



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

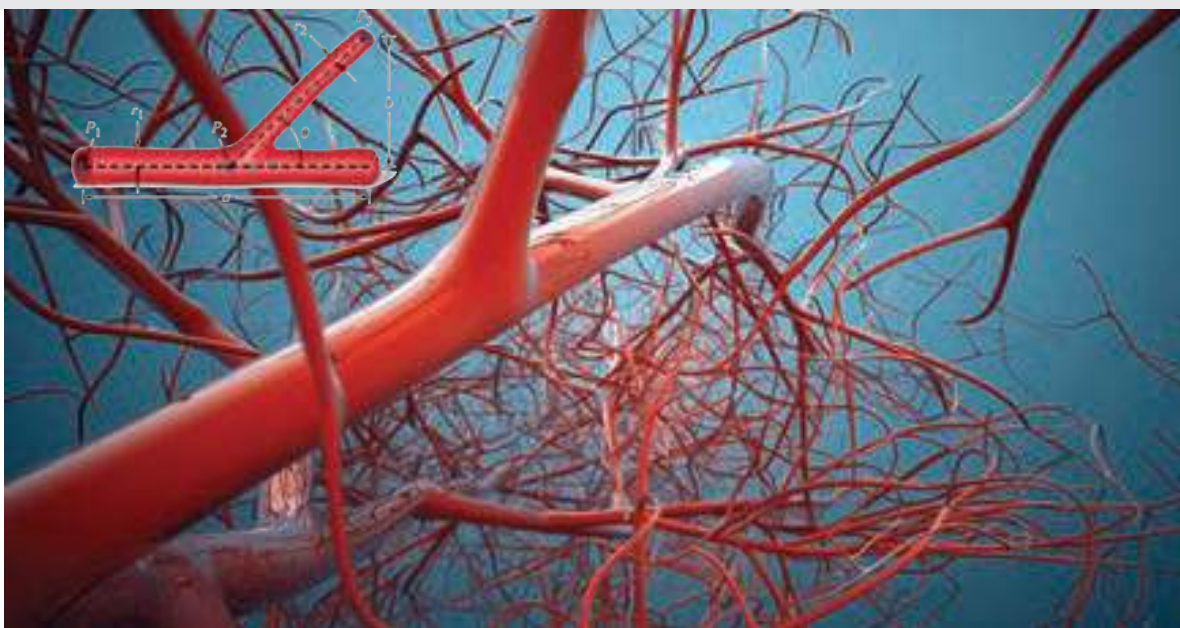
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

۲

مثلثات



اشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تانژانت

معادلات مثلثاتی

درس اول

درس دوم

تعریف: تابع f را متناوب گوئیم هرگاه عدد حقیقی و مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

$$x \in D_f \text{ که } T \text{ را دوره تناوب می نامیم و در بسیاری موارد دنبال کمترین}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

مقدار آن می باشیم. با این تعریف چیزی که دستگیرمان می شود این است که است که دامنه نمی

تواند از بالا یا پایین محدود باشد این جمله منزله آن است که $D_f = \mathbb{R}$ بلکه اگر $x_0 \in D_f$ آنگاه قطعاً

$(x_0 + T) \in D_f$ مانند تابع $f(x) = \tan x$ که نقاطی به فاصله دوره تناوب از یکدیگر با هم تعریف

شده هستند یا با هم تعریف نشده بنابر این انتظار متناوب بودن توابعی مانند $f(x) = \sin \sqrt{x}$ یا

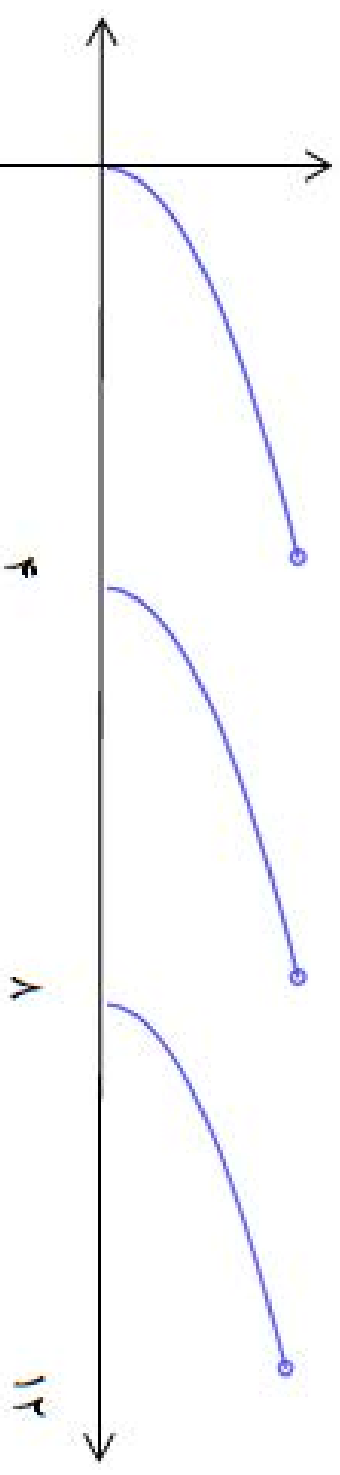
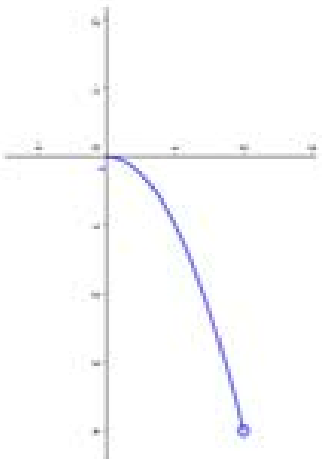
$$f(x) = \tan \sqrt{x^r - 5x + 6}$$

نداشته باشیم.

اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیر صفر آن نیز می توانند دوره تناوب محسوب شوند اما اگر بتوانیم کوچکترین آنرا پیدا کنیم به آن دوره تناوب اصلی گوئیم مثلاً π را می تواند دوره تناوب برای $f(x) = \sin x$ و 2π و 5π و ... نیز دوره تناوب می گردند اما مایلیم عددی کوچکتر از π را مانند 2π را دوره تناوب اصلی این تابع معرفی می کنیم هرچند که ممکن است تابعی متناوب باشد اما کوچکترین دوره تناوب آن پیدا نشود مانند توابع ثابت $c = f(x)$ بطوریکه $k = f(x + T) = f(x)$ که T می تواند هر عدد حقیقی باشد.

