



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

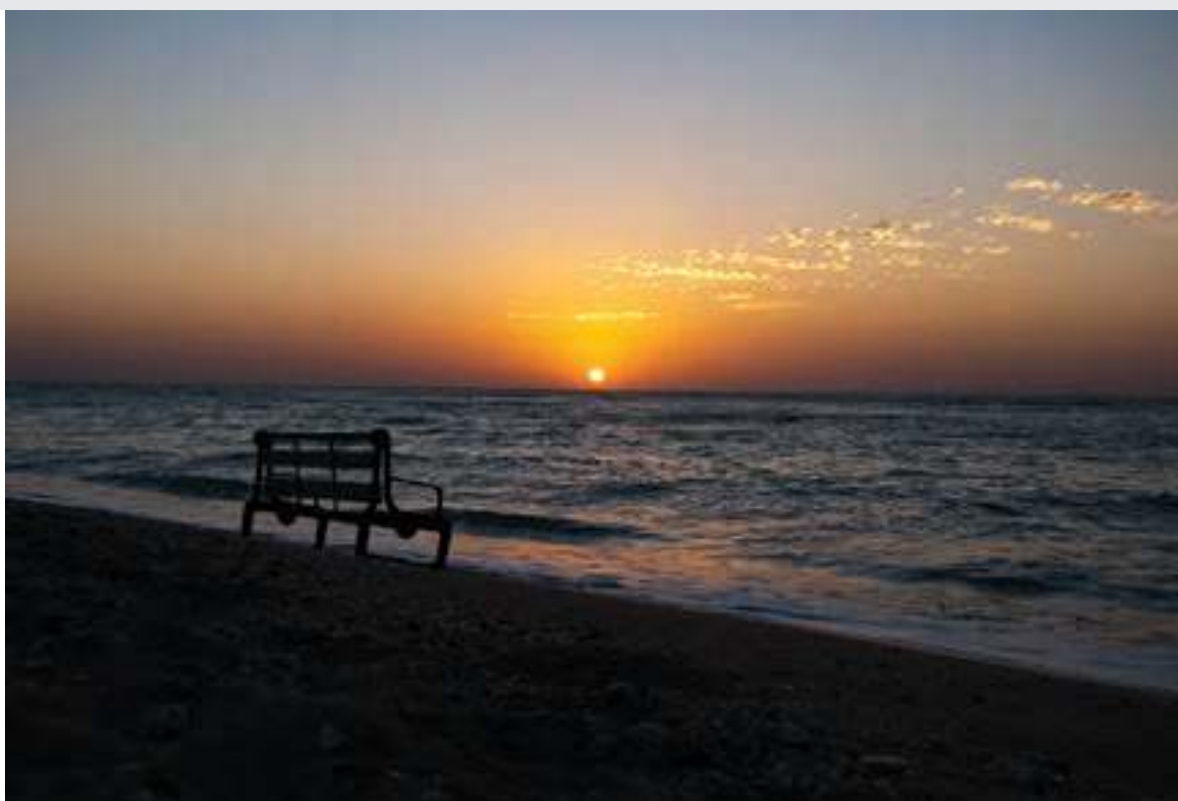
 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

۳ حد بی نهایت و حد در بی نهایت



عکاس: سپیده‌مهدی حسینی

▲ جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهده دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهده طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهای برای آن دیده نمی‌شود!

حد بی نهایت

حد در بی نهایت

درس اول

درس دوم

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی نهایت و حد در بی نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش نیازها باید ارائه گردد.

بخش پذیری چندجمله ای ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - 3 \\ -(2x^2 - 6x) \quad | \quad 2x + 1 \\ \hline x + 1 \\ -(x - 3) \\ \hline 4 \end{array}$$

۱ الف) چندجمله ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - 3)$ تقسیم

کرده ایم. جاهای خالی را پر کنید :

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = 4$.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید. $f(3) = 2(9) - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$

ت) $f(3)$ و R چه رابطه ای با هم دارند؟ **برابرند**

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + 1) + 4$

۲ الف) اکنون می خواهیم در حالت کلی چندجمله ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم

خارج قسمت این تقسیم، چندجمله ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad x - a \\ \hline Q(x) \\ \hline R \end{array}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = \underbrace{(a - a)Q(a)}_0 + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

نتیجه حاضر را می توان برای تجزیه چندجمله ای ها به کار برد.

