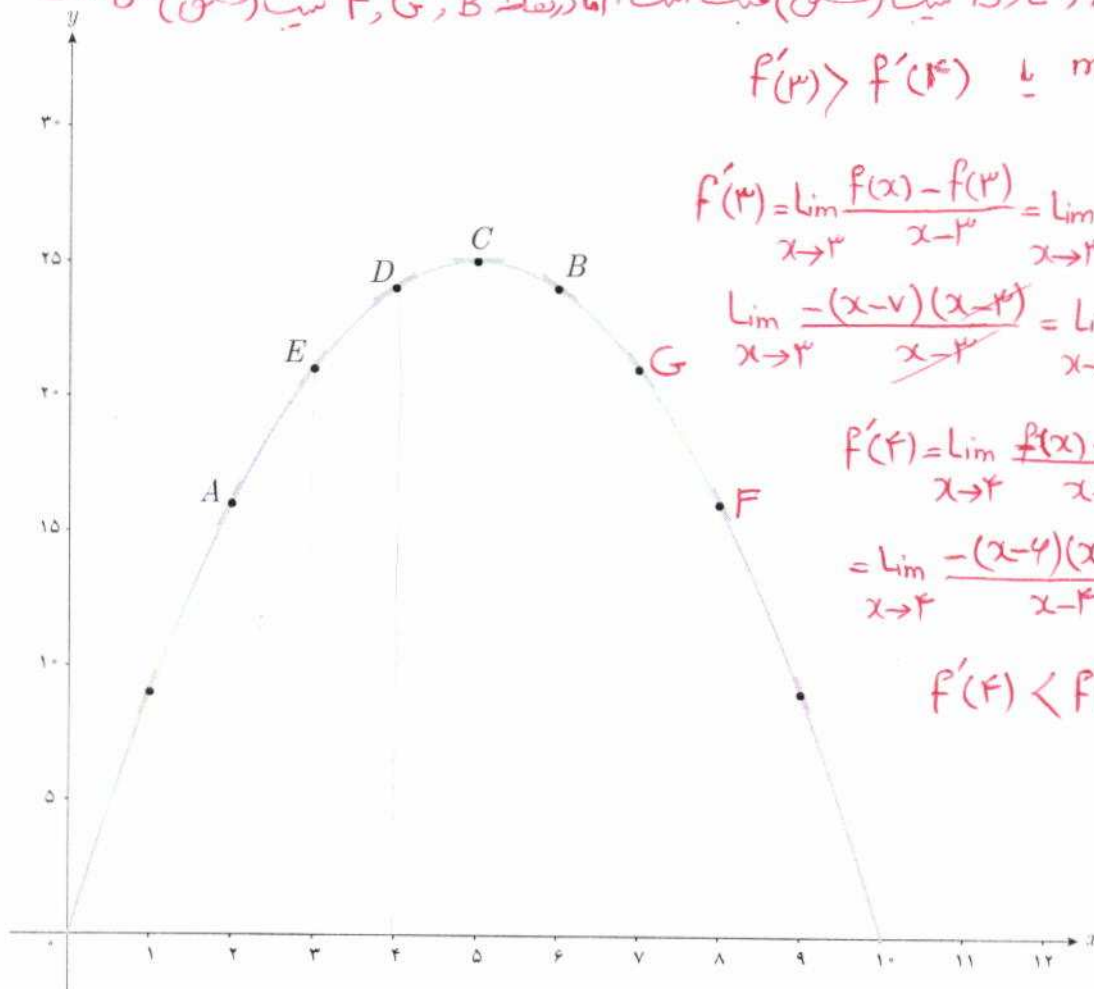
نقاط A, E, D, C, B, G, F روی منحنی است. اما در نقاط F, G, B شیب (مشتق) منفی است.

$$f'(3) > f'(4) \quad \text{یا} \quad m_E > m_D$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 10x - 21}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x-7)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x-7) = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x-6)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} -(x-6) = 2$$

$$f'(4) < f'(3) \quad \text{شیب}$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

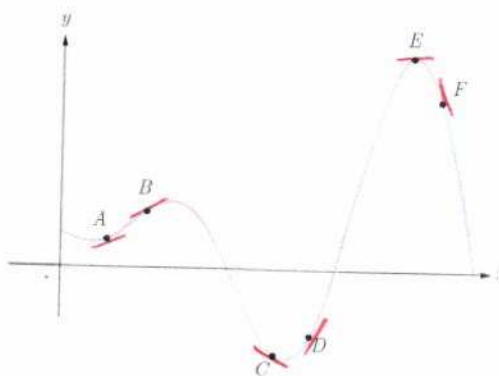
$$y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11 \quad \text{معادله خط مماس}$$

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

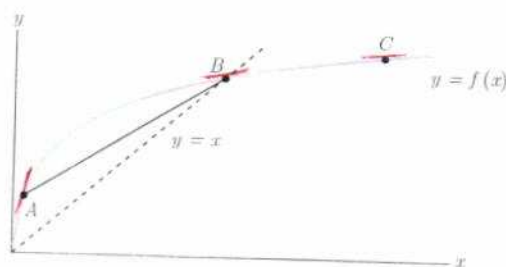
اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



m_1 (الف) شیب نمودار در نقطه A

m_2 (ب) شیب نمودار در نقطه B

m_3 (پ) شیب نمودار در نقطه C

m_4 (ت) شیب خط AB

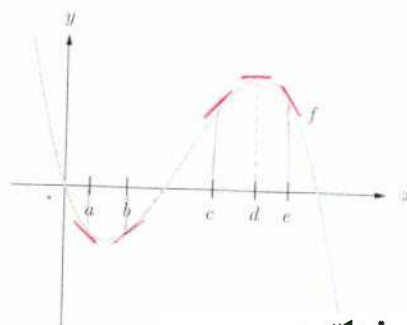
$m_5 = 0$ (ث) شیب خط $y = 2$

$m_6 = 1$ (ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ و ... در نظر بگیرید.

با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	$0/5$
c	۲
a	$-0/5$
e	-۲



تهیه کننده:

نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

(الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

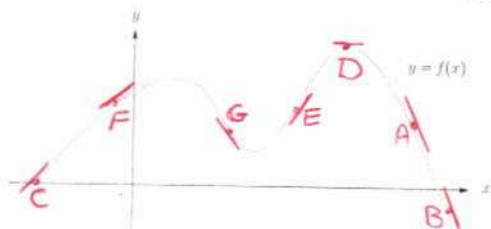
(ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

(پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

(ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

(ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند $f'(x_1) = f'(x_2)$

(ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



اگر $f(x) = x^3 - 2x$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید. $f'(x) = 3x^2 - 2$ $\Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$

نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک

نادرست است؟

(الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست** مثلاً در نقطه F شیب منفی است.

(ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را

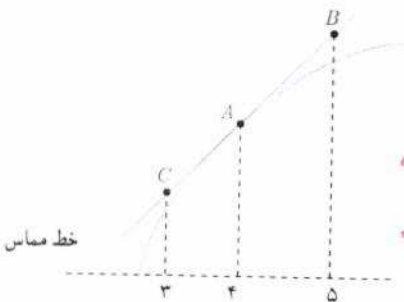
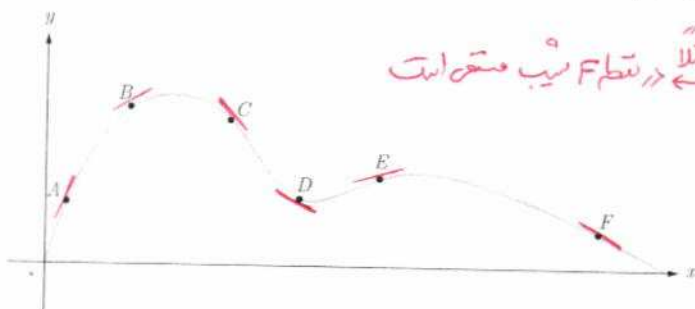
با m_A نمایش داده‌ایم) **نادرست**

(پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

(ت) شیب منحنی در نقاط D, F و C منفی است. **درست**

(ث) $m_F < m_D < m_C$ **نادرست**

(ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**



برای تابع f در شکل رویه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل

مختصات نقاط A, B, C را بیابید. $f'(4) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{f(5) - 25}{1} = 1/5 \Rightarrow f(5) = 25.5 \Rightarrow B(5, 25.5)$

$\Rightarrow \frac{f(3) - 25}{3 - 4} = 1/5 \Rightarrow f(3) - 25 = -1/5 \Rightarrow f(3) = 24.8 \Rightarrow C(3, 24.8)$

در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به طوری که

$s > j$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را

مقایسه کرد؟

(الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ب) علی s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

(پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

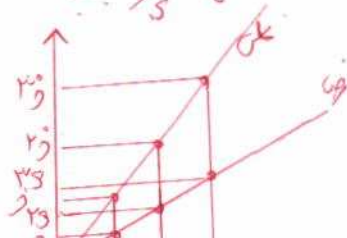
(ت) علی $s \cdot j$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

(ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

زمان	۱	۲	۳	...	k
علی	j	2j	3j	...	kj
رضا	s	2s	3s	...	ks

بیشتر علی یا رضا شایسته $\frac{j}{s}$ است. زیرا

علی $\frac{j}{s}$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

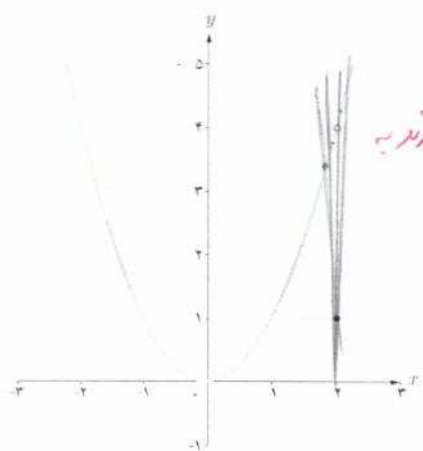


در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟ زیرا شیب خط مماس از نقطه $x=2$ می‌تواند به عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کند. اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

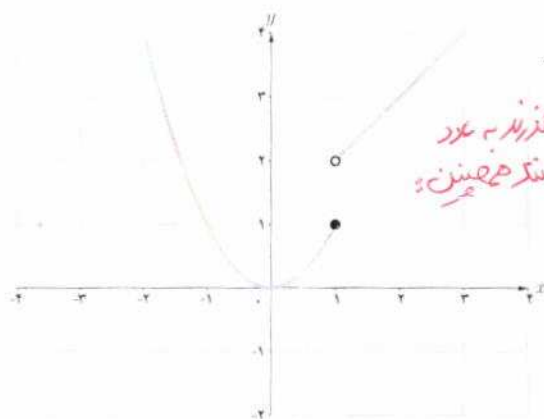
حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x=2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟
 زیرا شیب خط‌ها تابع که از نقطه $x=1$ می‌گذرند، عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کنند به هم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \begin{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \end{cases}$$

یعنی $g'(1)$ وجود ندارد.

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0 \\ \text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= 0 \text{ و از آنجا } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ (چرا؟)} \end{aligned}$$

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

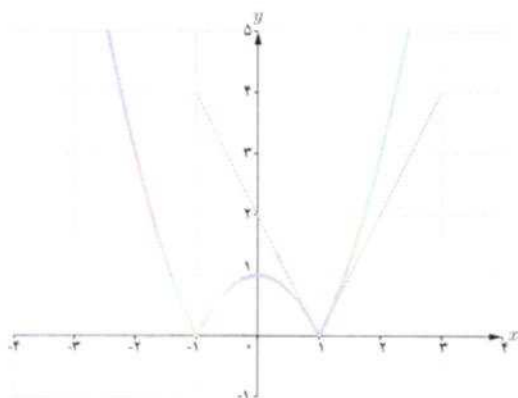
مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر 2 و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -2 است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

شیب نیم مماس چپ $f'_-(1)$

شیب نیم مماس راست $f'_+(1)$

در حقیقت:

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از:

$$\text{نیم مماس راست} \quad y - 0 = 2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2, \quad x \geq 1$$

$$\text{نیم مماس چپ} \quad y - 0 = -2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2, \quad x \leq 1$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - f(-1)}{x - (-1)} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -(x - 1) = 2 \Rightarrow f'_+(-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 2, \quad x > -1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -2 \Rightarrow f'_-(-1) = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 2, \quad x < -1$$

معادله نیم مماس ها

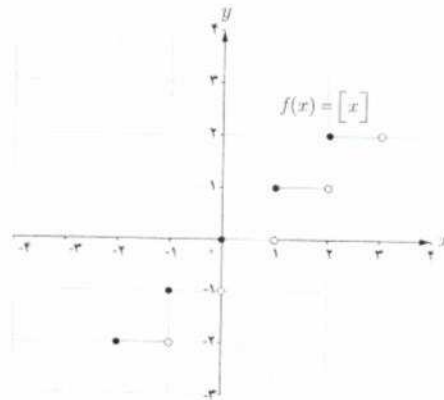
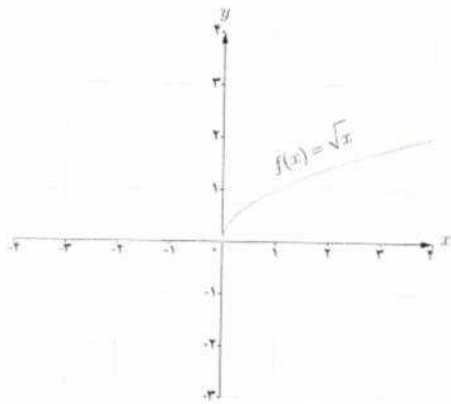
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



