



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



عکاس: سپید مهدی حسینی

پل سفید - اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانه کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

ترکیب توابع

تابع وارون

درس اول

درس دوم

درس سوم

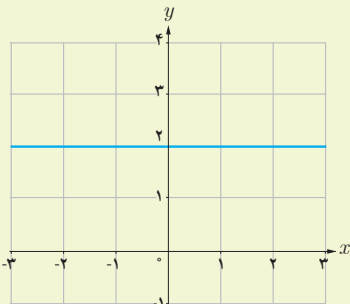
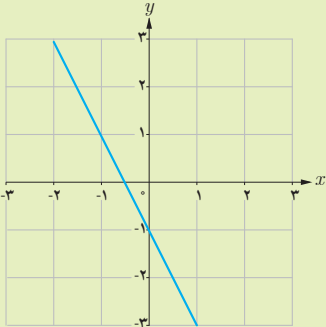
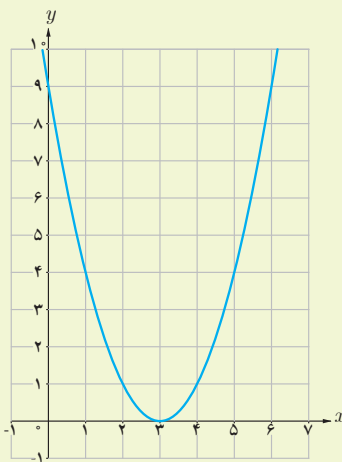
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند. هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{5}x^2$$

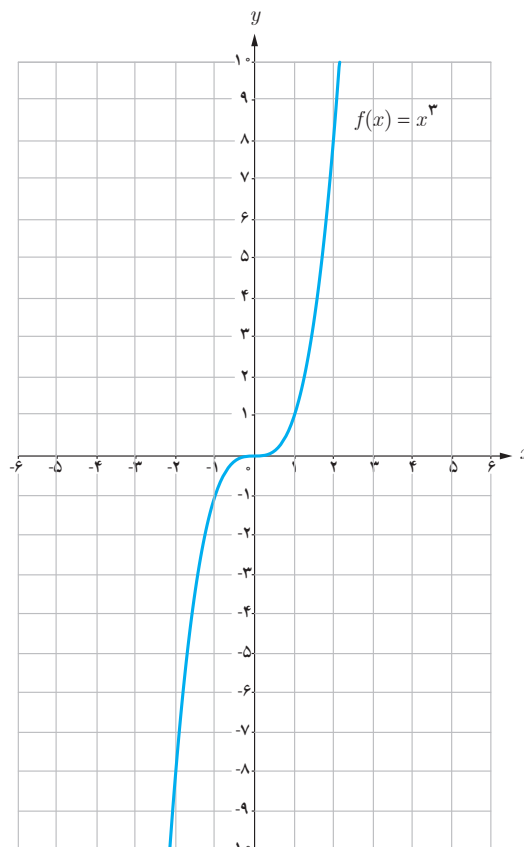
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه دوم
ضابطه کلی	$f(x) = b$	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$f(x) = 2$ 	$f(x) = -2x - 1$ 	$f(x) = x^2 - 6x + 9$ 

تابع درجه ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



خواندنی

الگوی کلی لانه زنبور عسل به صورت یک شش ضلعی است که در دور اول با شش تاشش ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تاشش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