مثال: تابع f در بازه $[0.4]$ بصورت $f(x) = \sqrt{x}$ تعریف شده است اگر تابع g متناوب شده تابع f باشد

آنگاه $g(1397)$ چیست؟



$$g(1397) = g\left(\overbrace{1395}^{1394 \times 4} + 1\right) = g(1) = f(1) = \sqrt{1} = 1$$

چه خواهد شد؟

مثال: اگر تابع $f(x) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1}$ (طول دوره تناوب ۵) را متناوب نماییم قانون تابع در فاصله $[-\mu, \mu]$

حل: چون طول دوره تناوب ۵ می باشد پس دوره تناوب می تواند ۱ هم باشد یعنی دو دوره تناوب

$$f(x) = f(x - \mu \times 5) \quad \mu < x \leq 1 \mu \Rightarrow -\mu < \underbrace{x-1}_=t \leq \mu \Rightarrow -\mu < t \leq \mu \quad x-1=0=t \rightarrow x=t+1=0$$

$$f(t) = f(x) \rightarrow f(x-1=0) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1} \rightarrow f(t) = \frac{\mu(t+1=0)+1}{\mu(t+1=0)-1} = \frac{\mu t + \mu + 1}{\mu t + 1 - 1}$$

نکته: اگر T دوره تناوب اصلی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه T دوره تناوب اصلی

می باشد اما دوره تناوب اصلی $f(x)$ نیز می باشد $a - f(x), \frac{a}{f(x)}, f(x) + a, f(a + x), (a \neq 0)af(x), -f(x)$

$$y = f(ax) \quad T = \frac{T}{|a|} \quad (a \neq 0) \quad \text{برابر است با:}$$

بنابر این دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی 2π می باشد.

$$f(x) = -\Delta \sin\left(x + \frac{\pi}{\varphi}\right) \quad g(x) = \frac{\mu}{\cos(x - \mu)} \quad h(x) = \sqrt{\Delta} \sin(-x - \sqrt{\Delta})$$

و دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی π می باشد.

$$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{\mu}\right) \quad g(x) = -\sqrt{\mu} \cotan\left(-x + \frac{\pi}{\varphi}\right)$$

سوال: ثابت کنید تابع $y = \sin x$ دوره تناوب اصلی کوچکتر 2π از ندارد.

اثبات: از برهان خلف استفاده می کنیم فرض می کنیم دوره تناوب کوچکتری مانند T' داشته باشد
یعنی $0 < T' < 2\pi$ و $f(x + T') = f(x)$ در اینصورت داریم

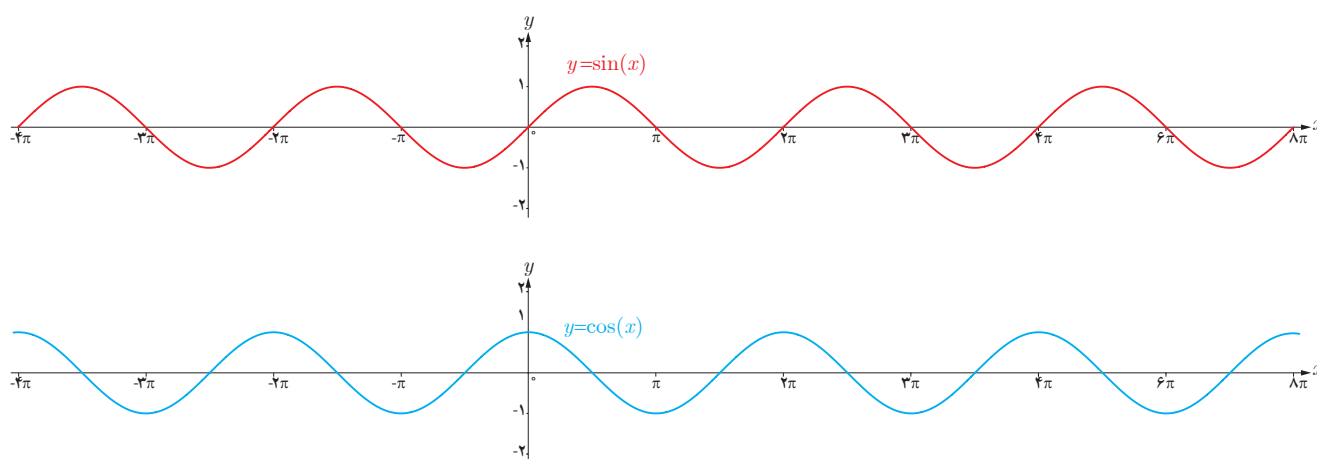
$$f(x + T') = f(x) \Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \rightarrow \sin x \cdot \cos T' + \cos x \cdot \sin T' = (\sin x)(1)$$

از آنجائیکه x را می توانیم هر کمائی بگیریم در نظر می گیریم $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f(x + T') = f(x) &\Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \xrightarrow{=1} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos T' + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin T' = \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)(1) \rightarrow \cos T' = 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow T' = 0 \quad \cancel{0 < T' < 2\pi}$$

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π ، ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تذکر: برای تعیین دوره تناوب باید تابع را حتی الامکان ساده کرد.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = \sin \mu x - \cos \Delta x$$

$$\begin{cases} \sin \mu x & T_1 = \frac{\mu \pi}{\mu} \\ \cos \Delta x & T_p = \frac{\mu \pi}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow T = \mu \pi$$

$$\mu) h(x) = \sin \mu x - \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \sin \mu x & T_1 = \frac{\mu \pi}{\mu} = \pi \\ \cos \pi x & T_p = \frac{\mu \pi}{\pi} = \mu \end{cases}$$

عدد گویا و π عددی گنگ هستند پس نمی

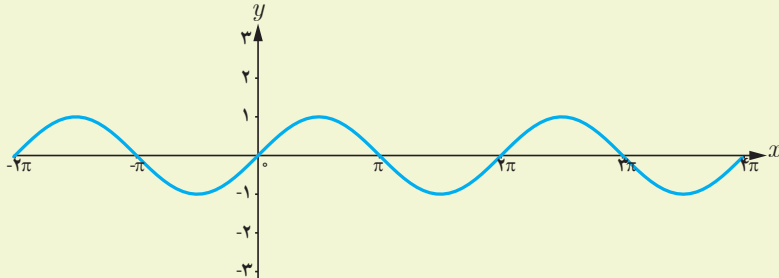
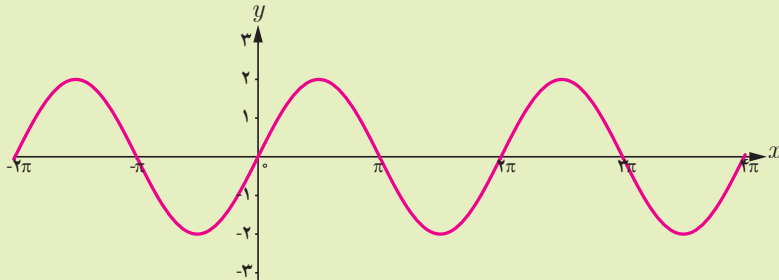
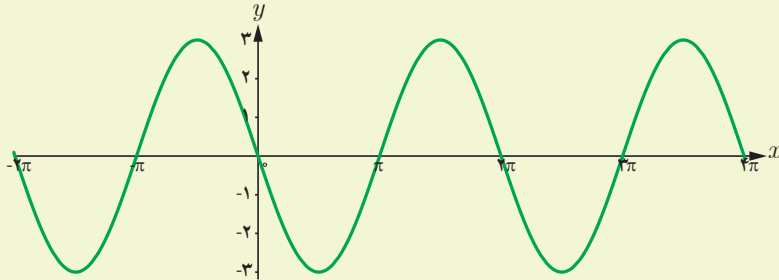
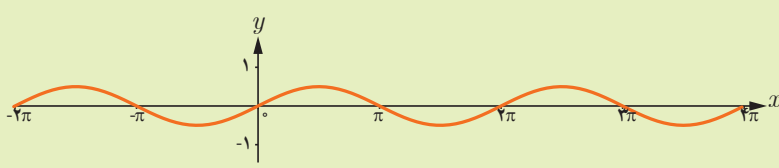
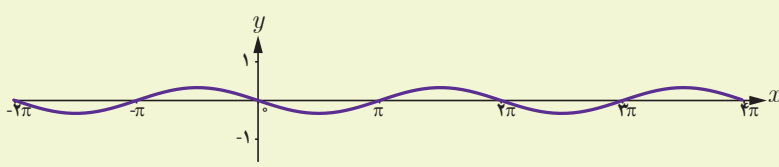
توان ک.م.م پیدا کرد