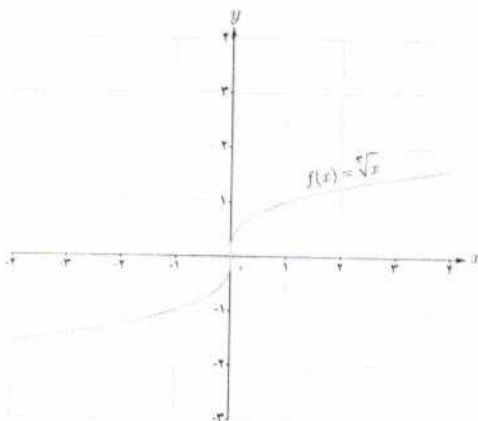
اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.

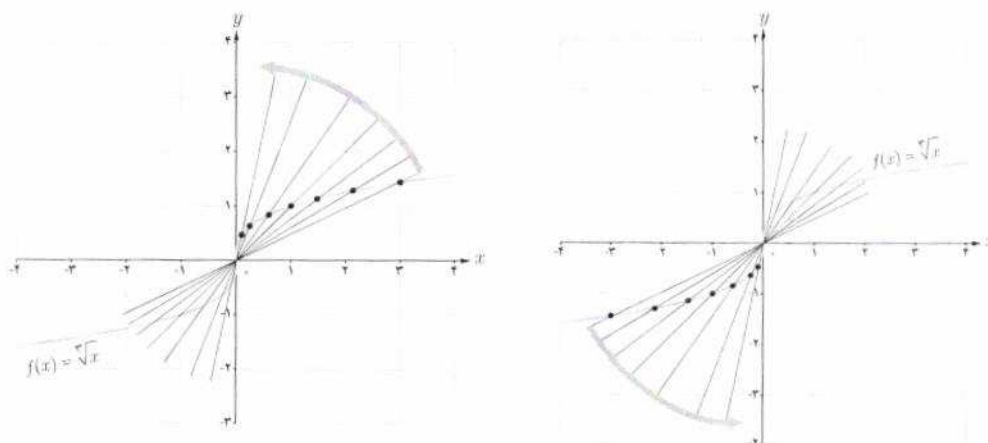
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.



تهیه کننده:



اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد^۱.

۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

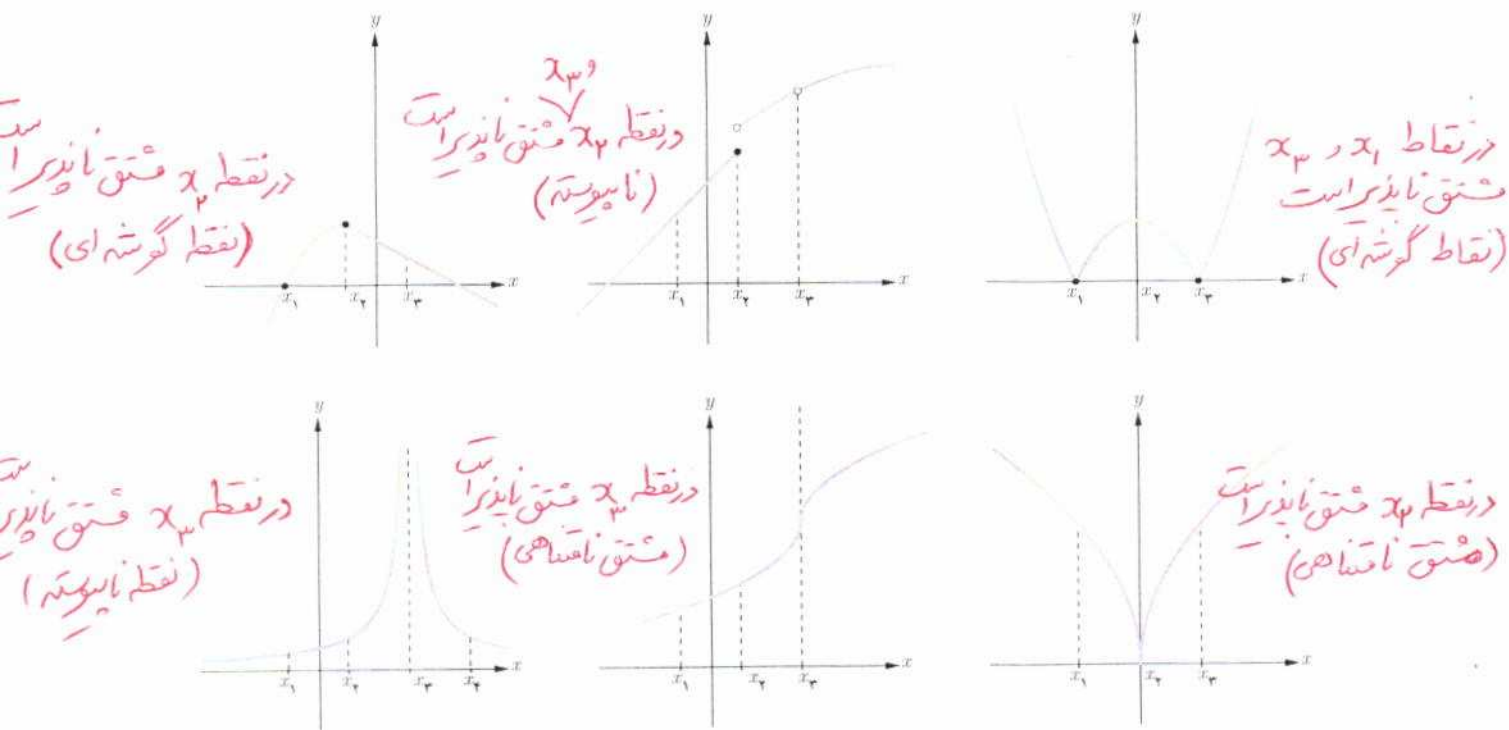
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

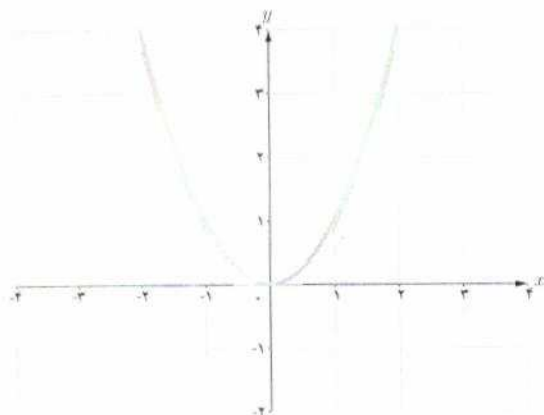


در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده اید. حال به دنبال یافتن رابطه ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می گیریم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده اند).