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \quad \quad 3x + \dots \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline R = 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم داریم: $f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x + \dots)$ همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + -2 + 1 + 1 = 0$$

۲ چندجمله‌ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید. الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟ بله

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \quad \quad 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش پذیر است.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 1 = -16 + 20 + 6 - 1 = 0 \Rightarrow R = 0$$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-1)$ بخش پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

۱- در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجه صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجه حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad | \quad x + 2 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -x^2 + 4 \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می‌توان نوشت $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2 + \sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال: حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x = 8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4 + 4 + 4) = 96$$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

حد نامتناهی

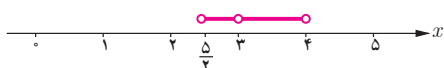
تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می باشد.

مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(0, 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می شود.



مثال: مجموعه $\{3\} - (\frac{5}{4}, 4)$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

کار در کلاس صفحه ۵۴: الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{x^p - 1}{x^p + px} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{\cancel{(x + p)} (x - p)}{\cancel{x (x + p)}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{(x - p)}{x} = \frac{-\frac{1}{p}}{-\frac{1}{p}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{px^p - px + 1}{px^p + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{1}{p}\right)} (px - p)}{\cancel{\left(x - \frac{1}{p}\right)} (px + p)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{(px - p)}{(px + p)} = \frac{0}{0} = 0$$

ب)

ب)

$$\lim_{x \rightarrow \mu} \frac{x^r - \Delta x + \epsilon}{\mu x^r - 1 \mu x^r + \mu \epsilon x - 9} = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{\cancel{(x - \mu)} (x - \mu)}{\cancel{(x - \mu)} (x - \mu)} = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = \frac{1}{0}$$

مخرج در نزدیکی μ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند وحد صورت

هم در μ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی μ با مقادیر منفی به صفر میل می کند وحد صورت

هم در μ برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \mu^+} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \mu^-} \frac{(x - \mu)}{(x - \mu)(\mu x - 1)} = -\infty \end{cases}$$

ت)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r - 1}{x + \sqrt{\mu x + \mu}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{\mu x + \mu})}{(x + \sqrt{\mu x + \mu})(x - \sqrt{\mu x + \mu})(x - \sqrt{\mu x + \mu})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{\mu x + \mu})}{(x - \mu)(x + 1)(x - \sqrt{\mu x + \mu})} = \frac{+\epsilon}{-\epsilon} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^p + x - p} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}^{x^p - x}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+p)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{5}$$

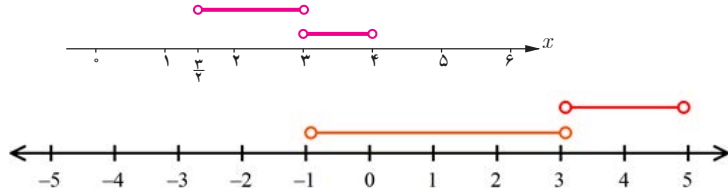
3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[p]{x} + 1}{x^p + px + p} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[p]{x} + 1)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)}{\cancel{(x+1)}(x+p)(\cancel{x+1})(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+p)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+p)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1)} = \frac{1}{p^2}$$

4

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0, x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

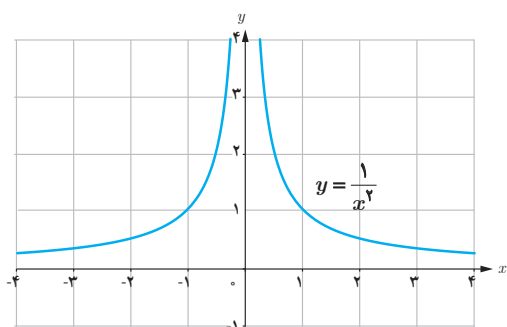


همسایگی راست $(3, 5)$ و همسایگی چپ $(-1, 3)$

می‌خواهیم مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود به دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	25	100	10000	1000000	$\rightarrow ? \leftarrow$	...	1000000	...	100	25

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$ به هر اندازه دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

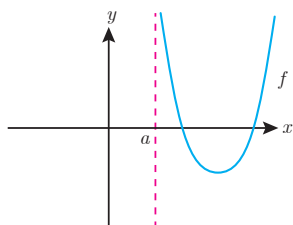
همسایگی محذوف

تعریف ۲: فرض کنیم f در یک a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی **کوچکتر** ... کرد، مشروط بر آنکه x به قدر **کافی** ... به a نزدیک اختیار شود.