$$\mu) g(x) = \cos^r \Delta x - \tan^r \epsilon x + \sin^q \eta x$$

$$\begin{cases} \cos^r \Delta x & T_1 = \frac{\pi}{\Delta} \\ \tan^r \epsilon x & T_p = \frac{\pi}{\epsilon} \Rightarrow T = \frac{\mu \pi}{\mu} \\ \sin^q \eta x & T_p = \frac{\mu \pi}{\eta} \end{cases}$$

$$\mu) s(x) = \frac{\mu \sin x - \mu \cos x}{\epsilon \sin x + \Delta \cos x}$$

$$s(x) = \frac{\mu \sin x - \mu \cos x}{\epsilon \sin x + \Delta \cos x} = \frac{\mu \tan x - \mu}{\epsilon \tan x + \Delta} \rightarrow T = \pi$$

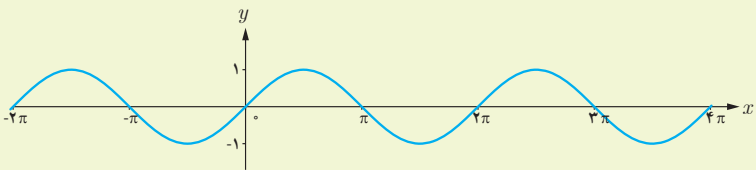
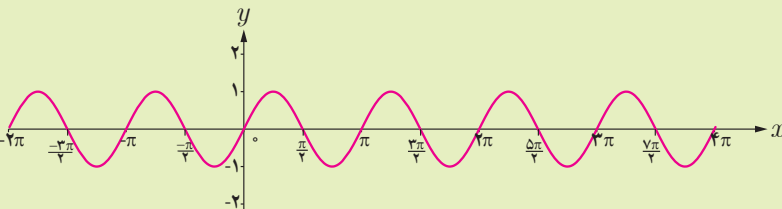
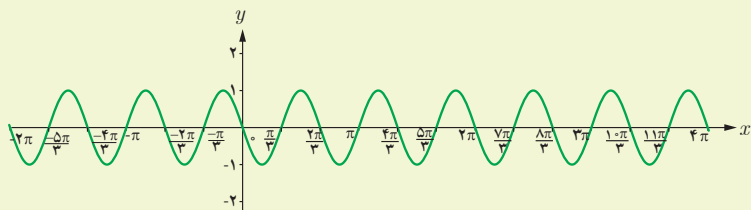
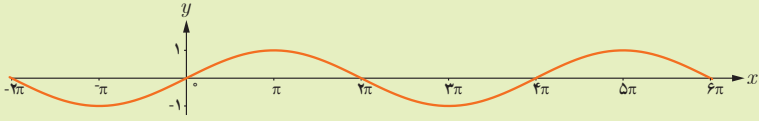
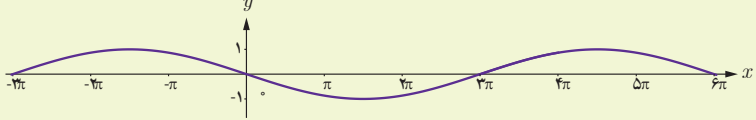
تابع	نمودار تابع	ماکزیم	مینیم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = 2 \sin x$		۲	-۲	2π
$y = -3 \sin x$		۳	-۳	2π
$y = \frac{1}{2} \sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π
$y = -\frac{1}{3} \sin x$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید. 2π

2π

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π
$y = \sin(3x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \sin \frac{x}{2}$		۱	-۱	4π
$y = \sin(-\frac{x}{3})$		۱	-۱	6π

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

نکاتی در مورد توابع متناوب :

۱- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{r_{n-1}}(ax+d)$, $\cos^{r_{n-1}}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد $(a \neq 0, n \in \mathbb{Z})$

۲- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{r_n}(ax+d)$, $\cos^{r_n}(ax+d)$, $\tan^n(ax+d)$, $\cotan^n(ax+d)$

برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد

۳- اگر g تابعی متناوب با دوره تناوب T و f تابعی دلخواه باشد آنگاه تابع fog در صورت معین بودن

متناوب خواهد بود که دوره تناوب اصلی آن T و یا کوچکتر از T می باشد. چنانچه f تابعی یک به یک

باشد دوره تناوب اصلی fog همان T است (کوچکتر نمی شود)

۴- اگر f متناوب با دوره تناوب T_1 و g تابعی متناوب با دوره تناوب T_2 باشد در صورتیکه T کوچکترین مضرب

مشترک T_1 و T_2 باشد آنگاه دوره تناوب توابع $f \pm g$, $f \times g$, $f \div g$ (و شاید کوچکتر از T)

مراحل رسم تابع $y = a \sin(bx + c) + d$

$$y = \sin x - 1$$

تابع شناخته شده است که از مبدأ مختصات بصورت صعودی جدا شده و دوره تناوب آن $\frac{2\pi}{1}$ می باشد.

$$y = \sin(bx) - 1$$

باز هم از مبدأ معتصات می گذرد که اگر $b > 0$ باشد صعودی و اگر $b < 0$ نزولی خارج می شود .

$$y = \sin(bx) \quad \text{که همچنان } \min = -1, \max = 1 \text{ و دوره تناوب } \frac{2\pi}{|b|} \text{ می باشد.}$$

$$y = \sin(bx + c) - 1$$

همان نمودار $y = \sin(bx)$ می باشد که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست حرکت می کنیم

$$y = \sin(bx + c) - 1 \quad \text{و } \min = -1, \max = 1 \text{ می باشد.}$$

$$y = a \sin x - 4$$

همان نمودار $y = \sin x$ می باشد که با توجه به ضریب a خواهیم داشت. $\min = -|a|$, $\max = |a|$

که در مبدأ مشخصات اگر $a > 0$ باشد صعودی و اگر $a < 0$ نزولی عبور می کند

$$y = a \sin (bx) - 5$$

مانند مرحله دوم دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد که $\min = -|a|$, $\max = |a|$ می باشد.