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-4	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟ **درکام نقطه**

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می توان حساب کرد، به طور مثال:

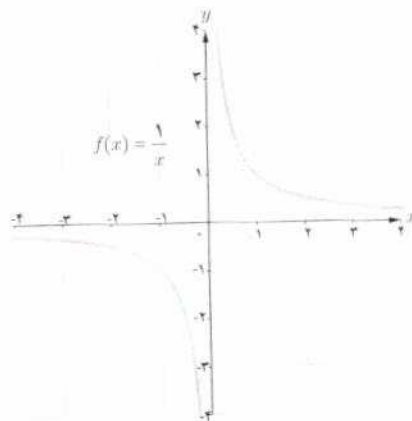
$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{ و } f'(50) = 100$$

نهیة کننده:

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = -\frac{1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد.

به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.



اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

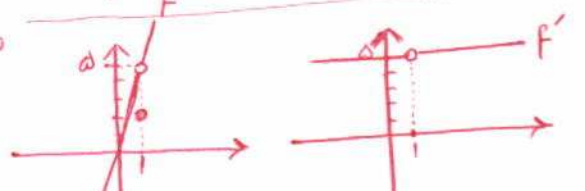
$$D_f = (x \neq 1) \cup (x = 1) = \mathbb{R}$$

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

$$\text{اگر } x \neq 1 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = 5 \Rightarrow f'(x) = 5$$

$$\Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$$

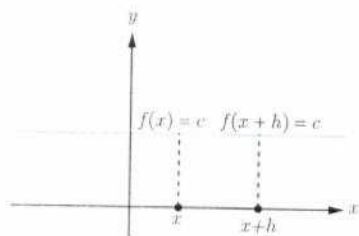
$$\text{اگر } x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 2}{x - 1} = \infty$$



محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲- اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^1$ ، آن گاه $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$. همچنین اگر $f(x) = x^2$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 2x^1 = 2x$.

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)+x]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h) + x]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h) + x] = x^1 + x^1 + x^1 = 3x^1 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می شود، اما در عوض دستور مهم تری را ثابت کرده ایم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \end{aligned}$$

نهیة کننده:

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1}$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

۴- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

A

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و fg

$(g(a) \neq 0)$ نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 = -2x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3 + 1)(-x^2 + 7x - 2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2 + 7x - 2) + (2x^3 + 1)(-2x + 7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 4)}{(3x + 1)^2}$

شایسته است که این فرمول در صفحات بود باشد.

مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1}$

الف) $f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$

ب) $g'(x) = 8 \times \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7 \times \frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$

پ) $h'(x) = \frac{1 \times (2x^2+x-1) - (2x^2+x-1) \times 2x}{(2x^2+x-1)^2}$

اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 5$ ، $f'(2) = 8$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را به دست آورید.

$(fg)'(2) = f'(2) \times g(2) + g'(2) \times f(2) = 8 \times 8 + (-6) \times 5 = 22$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - g'(2) \times f(2)}{(g(2))^2} = \frac{8 \times 8 - (-6) \times 5}{(8)^2} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق پذیر است و داریم:

$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

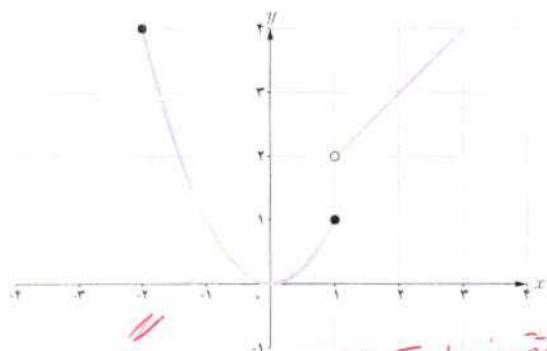
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[1, \infty)$ و $(-\infty, 1]$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه

$[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟) اولاً f روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد

$x=1$ مشتق راست ندارد

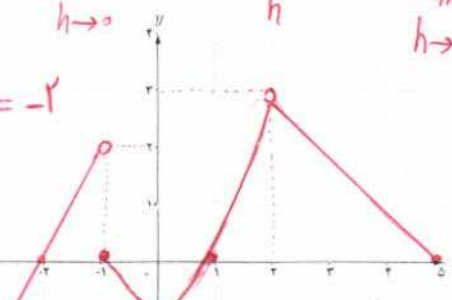


$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$\text{اگر } x \in (-1, 1) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x + 1} = -2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = 2$$



پس f روی بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است

$$\text{اگر } x \in (2, 5) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + 5 - (-x + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

پس f روی بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است

چون طبق نمودار، f در $x = -1$ مشتق پذیر نیست و $-1 \in (-2, 0]$ پس f روی بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - f_0}{x-0} = \infty$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4-9}{x-3} = 1 \rightarrow f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

فصل ۴ مشتق

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می گیریم.

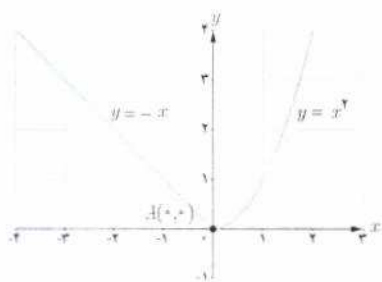
مثال: اگر $y=3x^2+2x^3-1$ آن گاه:

$$y'=12x+4x^2, \quad y''=12+8x$$

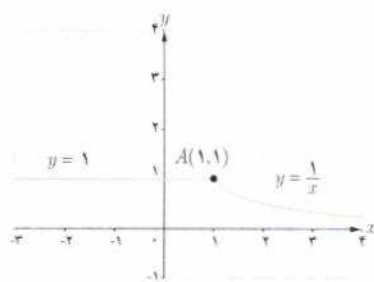
دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$$f(x)=|x-2|, \quad g(x)=\begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