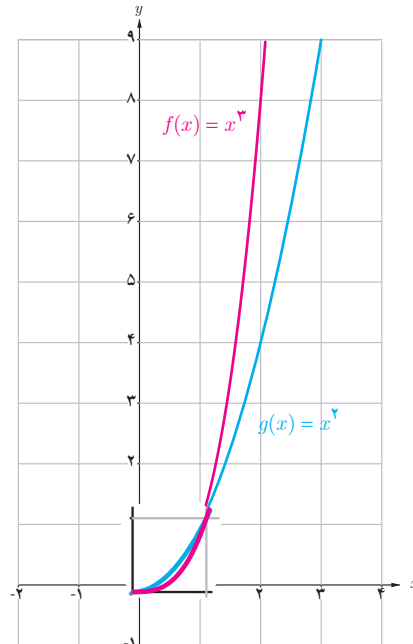
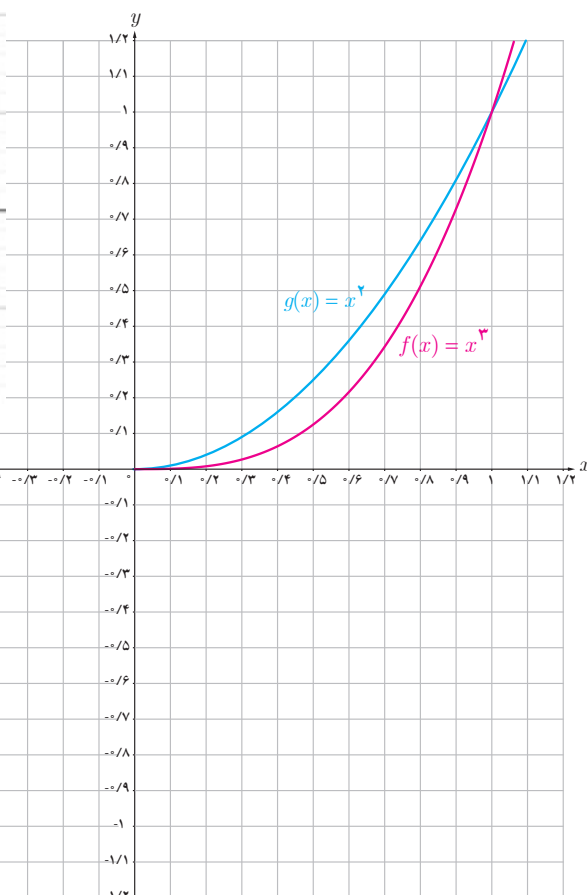
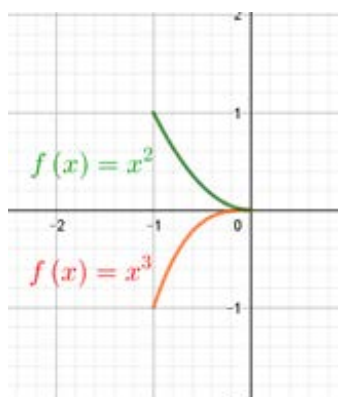
تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r) = 3r^2 - 3r + 1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r = 1, 2, 3$ به دست آورید؟



الف: خیر، برای مقادیر بین صفر و یک نمودار x^3 پایین نمودار x^2 قرار دارد

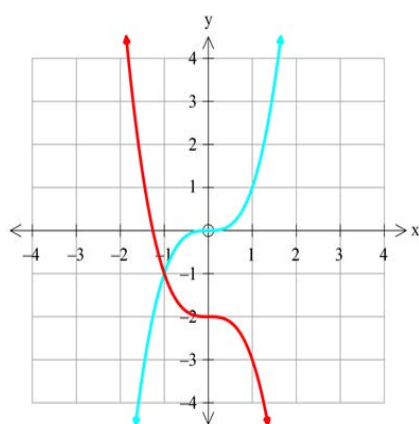
با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ که برای اعداد نامنفی رسم شده اند:

الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x) = x^2$ بالای نمودار $g(x) = x^3$ قرار دارد؟ (ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.