$$y = a \underbrace{\sin(bx + c)}_{g(x)}$$

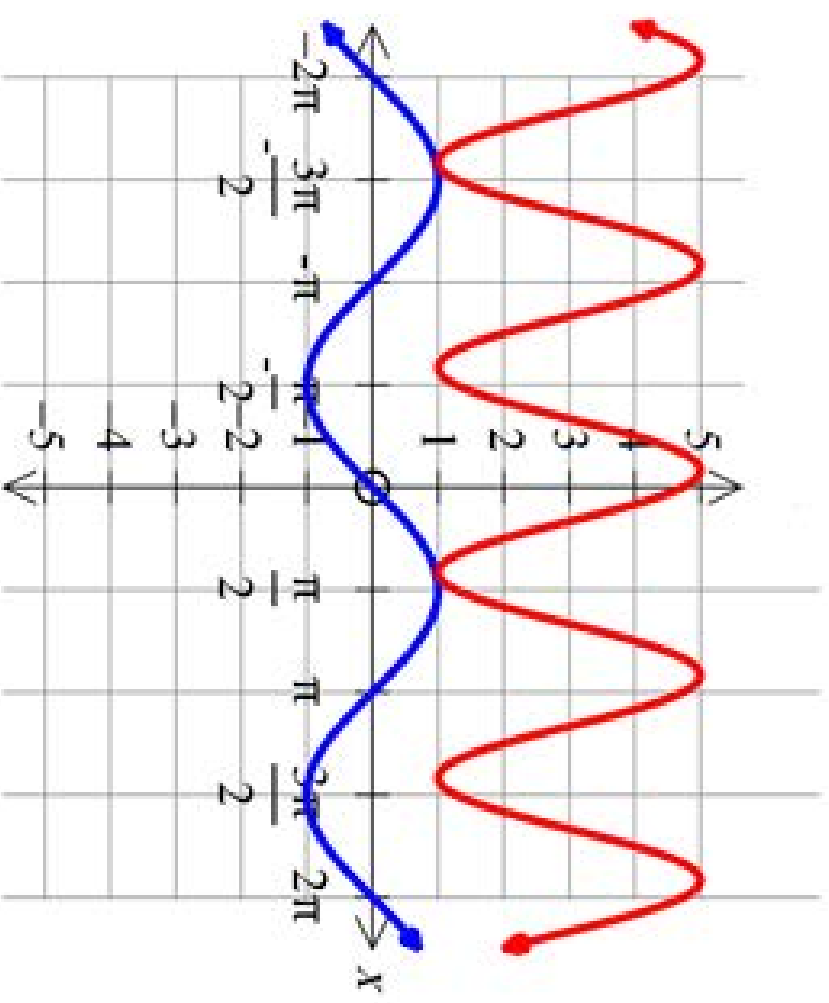
مانند نمودار $g(x) = \sin(bx + c)$ می باشد که بستگی به مقدار و علامت a ممکن است ماگزیمم

ومی نیمه غیر از 1 - داشته باشیم و از مبدأ خارج شود

$$y = a \sin(bx + c) + d - y$$

همان نمودار $g(x) = a \sin(bx + c)$ می باشد به اندازه d به سمت بالا یا پایین حرکت کرده است.

نمودار تابع $g(x) = -\mu \sin\left(\mu x - \frac{\pi}{\mu}\right) + \mu$ را رسم کنید با انتقال



سوال: در یک شهر در آبان ماه بطور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما ۳۲° درجه سانتیگراد و حداقل دما ۲° درجه سانتیگراد است یک معادله سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$C = \frac{m\mu + \mu_o}{\mu} = \mu \zeta \quad a = \frac{m\mu - \mu_o}{\mu} = \zeta \quad \frac{\mu\pi}{b} = \mu\epsilon \Rightarrow b = \frac{\mu\pi}{\mu\epsilon} = \frac{\pi}{1\mu}$$

$$y = \zeta \sin\left(\frac{\pi}{1\mu}x\right) + \mu\zeta$$

سوال: در یک مخزن آب شهری از یک طرف آب وارد می شود و پس از تصفیه آب از راه دیگر خارج می

شود ارتفاع ب در این مخزن طبق یک رابطه سینوسی است که هر روز تکرار می شود اگر در ساعت ۳ صبح

ارتفاع آن مانگزیسم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه کمتر داشته باشیم معادله این تابع

را بنویسید. در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است؟

$$a = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta - \delta}{\Delta} = \pi / \Delta \quad c = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta + \delta}{\Delta} = 1 \circ / \Delta \quad \frac{T}{\mu} = 1 \Delta - \mu = 1 \mu \rightarrow T = \mu \pi = \frac{\mu \pi}{b} \rightarrow b = \frac{\pi}{1 \mu}$$

$$\max(\mu, 1 \Delta) \rightarrow 1 \Delta = \pi / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times \mu + \alpha\right) + 1 \circ / \Delta \rightarrow \pi / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{\pi} + \alpha\right) = \pi / \Delta \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{\pi} + \alpha\right) = 1 = \sin \frac{\pi}{\mu}$$

$$\frac{\pi}{\mu} + \alpha = \frac{\pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\mu}$$

$$\min(1 \Delta, \delta) \rightarrow \delta = \pi / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \Delta + \alpha\right) + 1 \circ / \Delta \rightarrow \pi / \Delta \sin\left(\frac{\Delta \pi}{\pi} + \alpha\right) = -\pi / \Delta \rightarrow \sin\left(\frac{\Delta \pi}{\pi} + \alpha\right) = -1 = \sin \frac{\mu \pi}{\mu}$$

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} + \alpha = \frac{\mu \pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\pi}$$

$$t = 1 \mu \rightarrow y = \pi / \Delta \sin\left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \mu + \frac{\pi}{\pi}\right) + 1 \circ / \Delta = \pi / \Delta \left(-\sin \frac{\pi}{\pi}\right) + 1 \circ / \Delta = -\pi / \Delta \times \circ / \nabla + 1 \circ / \Delta = \nabla / \mu$$

سوال: جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله $p(t) = 10000 \cos \frac{\pi t}{5} + 8000$ باشد که $p(t)$ می باشد

تعداد یا جمعیت در سال t می باشد دوره تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم و می نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آنرا رسم کنید (در یک دوره تناوب) معادله را بر حسب سینوس بنویسید.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$$

زمانی ماگزیمم رخ میدهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

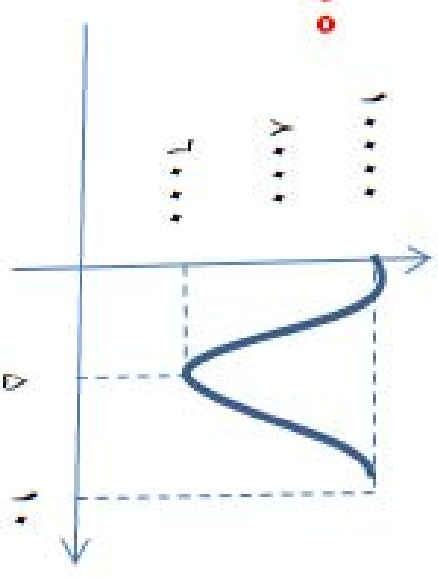
$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = 1 \Rightarrow p(0) = 10000 \times 1 + 8000 = 18000 \\ t=10 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow p(10) = 10000 \times 1 + 8000 = 18000 \end{cases}$$

یا هر مضربی از ۱۰

می نیمم زمانی رخ میدهد که کسینوس کمترین مقدار خود یعنی -۱ برگرداند یعنی در نقاط $5k + 5$

$$t=5 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = \cos \pi = -1 \Rightarrow p(5) = 10000 \times -1 + 8000 = 6000$$

$$p(t) = 10000 \sin \left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2} \right) + 8000$$



سوال: معادله ولتاژ یک دستگاه خانگی بر حسب تابع $\cos$ نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره تناوب) $\frac{1}{60}$ می

باشد بطوریکه تغییرات ولتاژ در بازه $[70, 170]$ است معادله این ولتاژ را بنویسید.