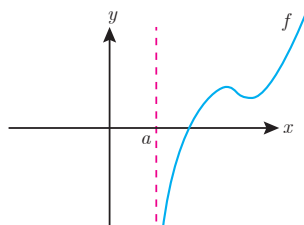
حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

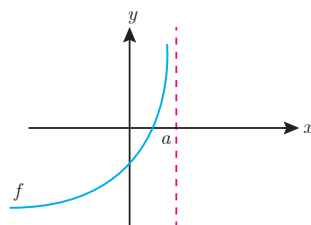
به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



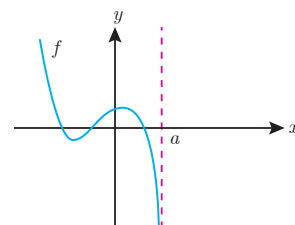
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مثال: حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود.

بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار

هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه قبل، برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ و یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل: مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است. پس بنابر قسمت (پ) قضیه قبل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5}$

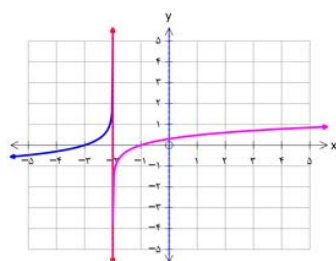
پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

۲. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.



تمرین

۱. الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۳. حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$

۴. حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

ذ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۵. الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

حل کار در کلاس صفحه ۵۷:

$$\text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu x}{x - \infty} = \frac{1}{\infty} = -\infty$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu x}{x - \infty} = \frac{1}{\infty} = +\infty$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^p} = \frac{-1}{\infty} = -\infty$$

$$\text{ت)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x - \mu|} = \frac{1}{\infty} = +\infty$$

$$\text{ث)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\mu}} \frac{[x]}{\mu x + 1} = \frac{-1}{\infty} = -\infty$$

$$\text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sin^r x} = \frac{+\infty}{\infty} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد

صورت هم در ۵ برابر ۱۰ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۵ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد

صورت هم در ۵ برابر ۱۰ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی صفر همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند

و صورت هم برابر ۱- است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی ۳ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد

صورت هم برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{\mu}$ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند

و صورت هم $-1 = -\left[\frac{-1}{\mu}\right]$ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت

هم در صفر برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$X+1=0 \rightarrow X=-1$$

$$f(-1)=p(-1)^r+(-1)^r+1=-p+1+1=0 \rightarrow \boxed{R=0}$$

ب.

$$p_{X^r}+X^r+1 \quad \left| X+1 \right|$$

$$\frac{-\left(p_{X^r}+p_{X^r}\right)}{p_{X^r}-X+1}$$

$$-X^r+1$$

$$\frac{-\left(-X^r-X\right)}{X+1}$$

$$f(X)=(X+1)\left(p_{X^r}-X+1\right)$$

$$\frac{-\left(X+1\right)}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\mu}} \frac{\mu x^{\mu} - x}{\mu x^{\mu} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\mu}} \frac{\cancel{\mu x \left(x - \frac{1}{\mu} \right)}}{\cancel{\mu x \left(x - \frac{1}{\mu} \right)} (\mu x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\mu}} \frac{x}{(\mu x + 1)} = \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu}$$