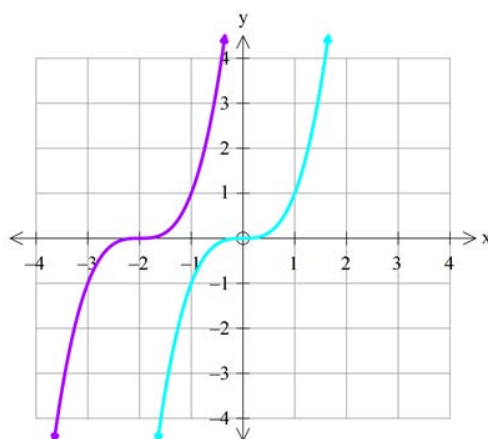


با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

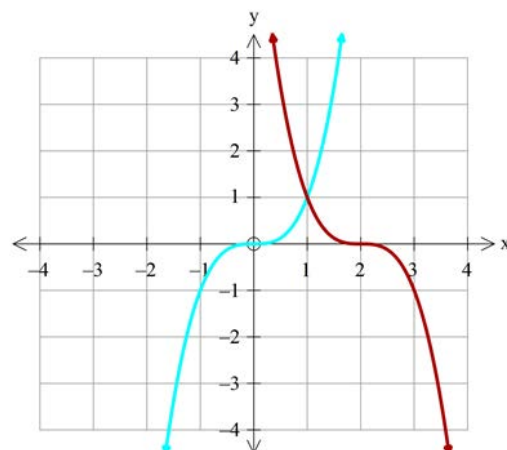
الف) $y = -x^2 - 2$



ب) $y = (x + 2)^2$



پ) $y = -(x - 2)^2$



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ت) $y = (x+1)^3 - 1$ ۷

ج) $y = x^3 + 1$ ۴

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

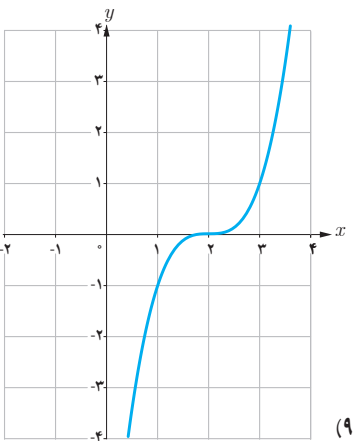
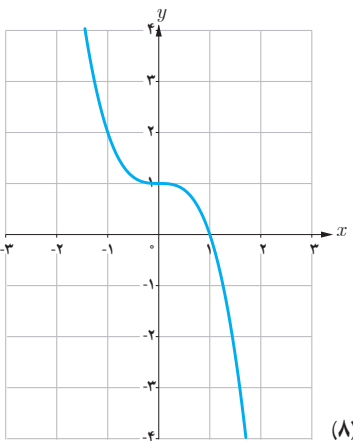
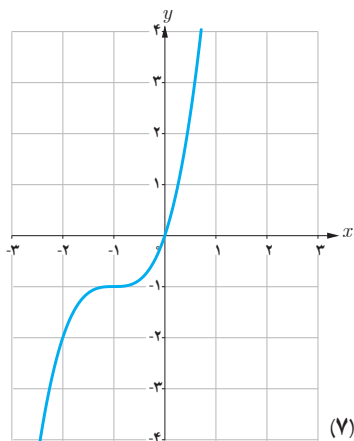
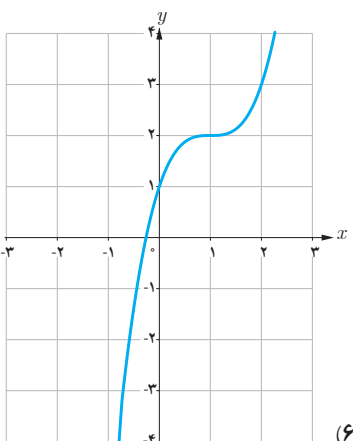
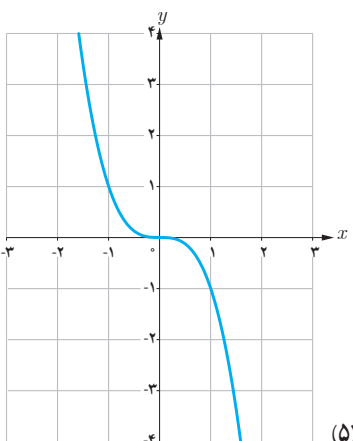
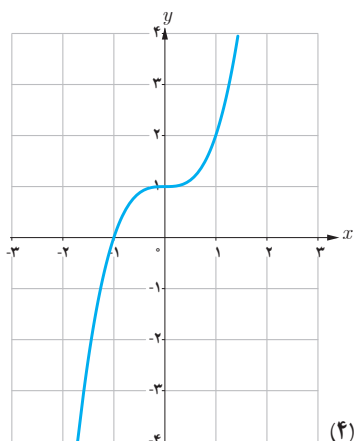
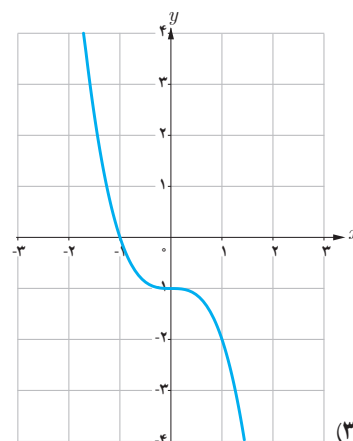
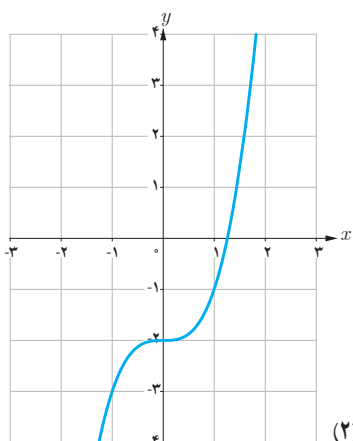
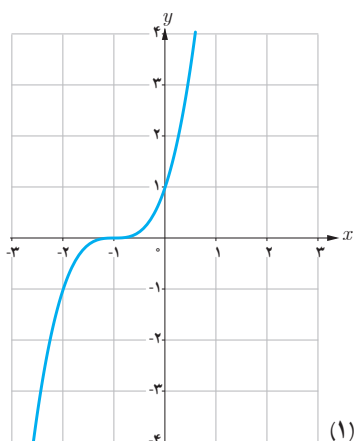
ث) $y = -x^3$ ۵