$$y = p(t) = a \cos(bt) + c, \frac{b\pi}{2} = \frac{1}{60} \Rightarrow b = 120\pi$$

$$a = \frac{170 - (-170)}{2} = 170, \quad c = \frac{170 + (-170)}{2} = 0$$

$$p(t) = 170 \cos(120\pi t)$$

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد. مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

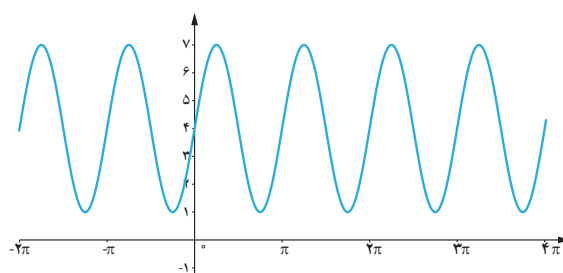
الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

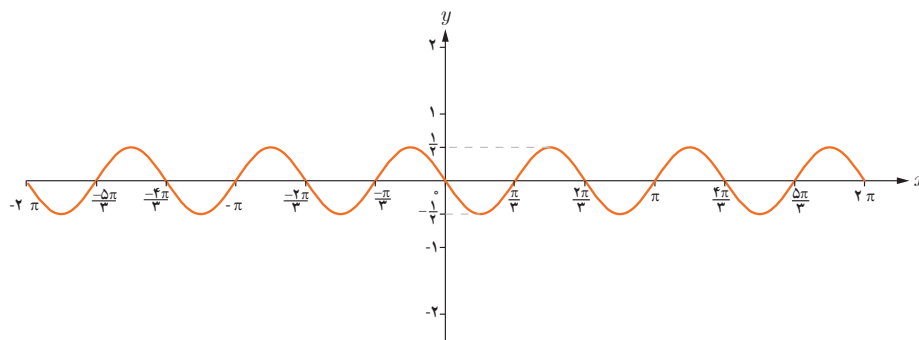
پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

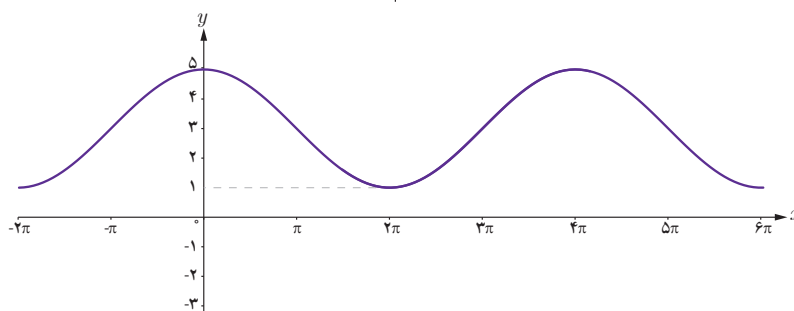
مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



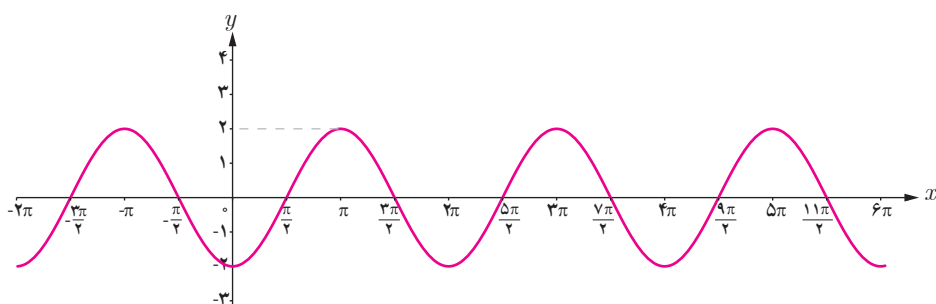
الف)



(ب)



(پ)



(ت)

حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و

طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محوره‌های x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است :

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

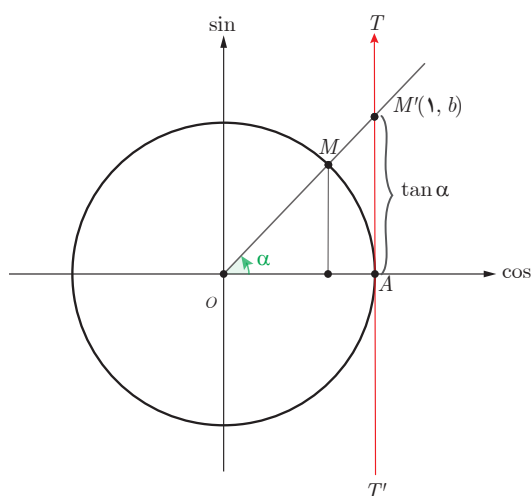
ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{3} \sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2 \cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار

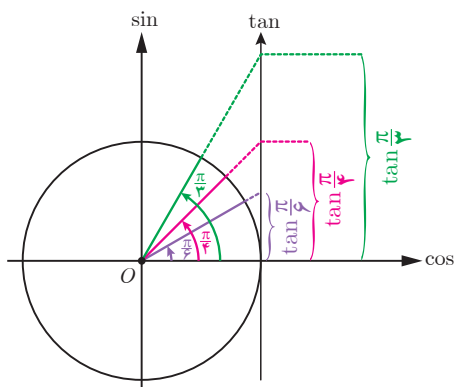
دارد، مقداری منفی است؟
چون در ناحیه اول و سوم سینوس و کسینوس هم علامت هستند ولی در ناحیه های دوم و چهارم مختلف علامه هستند
پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

خیر

خیر

تغییرات تانژانت

فعالیت



با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوايا			
افزایشی یا کاهش	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{11\pi}{6}$

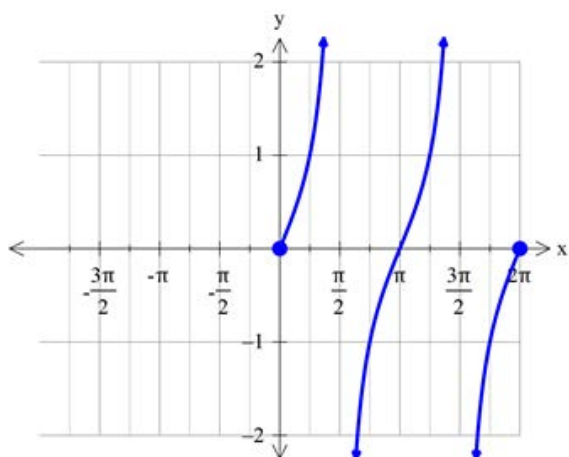
پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\searrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$