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{x^{\mu} - \mu x^{\mu} - \mu x - \Delta}{x^{\mu} - \mu \Delta} = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{\cancel{(x - \Delta)} (x^{\mu} + x - 1)}{\cancel{(x - \Delta)} (x + \Delta)} = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{x^{\mu} + x - 1}{(x + \Delta)} = \frac{\mu \Delta + \Delta - 1}{1 \bullet} = \frac{\mu \Delta}{1 \bullet}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{x^{\mu} + \mu x - \mu}{x^{\mu} + \mu x^{\mu} + x + \mu} = \lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{\cancel{(x + \mu)} (x - 1)}{\cancel{(x + \mu)} (x^{\mu} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\mu} \frac{x - 1}{x^{\mu} + 1} = \frac{-\Delta}{1 \vee}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{px-1}}{x^p - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{px-1}}{x^p - x} \times \frac{x + \sqrt{px-1}}{x + \sqrt{px-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - px + 1}{x(x-1)(x + \sqrt{px-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{x}(x-1)(x + \sqrt{px-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x(x + \sqrt{px-1})} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{x^p - q}{p - \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x-p)(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{(p - \sqrt{x+1})(p + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cancel{(x-p)}(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{\underbrace{p - x - 1}_{-\cancel{(x-p)}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{(x+p)(p + \sqrt{x+1})}{-1} = \frac{p \times p}{-1} = -p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{px+1}{\sqrt[p]{x}+p} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{p(x+1)(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)}{(\sqrt[p]{x}+p)(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{p\cancel{(x+1)}(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p)}{\cancel{(x+1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} p(\sqrt[p]{x^p} - p\sqrt[p]{x} + p) = p(p + p \times p + p) = p^3 \end{aligned}$$

تمرین ۴:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و صورت برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی صفر به صفر میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{(x+5)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\infty$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۹ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $+\infty$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{p}} \frac{px + 1}{(px + 1)^p} = \frac{-1}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{p}$ چون توان دو است به صفر مثبت میل می کند
و صورت حاصلش برابر ۱- است که عددی منفی است پس حد عبارت

برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p} +} \frac{1 - \Delta x}{x^p - q} = \frac{1 - 1 \Delta}{-} = \frac{-1 \Delta}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۳ به ازای مقادیر مثبت صفر میل می کند و
صورت حاصلش برابر ۱۴- یک عددی منفی است پس حد

عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-3x}{x^p - 4} = \frac{-3(-1)}{-} = \frac{3}{-} = -\infty$$

مخرج در نزدیکی ۲- به ازای مقادیر منفی صفر میل می کند
و صورت حاصلش برابر ۶ یک عددی مثبت است پس حد

عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ به صفر از سمت منفی میل می کند و صورت

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

برابر ۱ عددی مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت منفی ها به صفر مثبت

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = +\infty$$

میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی مثبت

است پس حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت مثبت ها به صفر

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{p}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = -\infty$$

منفی میل می کند و صورت حاصلش برابر ۱ عددی

مثبت است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

مخرج در نزدیکی $\frac{\pi}{p}$ از سمت چپ به صفر منفی میل می

کند و صورت برابر ۱- عددی منفی است پس حد عبارت

برابر $+\infty$ است

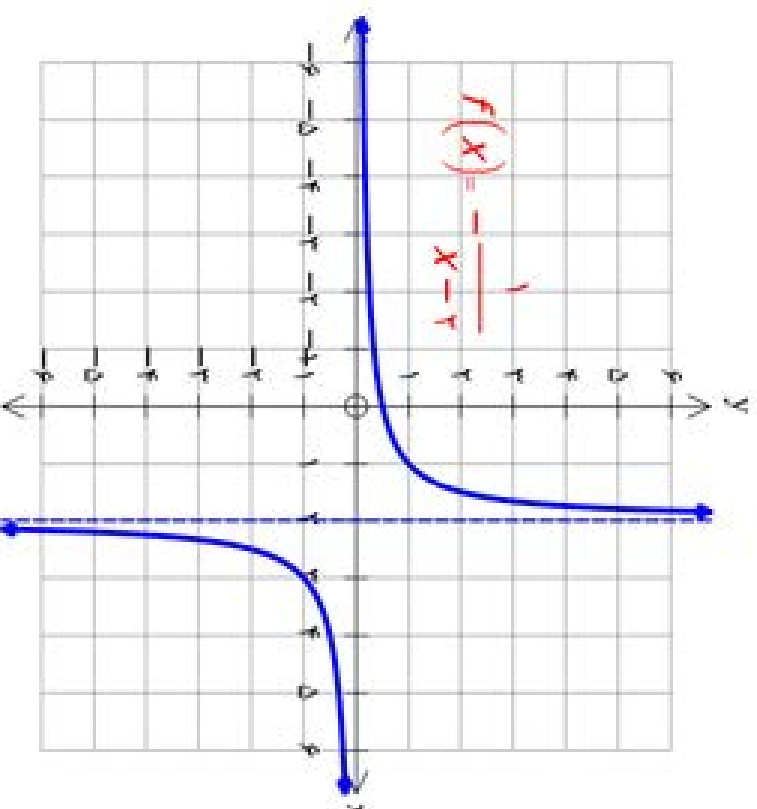
$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{[x] - p}{x - p} = \frac{[p] - p}{p - p} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