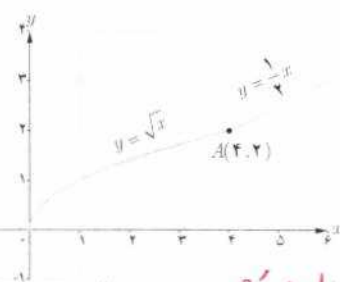
با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



$$f'_-(4) \neq f'_+(4)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = -1$$

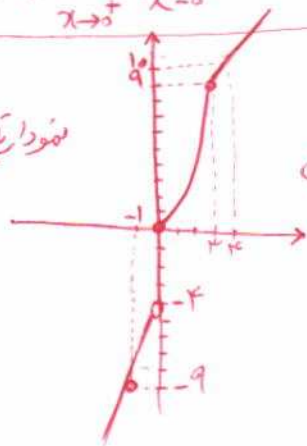
$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$$f'_-(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$$

$$f'_+(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\frac{1}{4}x-1}{x-4} = \frac{1}{4}$$

ادامه جواب در بالا

نمودار تابع f



(ب) نشان دهید که $f'(2)$ و $f'(0)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

با توجه به نمودار تابع f ، تابع f' در $x=0$ و $x=2$ ناپیوسته است.

(ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

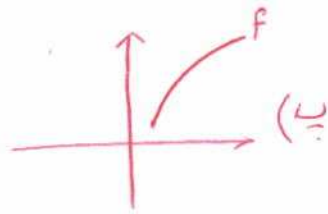
(ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

(ج) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

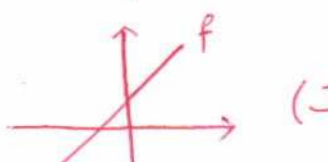
(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(ب) در تمام نقاط مثبت باشد.

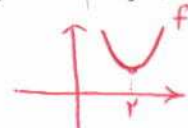
(ت) در تمام نقاط منفی باشد.



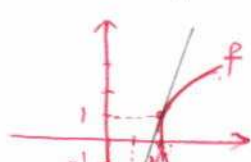
(ب)



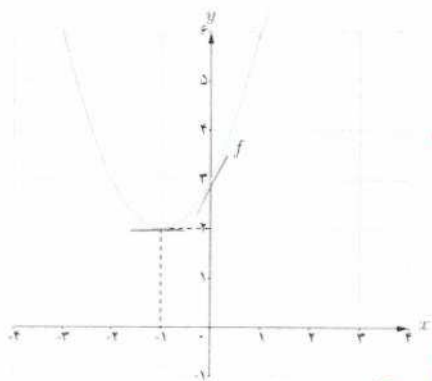
(ت)



(الف)



(ب)



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

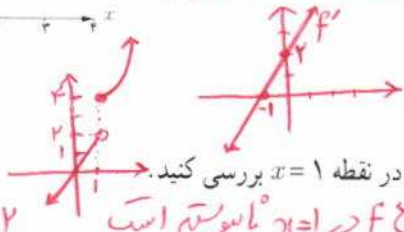
$$0 = f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 4, f'(-1) = 0, f'(0) = 2, f'(3) = 8$$

ب) تابع مشتق را رسم کنید.



$$f'_{-}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4}{x - 1} = \infty$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

توضیح: تابع f در $x = 1$ ناپیوسته است.

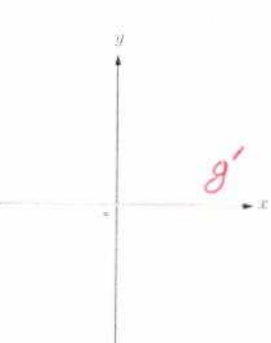
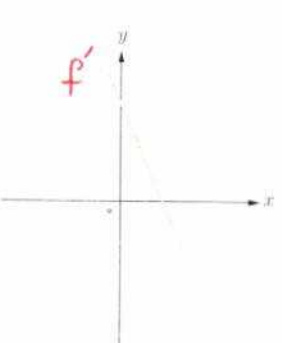
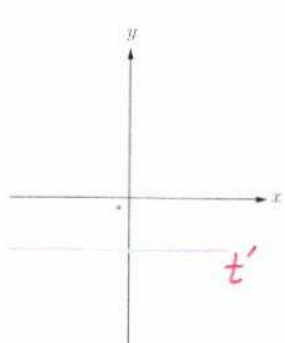
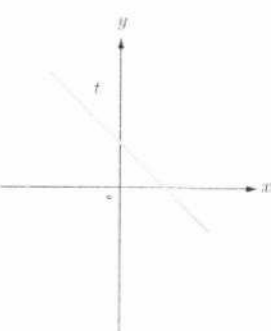
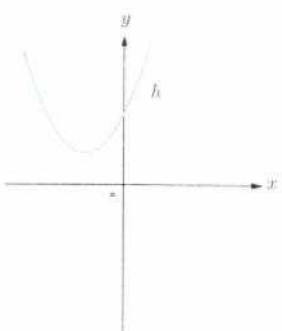
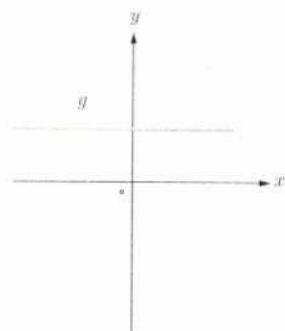
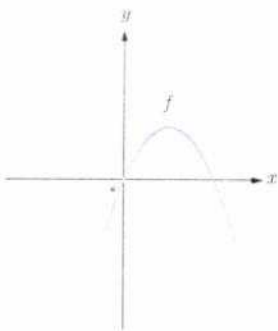
سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x - 1, & f_2(x) &= 3x + 5, & f_3(x) &= 3x \\ g_1(x) &= 5, & g_2(x) &= \frac{4}{x}, & g_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

↓ جواب در پایین صفحه

نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



جواب (۷) $f'_{-}(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$, $f'_{+}(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$

چون $f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2)$ پس $x = 2$ مشتق ناپذیر است.