ح) $y = -x^3 - 1$ ۳

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

ج) $y = (x+1)^3$ ۱

خ) $y = x^3 - 2$ ۲



توابع صعودی و نزولی:

فعالیت

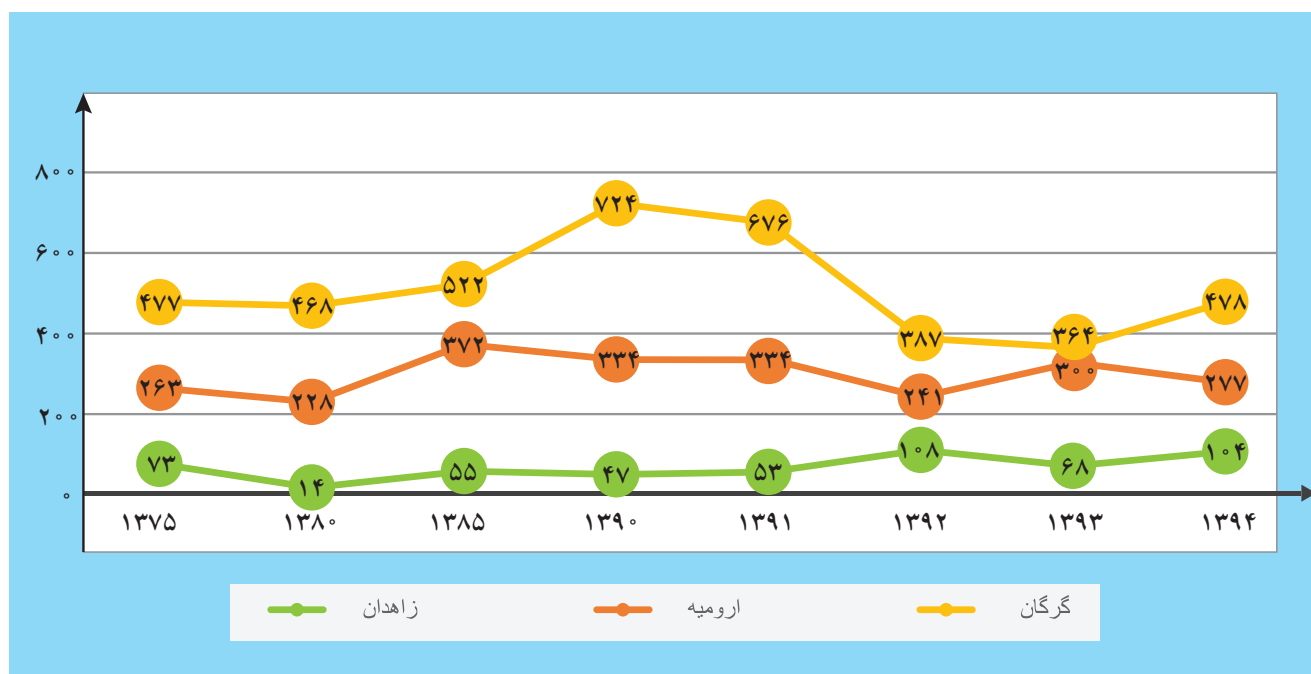
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