نکته ۵: الف: حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هر عدد

مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود از هر عدد مثبت دلخواهی کوچکتر است.

پ)



حد در بی نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	$\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$	...

$$1 - \frac{1}{2^n} \quad 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

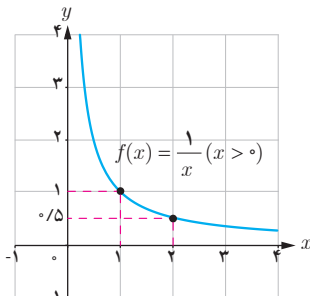
الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می‌توان گفت؟

تقریباً کل سطح مربع رنگ می‌شود

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.



x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\rightarrow ?$

از جدول دیده می شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک تر می شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از 0.00001 باشد، لازم است x بزرگ تر از 100000 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از 0.000001 باشد؟
با این شرایط می گوییم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. به طور کلی می توان گفت:

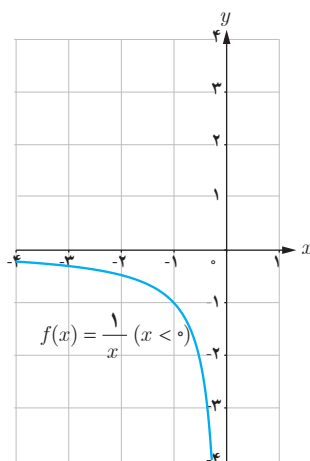
اگر تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می شود:

فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار **دلخواه**، می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر **کافی**، کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	$-\infty \leftarrow$	$\dots$	-1000000	-100000	-10000	-1000
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow ?$	$\dots$	-0.000001	-0.00001	-0.0001	-0.001



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0) \quad (\text{پ})$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{7 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حل کار در کلاس صفحه ۲۰: سوال ۱:

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\mu X + \mu}{X - 1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{X} \left(\mu - \frac{\mu}{X} \right)}{\cancel{X} \left(1 - \frac{1}{X} \right)} = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \mu - \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\mu}{X}}{\lim_{X \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X}} = \frac{\mu - 0}{1 - 0} = \mu$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - \Delta t^r}{t^r + \mu t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1 - \Delta t^r}{t^r}}{\frac{t^r + \mu t}{t^r}} = \frac{\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t^r} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta}{\lim_{t \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mu}{t}} = \frac{0 - \Delta}{1 + 0} = -\Delta$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu - \mu X} = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \mu - \lim_{X \rightarrow +\infty} \mu X} = \frac{1}{-\infty} = -\frac{1}{\infty}$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1 \circ \circ X^r + \mu X}{X^r + \Delta} = 1 \circ \circ \quad \text{بـ}$$

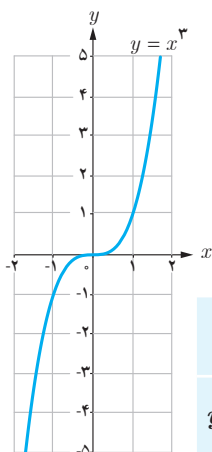
$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{-X + \Delta} = -1$$

سوال ۲: الف)

حد نامتناهی در بی نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$y = x^3$	$-\infty \leftarrow$	-1000000000	-100000000	-10000000	10000000	100000000	1000000000	$\rightarrow +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهند که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

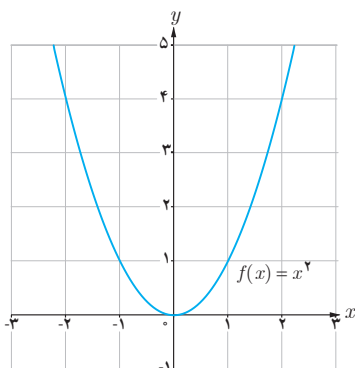
به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می شوند.