$f'_{-}(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x - 2}{x + 2} = -1$, $f'_{+}(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} -(x - 2) = 4$ پس $f'_{-}(-2) \neq f'_{+}(-2)$

$$الف) h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

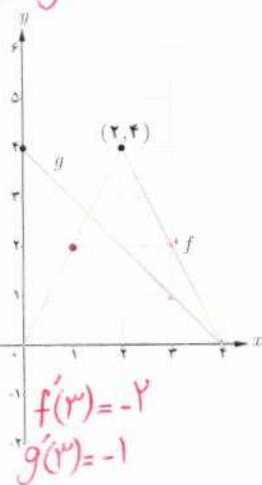
الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(3)$ و $h'(2)$ ، $h'(1)$

$$f'(1) = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

$$g'(1) = \frac{4-0}{0-2} = -1$$

$$f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$g'(2) = -1$$



ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(3)$ و $k'(2)$ ، $k'(1)$

$$k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 2}{(3)^2} = \frac{4}{9}$$

$$k'(2) = \frac{f'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot f(2)}{(g(2))^2} = \text{وجود ندارد} \rightarrow f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$k'(3) = \frac{f'(3) \cdot g(3) - g'(3) \cdot f(3)}{(g(3))^2} = \frac{-2 \times 1 - (-1) \times 2}{(1)^2} = 0$$

اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است $(3f + 2g)'(1)$ و $(f + g)'(1)$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_-(0)$ و $f'_+(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow f'(0) = \text{وجود ندارد}$$

مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$الف) f(x) = 4x(2x-5)^3 + 4(2x-5)^2(3x^2-4)$$

$$= 4(2x-5)^2(5x^2-5x-4)$$

$$\text{الف) } f(x) = (3x^2-4)(2x-5)^2$$

$$ب) f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \times (2x+1) + 3x \times \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$\text{ب) } f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$$

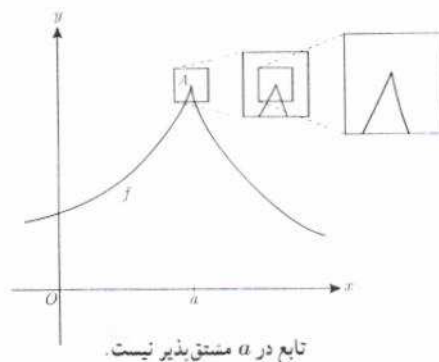
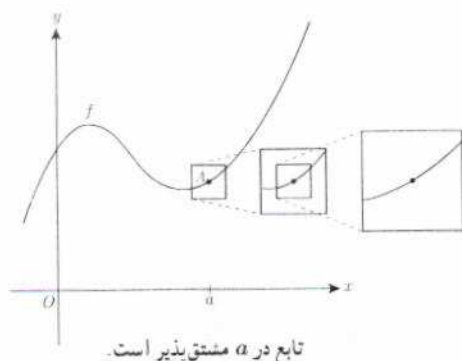
$$\text{ب) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

$$ت) f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{9 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$$

$$ب) f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2} = \frac{-3x^2+4x-3}{(-3x+2)^2}$$

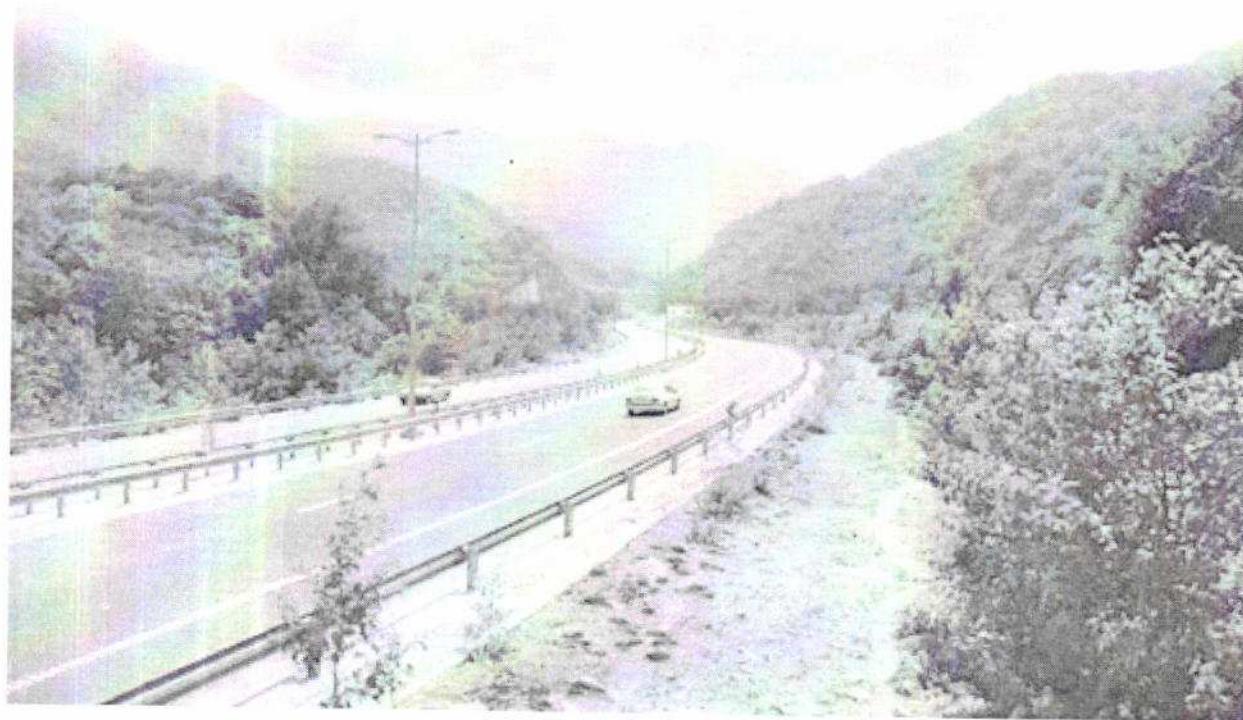
خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 28° کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $7^{\circ} = \frac{28^{\circ}}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



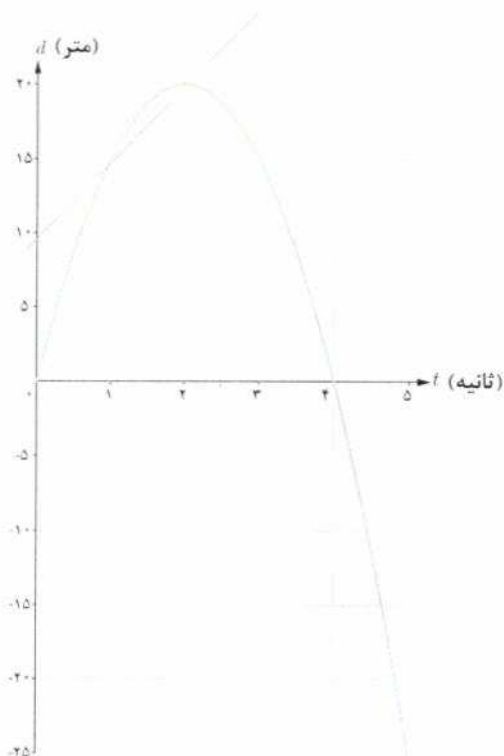
مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$

حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن

نمودار مکان-زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 1/5]$ و

$[1, 1/4]$ به دست آورید.



ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

$$\text{پ) } d'(1) = 10, \text{ پس } d'(t) = -10t + 20$$

$$\text{ت) } d'(2) = 0, \quad d'(3) = -10$$

تهیه کننده:

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

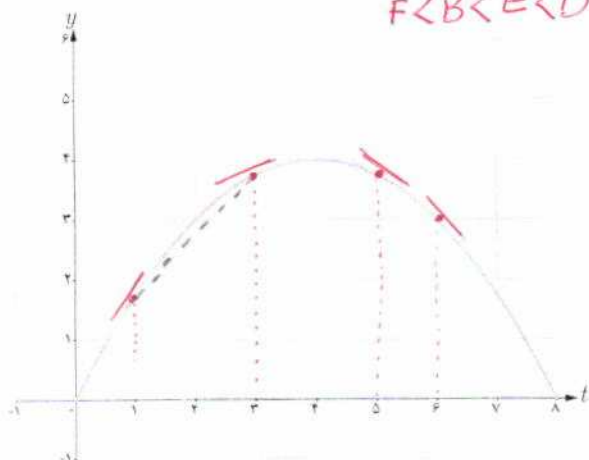
$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابری دارند.



نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)

$$F < B < E < D < A < C$$



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

تهیه کننده:

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

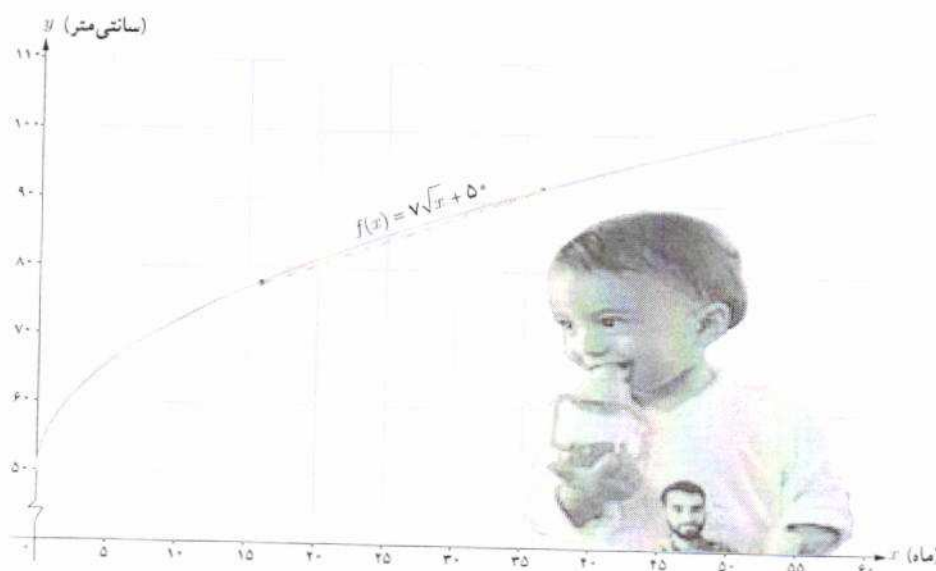
آهنگ رشد: تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان

پس از تولد (بر حسب ماه) است. به طور مثال $f(25) = 85$

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.09 \frac{\text{سانتی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی متر در هر ماه است.



الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ $\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0.2 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟
 $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{f(x) - f(25)}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} + 50 - 85}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 35}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{1}{\sqrt{x} + 35} = \frac{1}{\sqrt{25} + 35} = \frac{1}{40} = 0.025 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب

کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.
 $\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{95 - 80}{20} = \frac{15}{20} = 0.75 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$

۹۶
 $\lim_{x \rightarrow 49} \frac{f(x) - f(49)}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{\sqrt{x} + 50 - 99}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{\sqrt{x} - 49}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{1}{\sqrt{x} + 49} = \frac{1}{\sqrt{49} + 49} = \frac{1}{56} \approx 0.018 \frac{\text{cm}}{\text{mon}}$

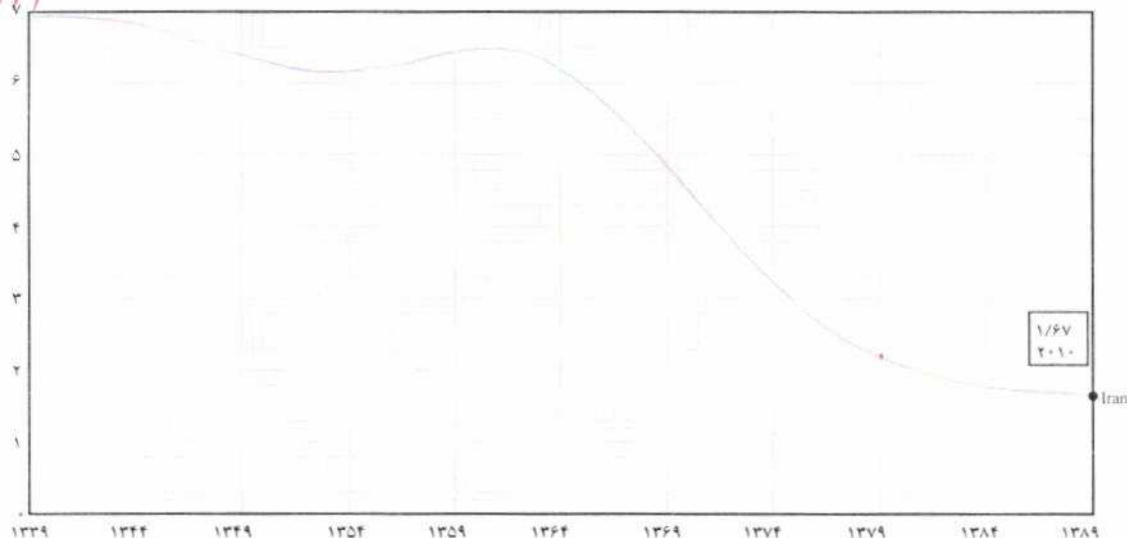
آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۴۹ ماهگی > آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۲۵ ماهگی

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹، ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0/108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴، ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2/2 - 4/2}{15} = \frac{-4}{15} \approx -0/27$$