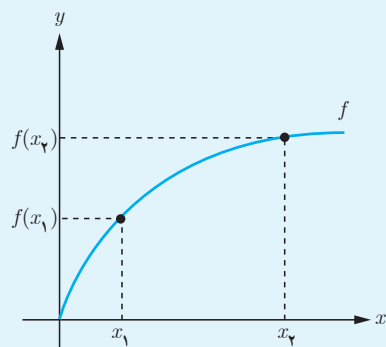
از سال ۱۳۸۰ تا سال ۱۳۹۰

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

در بازه زمانی ۹۱ تا ۹۲ و بازه زمانی ۹۳ تا ۹۴

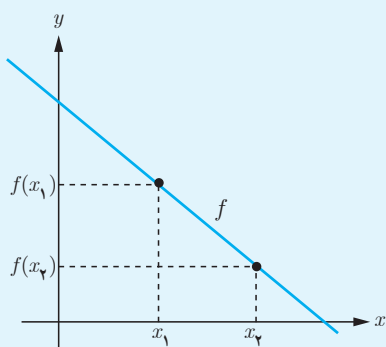


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)^۱



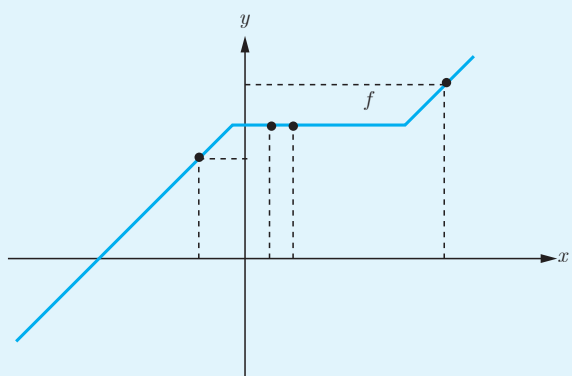
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



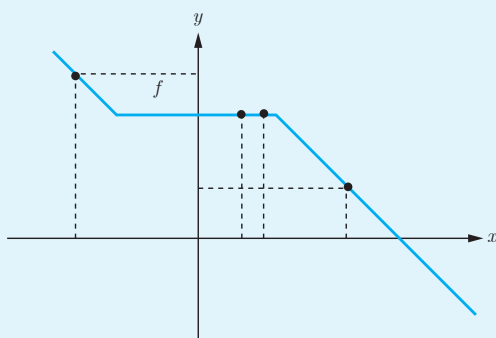
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

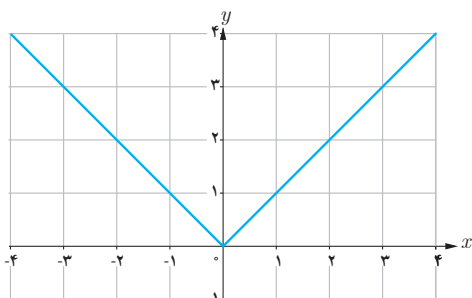


تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

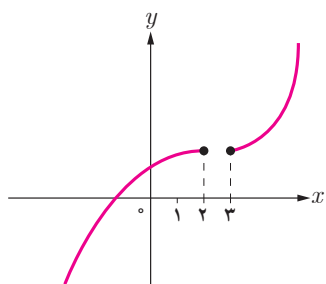


ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

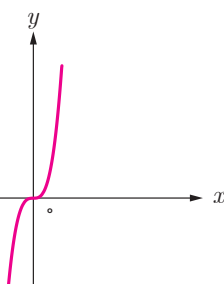
مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