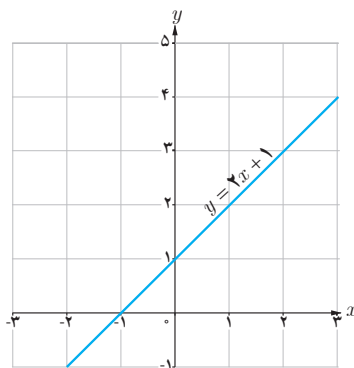
تذکر ۲: رابطه هایی مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی نهایت می نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



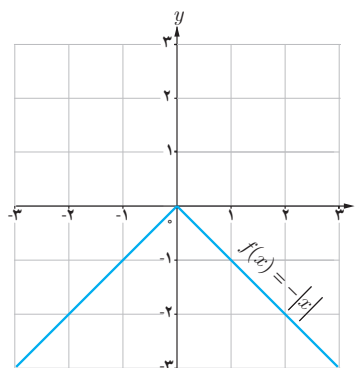
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



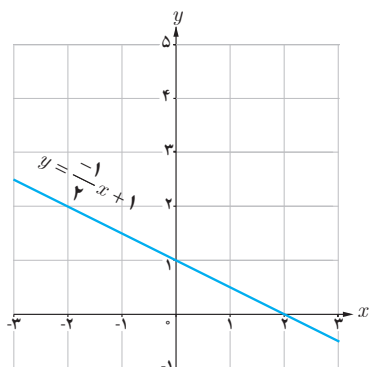
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



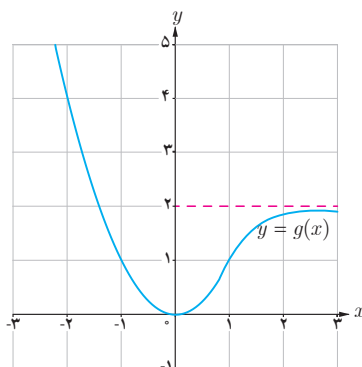
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



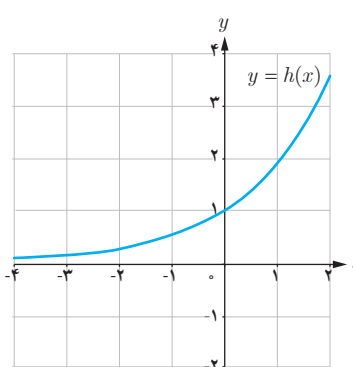
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{1}{2}x + 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x + 1) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی :

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

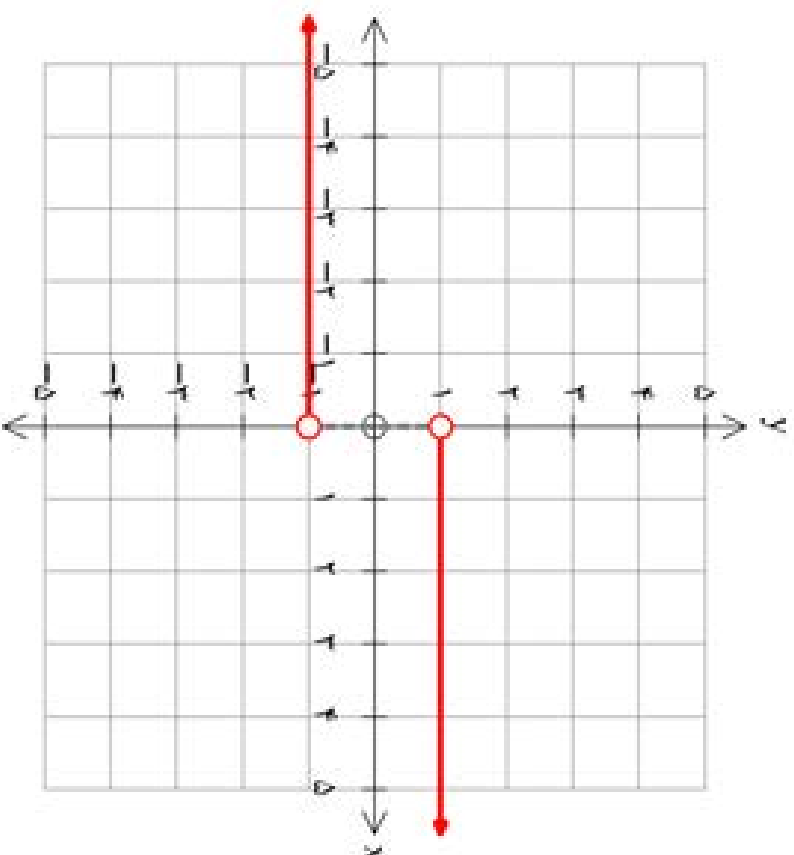
حل کار در کلاس صفحه ۶۳:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{X^{\mu}} - \sigma_X + \epsilon}{\nu_{X^{\mu}} - |X^{\mu} - \epsilon_X|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{X^{\mu}}}{\nu_{X^{\mu}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\mu}{\nu}$$