کار در کلاس

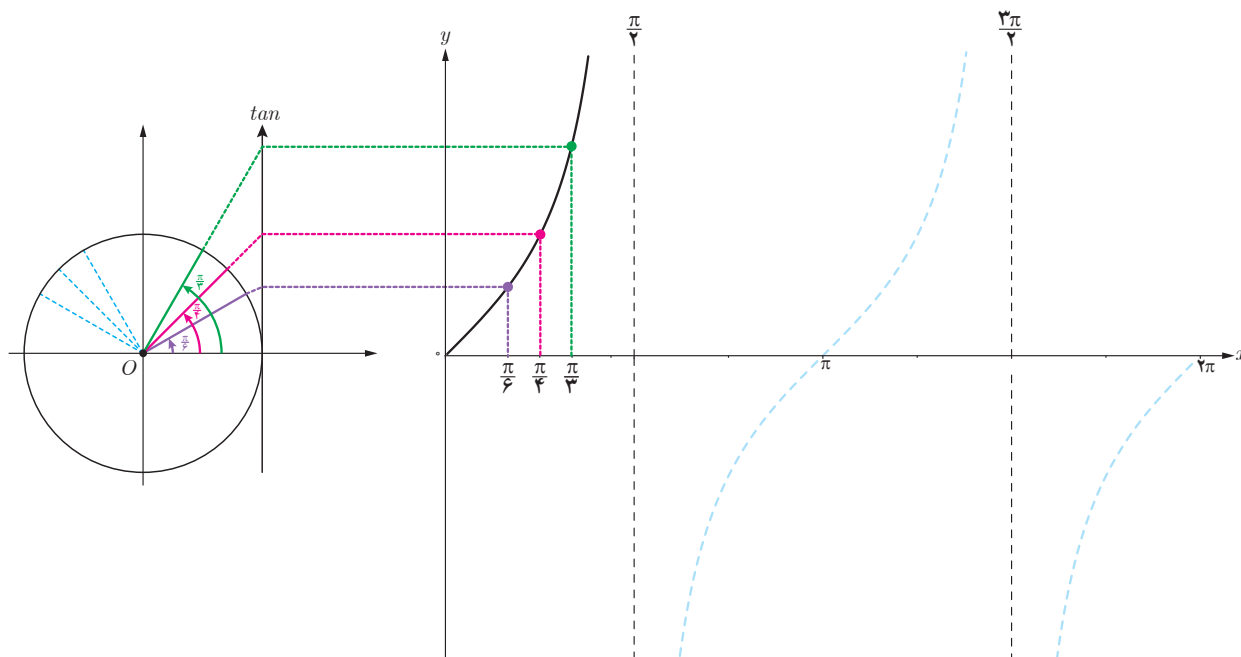
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

تابع در دامنه خود همواره صعودی است

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل $\tan$ مدنظر نیست.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 3x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

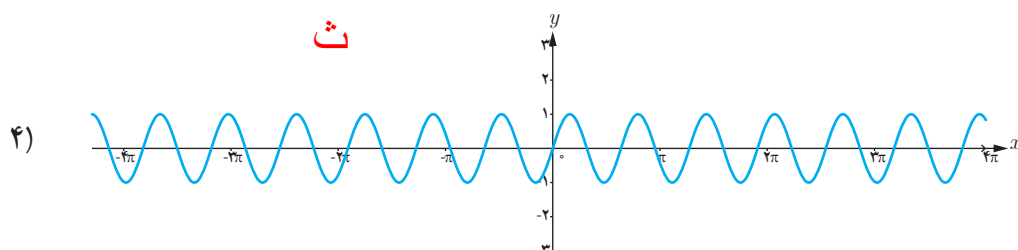
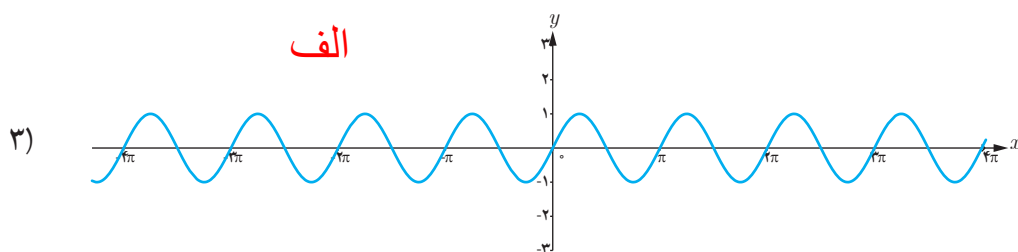
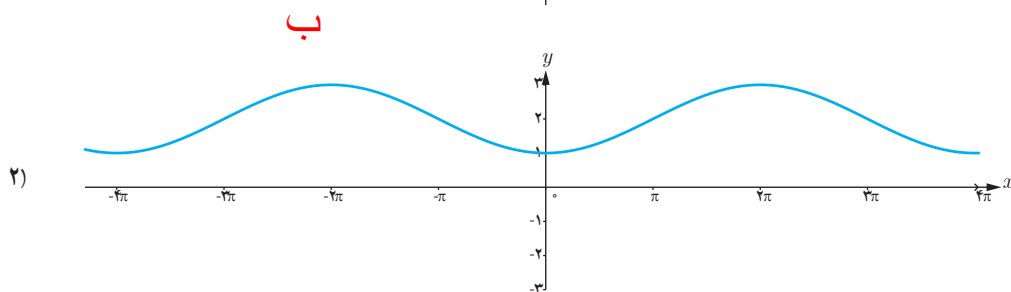
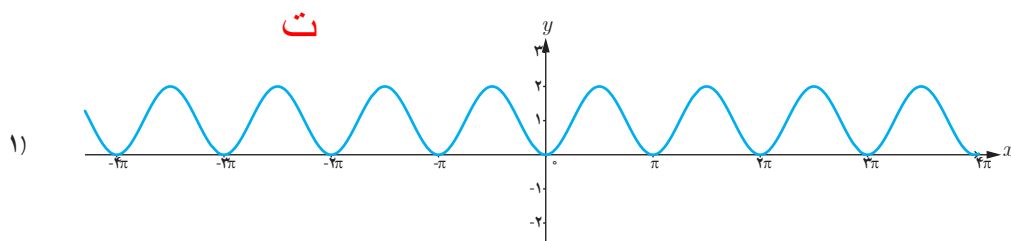
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

پ) $y = \sin 2x$

ت) $y = 1 - \cos 2x$



حل تمرین صفحه ۴۰ تمرین ۸:

$$y = 1 + \rho \sin \sqrt{x} \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\sqrt{x}|} = \frac{\rho \pi}{\sqrt{x}} \quad \begin{array}{l} \max = |1| + 1 = \rho \\ \min = -|1| + 1 = -1 \end{array}$$

$$y = \sqrt{\rho} - \cos \frac{\pi}{\rho} x \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\frac{\pi}{\rho}|} = \rho \quad \begin{array}{l} \max = |-1| + \sqrt{\rho} = 1 + \sqrt{\rho} \\ \min = -|-1| + \sqrt{\rho} = -1 + \sqrt{\rho} \end{array}$$

$$y = -\pi \sin \left(\frac{x}{\rho} \right) - \rho \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\frac{1}{\rho}|} = \rho \pi \quad \begin{array}{l} \max = |-\pi| - \rho = \pi - \rho \\ \min = -|-\pi| - \rho = -\pi - \rho \end{array}$$

$$y = -\frac{\rho}{\rho} \cos \rho x \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad T = \frac{\rho \pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{\rho \pi}{|\rho|} = -\frac{\rho}{\rho} \pi \quad \begin{array}{l} \max = \left| -\frac{\rho}{\rho} \right| = -\frac{\rho}{\rho} \\ \min = -\left| -\frac{\rho}{\rho} \right| = -\frac{\rho}{\rho} \end{array}$$

۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

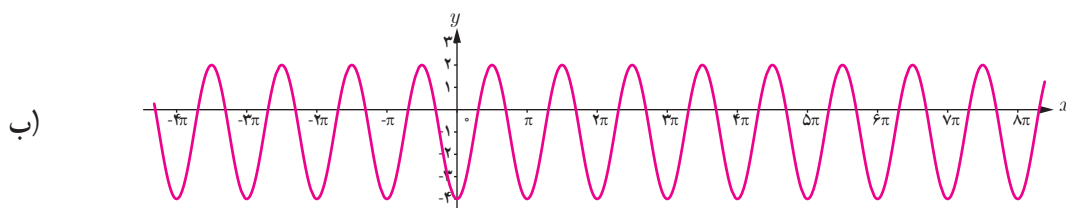
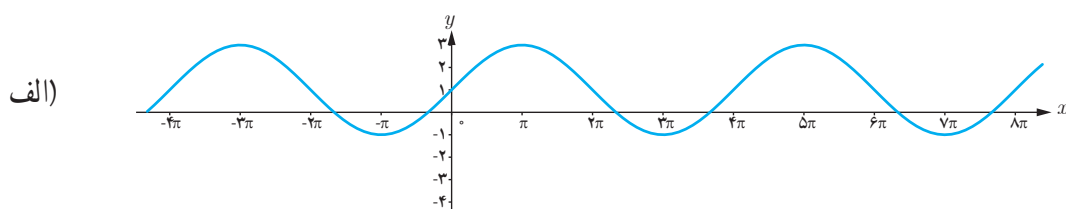
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. **نادرست**

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید :

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	2π
sin	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	تن	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن

تمرین ۳:

$$y = a \sin bx + c \quad \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$T = \pi \quad \max = \mu \quad \min = -\mu \Rightarrow a = \frac{\mu - (-\mu)}{\mu} = \mu \quad c = \frac{\mu + (-\mu)}{\mu} = 0 \quad \pi = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \mu \sin \mu x$$

$$T = \mu \quad \max = 9 \quad \min = \mu \Rightarrow a = \frac{9 - \mu}{\mu} = \mu \quad c = \frac{9 + \mu}{\mu} = 5 \quad \mu = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{\mu}{\pi} \Rightarrow y = \mu \sin \frac{\mu\pi}{\mu} x + 5$$

$$T = \pi \pi \quad \max = -1 \quad \min = -\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{-1 - (-\sqrt{2})}{\mu} = \mu \quad c = \frac{-1 + (-\sqrt{2})}{\mu} = -\pi \quad \pi\pi = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{1}{\mu} \Rightarrow y = \mu \sin \left(\frac{1}{\mu} x \right) - \pi$$

$$T = \frac{\pi}{\mu} \quad \max = 1 \quad \min = -1 \Rightarrow a = \frac{1 - (-1)}{\mu} = 1 \quad c = \frac{1 + (-1)}{\mu} = 0 \quad \frac{\pi}{\mu} = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \sin(\mu x)$$

حل تمرين ٤: الف)

$$\max = \rho, \min = -1, T = \pi$$

$$C = \frac{\rho + (-1)}{\rho} = 1, a = \frac{\rho - (-1)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\pi} = \rho$$

$$y = \rho \sin\left(\frac{1}{\rho}x\right) + 1$$

$$\max = \rho, \min = -\rho, T = \pi$$

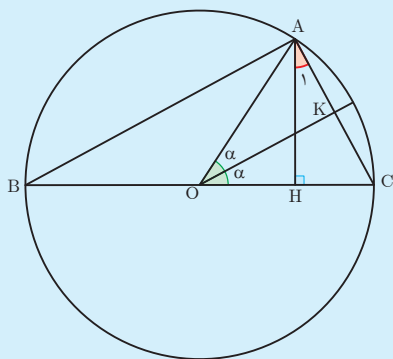
$$C = \frac{\rho + (-\rho)}{\rho} = -1, a = \frac{\rho - (-\rho)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\pi} = \rho$$

ب)

$$y = \rho \cos\left(\frac{\rho}{\rho}x\right) - 1$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 3^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 3° است و نیز می‌دانیم $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 3^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 3^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن^۱.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $\triangle OAK$ داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$. همچنین از مجموع زوایای $\triangle ABC$ به دست می‌آید:

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $\triangle AHC$ داریم:

$$\triangle AHC: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $\triangle OAC$ و $\triangle AHC$ به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAC: AH = \sin 2\alpha \\ \triangle AHC: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در $\triangle OAH$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $\triangle AHC$ داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

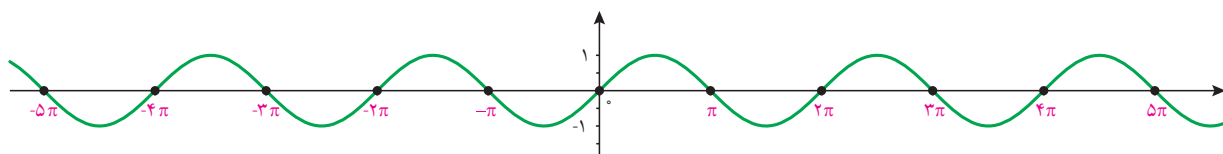
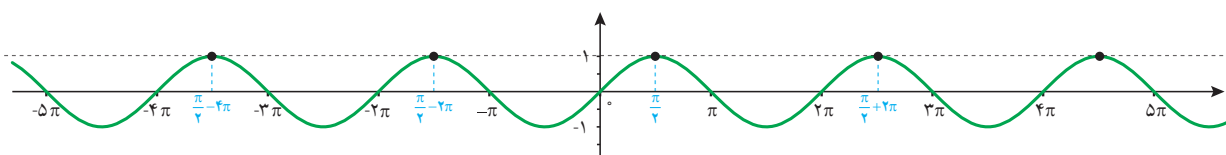
$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, 3\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.

جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{6} - 4\pi, \frac{\pi}{6} - 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

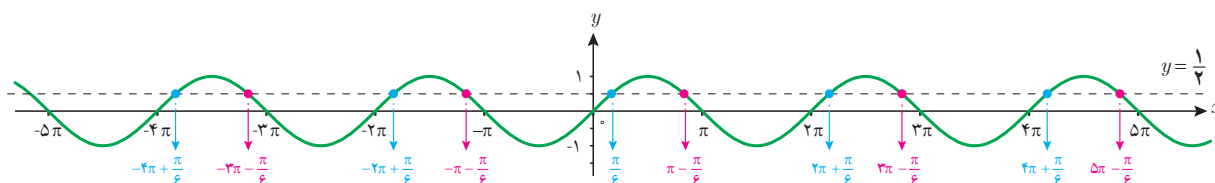
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$$

فعالیت

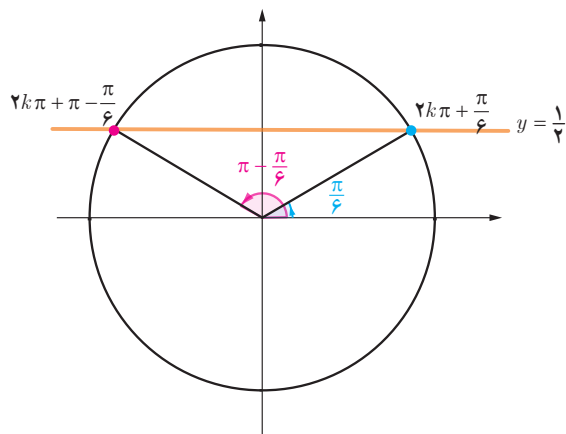
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