کار در کلاس

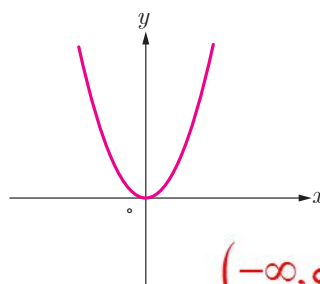
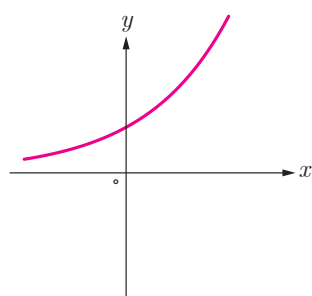
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



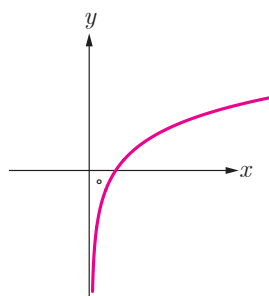
(الف) صعودی



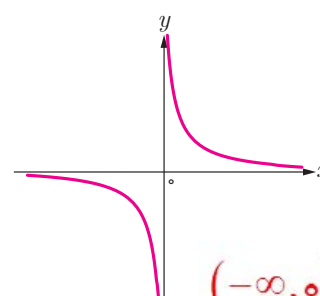
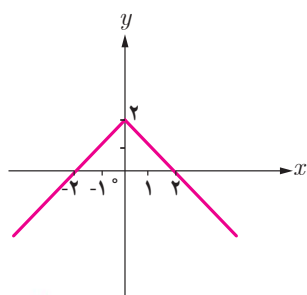
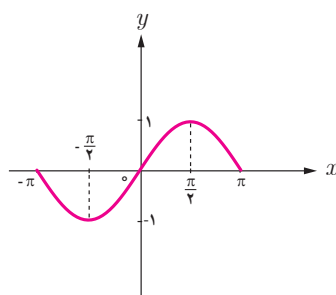
(ب) اکیداً صعودی

(پ) اکیداً صعودی
 $(-\infty, 0] \rightarrow$ اکیداً نزولی
 $[0, +\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی

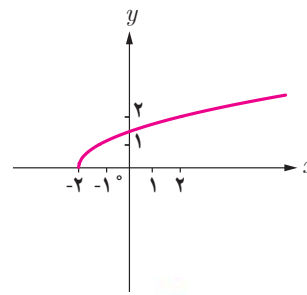
(ت) اکیداً صعودی



(ث) اکیداً صعودی

(ج) اکیداً نزولی (نزولی)
 $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی (نزولی)
 $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی (نزولی)(ح) صعودی
 $(-\infty, 0] \rightarrow$ صعودی
 $[0, +\infty) \rightarrow$ نزولی

(خ)

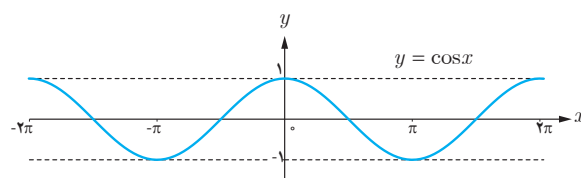
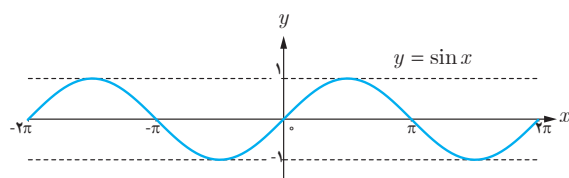


(ز)

اکیداً صعودی
 $[-2, +\infty)$

در بازه‌های $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ، $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ نزولی و در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