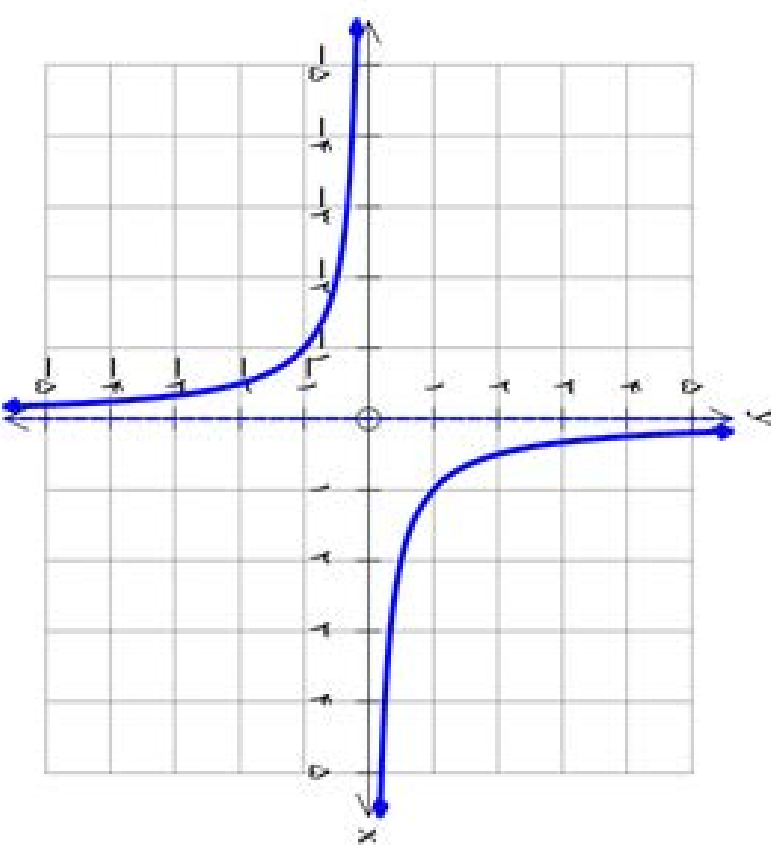
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma_X + \epsilon}{X^{\mu} + X - \Lambda} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma_X}{X^{\mu}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma}{X^{\mu}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\epsilon_{X^{\nu}} + \sigma_{X^{\mu}}}{\mu_{X^{\mu}} + \eta} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\epsilon_{X^{\nu}}}{\mu_{X^{\mu}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\mu_{X^{\mu}} \right) = -\mu(+\infty) = -\infty$$

حل تمرین صفحه ۵۳: تمرین ۸:

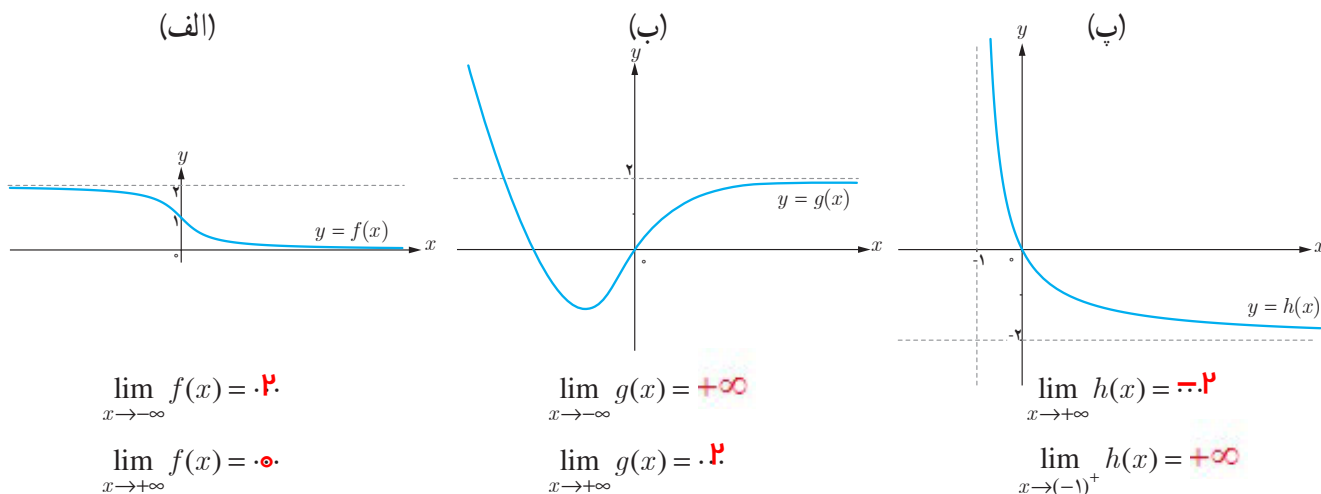


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

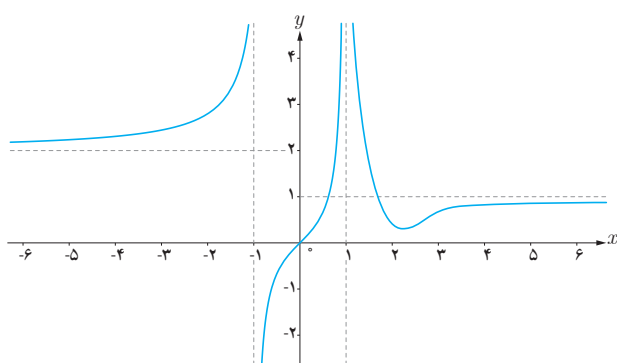


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.



۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$
 پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

خ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{4}x^3 + 7x^2 - 6)$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

ح) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

چون

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{y}{x^p} \right) = 9 + 0 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} x^p + vx^p - 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p} x^p \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu x - \mu} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\mu x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mu + \frac{1}{x^p}}{\frac{p}{x} - 0} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\mu + \frac{1}{x^p} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p}{x} - 0 \right)} = \frac{\mu}{-0} = -\frac{\mu}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mu x - 1}{\mu x + 1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\mu x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\mu x)} = \frac{\mu}{\mu}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\mu x^p - \mu x + 1}{x^p + 0x - \mu} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\mu x^p)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^p)} = \mu$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\mu_X^{\mathcal{O}} - \mathfrak{f}_X^{\mu} - X}{X^p - \mathcal{O}X + 1} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\mu_X^{\mathcal{O}} \right)}{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(X^p \right)} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \mu_X^{\mu} = -\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{X^p + X}{\mu - X} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(X^p \right)}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-X \right)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-X \right) = -\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\mathfrak{f}_X^{\mu} + VX - \mathfrak{q}}{\mu_X^{\mu} - \mathfrak{k}_X^p + X} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(-\mathfrak{f}_X^{\mu} \right)}{\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\mu_X^{\mu} \right)} = -\mu$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\mu_X + 1}{\mathfrak{k}} \right) = \frac{\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\mu_X \right)}{\lim_{X \rightarrow +\infty} \mathfrak{k}} = \frac{1}{\mu} \left(+\infty \right) = +\infty$$

تمرین ۵: الف) اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۱-

نزدیک کرد

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به ۲ نزدیک کرد

(ب)