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

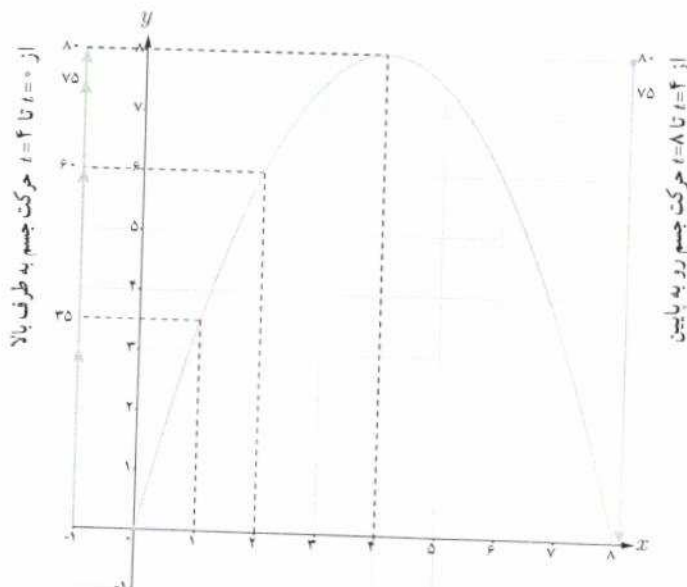
نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان-زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 , v_2 , v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$, $t=2$, $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

با توجه به مثال قبل:

(الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

$$\text{هنگام پرتاب: } t=0 \Rightarrow h'(0) = 40 \text{ m/s}$$

$$\text{هنگام برخورد به زمین: } t=8 \Rightarrow h'(8) = -40 \text{ m/s}$$

(ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

$$\text{سرعت متوسط: } \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 175}{3} = -58.3 \text{ m/s}$$

(پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

$$\text{سرعت مثبت: } 35 = -10t + 40 \Rightarrow t = 0.5 \text{ s}$$

$$\text{سرعت منفی: } -35 = -10t + 40 \Rightarrow t = 7.5 \text{ s}$$

جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت t	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

$$\text{آهنگ تغییر متوسط (الف): } \frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2 \text{ } ^\circ\text{C/h}$$

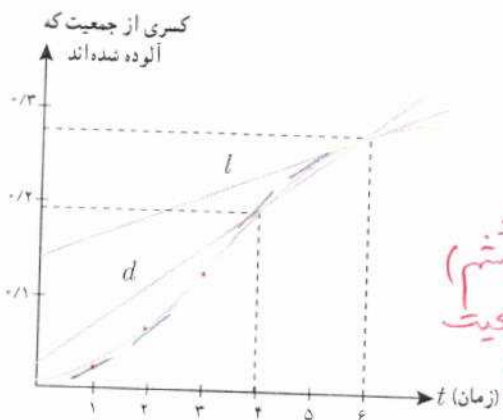
$$\text{آهنگ تغییر متوسط (ب): } \frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -1.67 \text{ } ^\circ\text{C/h}$$

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

(الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

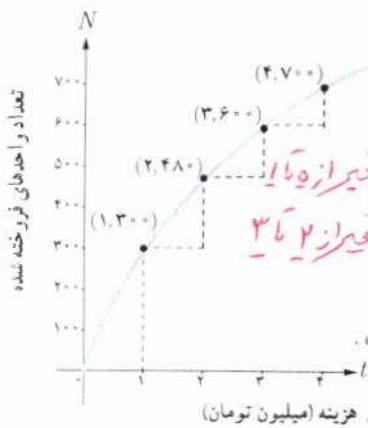
(ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

(پ) پاسخ ها را تفسیر کنید. در بازه زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲، درجه حرارت با آهنگ $2 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت در حال افزایش است اما در بازه زمانی ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸، درجه حرارت با آهنگ $-1.67 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت در حال کاهش است. کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

(الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.(ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$ (پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

آهنگ تغییر متوسط
(الف) شیب خط l ، کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=4$ (هفته ششم) نشان می دهد. شیب خط d ، آهنگ تغییر متوسط، کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله زمانی $t=4$ تا $t=4$ (هفته ششم تا هفته ششم) نشان می دهد.

جواب ۱) ب عبارت دیگر، طور متوسط در هر ساعت، $2 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت (در فاصله زمانی ۸ تا ۱۲) اضافه می شود اما، طور متوسط در هر ساعت، $-1.67 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ درجه حرارت (در فاصله زمانی ۱۲ تا ۱۸) کاهش می شود.



نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{آهنگ تغییر از } 0 \text{ تا } 1: & \frac{300-0}{1-0} = 300 \\ \text{آهنگ تغییر از } 1 \text{ تا } 2: & \frac{480-300}{2-1} = 180 \\ \text{آهنگ تغییر از } 2 \text{ تا } 3: & \frac{600-480}{3-2} = 120 \\ \text{آهنگ تغییر از } 3 \text{ تا } 4: & \frac{700-600}{4-3} = 100 \end{aligned}$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

نریا با افزایش t (هزینه) رشد تعداد کالاها فروخته شده کمتر شده است. شاید به نوعی با افزایش هزینه تبلیغ، نسبت کالا بیشتر و لذا خریداران کمتر می‌شود.

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام

لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟
 $\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{15 - 10}{5} = 1$ ، $\text{سرعت لحظه‌ای} = 2t - 1 \Rightarrow 2t - 1 = 1 \Rightarrow t = 1$ و $t = 5$

t	ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

توبی از یک بل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود.

$f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است.

برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

$$\begin{aligned} \frac{f(0.4) - f(0.3)}{0.1} &= 12 \text{ m/s} \\ \frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} &= 11 \text{ m/s} \end{aligned}$$

الف) $1/22 \text{ m/s}$ ب) $14/91 \text{ m/s}$ ج) $11/5 \text{ m/s}$ د) $16/3 \text{ m/s}$

با توجه به مقادیر تابع f در جدول روبه‌رو، f' را برای

نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال $f'(0) = -6$ بقیه

جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
$f'(x)$ مقدار تقریبی	-۶	-۳	-۱/۸	-۱/۴	?

کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. **نادرست**

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. **نادرست** (مثلاً $f(x) = x^2$ در $x=1$)

ج) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ **درست** (مثلاً $f(x) = (x-1)^2$ در $x=1$)

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
 $\frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \frac{130 - \sqrt{3} - 54}{1} = 76 \text{ گرم}$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟
 $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \Rightarrow m'(3) = 54 \frac{1}{3}$

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه

از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

$$\text{الف) } \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39.204 - 40 = -0.796 \text{ لیتر}$$

$$\text{ب) } \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = -0.4 \text{ لیتر}$$

$$-0.4 = -0.8(1 - \frac{t}{100}) \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = 0.5 \Rightarrow t = 50$$