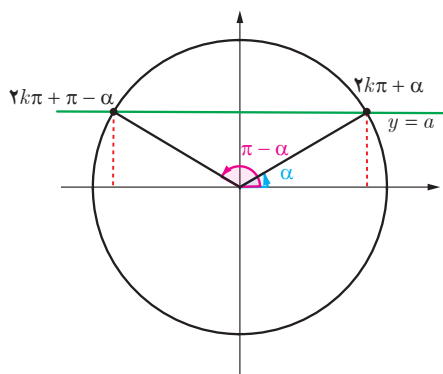
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **این معادله بی شمار جواب دارد**

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



$$\dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots \text{ هم انتها با } \frac{\pi}{6}$$

$$\dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots \text{ هم انتها با } \pi - \frac{\pi}{6}$$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

$$\sin x = \frac{-\sqrt{1}}{2} = \frac{-\sqrt{1}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ب) } \sin x + \frac{\sqrt{1}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

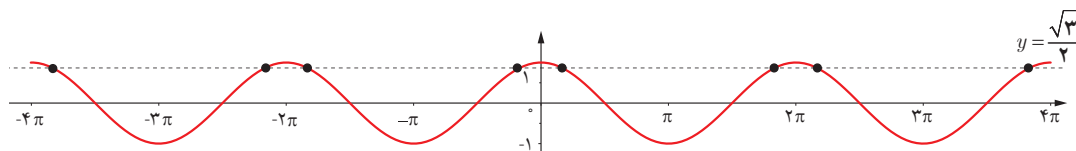
معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.

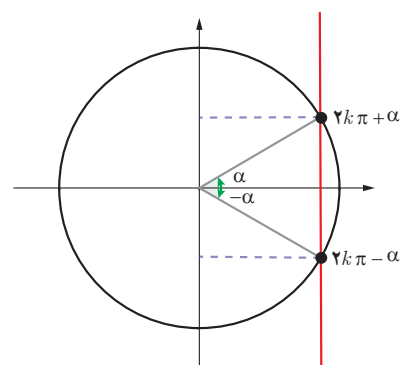
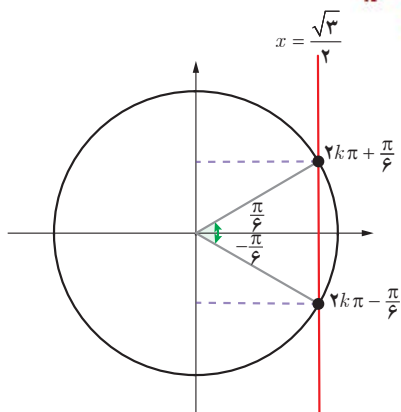


$$x = \frac{\pi}{6}, x = 2\pi - \frac{\pi}{6}, x = 2\pi + \frac{\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$$

الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{ب:} \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{زاویه هایی هم انتها یا} &\Rightarrow \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \longrightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} \quad \text{زاویه هایی هم انتها یا} &\Rightarrow -\frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{6}, -4\pi - \frac{\pi}{6} \longrightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

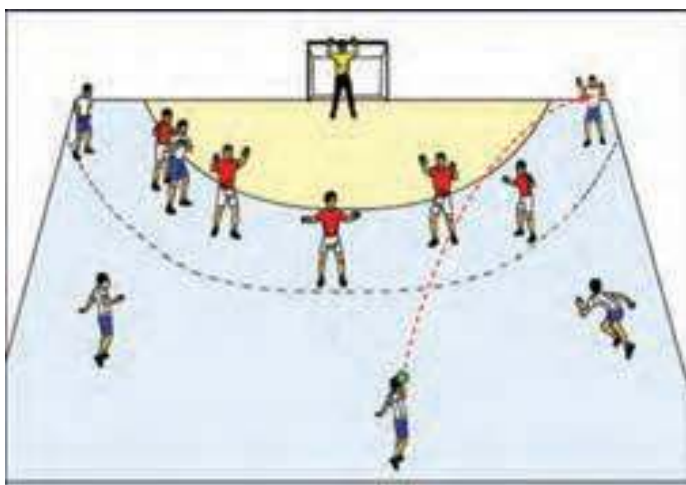
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می آید :

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین مثبت یک و منفی یک می باشد

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $\cos 2\alpha$

(ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x$

(پ) $\cos x = \cos 2x$

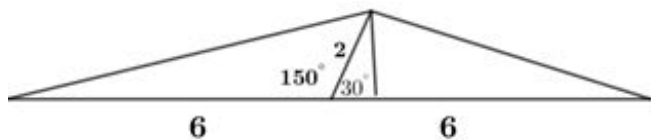
(ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

(ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

(ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$

(ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C = 3 \rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \rightarrow C = 30^\circ, 150^\circ$$

حل تمرین صفحه ۴۸:

(الف)

$$\sin^r \alpha = 1 - \left(\frac{\Delta}{1\mu} \right)^r = \frac{144}{159} \rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos^p \alpha = \mu \cos^r \alpha - 1 = \mu \times \frac{\mu \Delta}{159} - 1 = -\frac{119}{159}$$

(ب)

$$\sin^p \alpha = \mu \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \mu \times \frac{12}{13} \times \frac{\Delta}{13} = \frac{1\mu^2}{159}$$

حل تمرین ۳:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{p}}{p}}{2} = \frac{p - \sqrt{p}}{2p} \rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{p - \sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{p}}{p}}{2} = \frac{p + \sqrt{p}}{2p} \rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{p + \sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

$$\sin \frac{\pi}{\mu} = \sin \mu x$$

(الف)

$$1 = \sin \mu x \rightarrow \mu x = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu}$$

(ب)

$$\cos \mu x - \cos x + 1 = 0$$

$$\mu \cos^{\mu} x - 1 - \cos x + 1 \rightarrow \cos x (\mu \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \mu \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{\mu} = \cos \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \mu k \pi \pm \frac{\pi}{\mu} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \mu x \rightarrow \begin{cases} x = \mu k \pi + \mu x \rightarrow x = -\mu k \pi \\ x = \mu k \pi - \mu x \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(ج)

$$\cos \mu x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - \mu \sin^{\nu} x - \sin x = 0 \rightarrow \mu \sin^{\nu} x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} \rightarrow t^{\nu} + t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{5} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \mu k \pi - \frac{\pi}{\mu} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

(د)

$$\cos^{\nu} x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow 1 - \sin^{\nu} x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow \sin^{\nu} x + \sin x - \frac{\mu}{\mu} = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} \rightarrow t^{\nu} + t - \frac{\mu}{\mu} = 0 \rightarrow \Delta = 1 + \mu = \mu \rightarrow t = \frac{-1 \pm \mu}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{5} \\ \sin x = -\frac{\mu}{\mu} \quad \text{غير ممكن} \end{array} \right.$$

$$\sin X - \cos pX = 0$$

$$\sin X = \cos pX = \sin\left(\frac{\pi}{p} - pX\right) \rightarrow \begin{cases} X = pK\pi + \frac{\pi}{p} - pX \rightarrow X = \frac{pK\pi}{p} + \frac{\pi}{p} \\ X = pK\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{p} - pX\right) \rightarrow X = -pK\pi + \frac{\pi}{p} \end{cases}$$

(2)