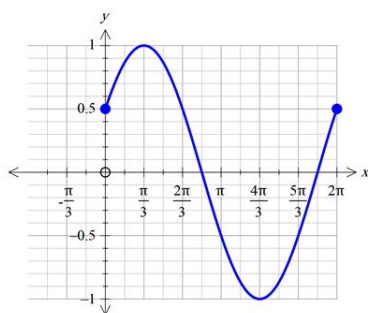


x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

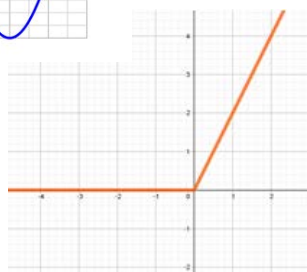
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$



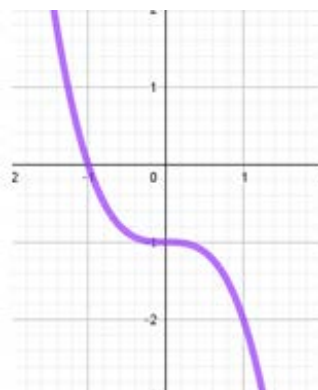
در بازه‌های $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ صعودی و در بازه $[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ نزولی

ب) $g(x) = x + |x|$



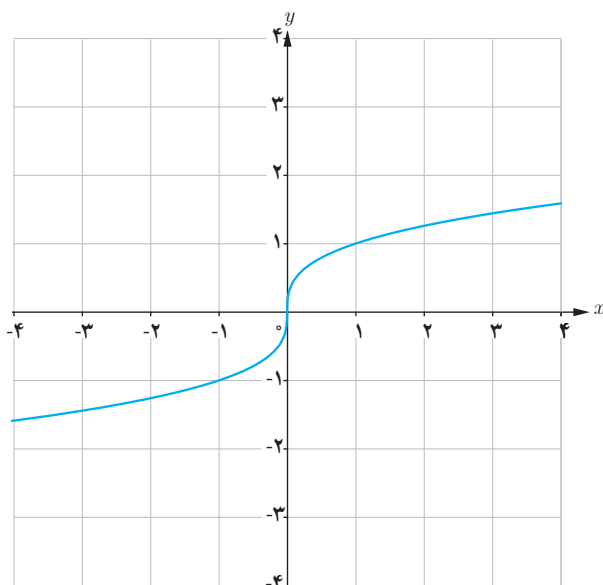
در $\mathbb{R}$ صعودی
ب: در $\mathbb{R} \geq 0$ اکیداً صعودی
در $\mathbb{R} \leq 0$ ثابت

پ) $t(x) = -x^3 - 1$



اکیداً نزولی

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ **اکیداً صعودی**

ب) این تابع یک به یک است؟ **بله**

پ) آیا تابعی جواد درد کاه‌کیدصه‌اعوی‌دا اکیداً نزولی باشد ولی

یک به یک نباشد؟

خیر، طبق تعریف دو ایکس متمایز دارای تصاویر متمایز هستند پس یک به یک می‌باشند

تمرین

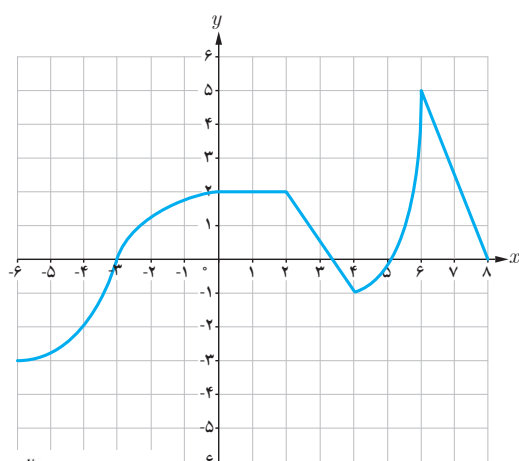
۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y = (x-1)^3 - 1$

ب) $y = (x+2)^3 - 2$

۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



۳) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

$x \in (-\infty, 0] \cup [4, 6]$ **صعودی**

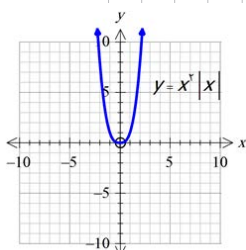
$x \in [2, 4] \cup [6, 8]$ **نزولی**

$x \in [0, 2]$ **ثابت**

۴) تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵) تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟ **صفر**

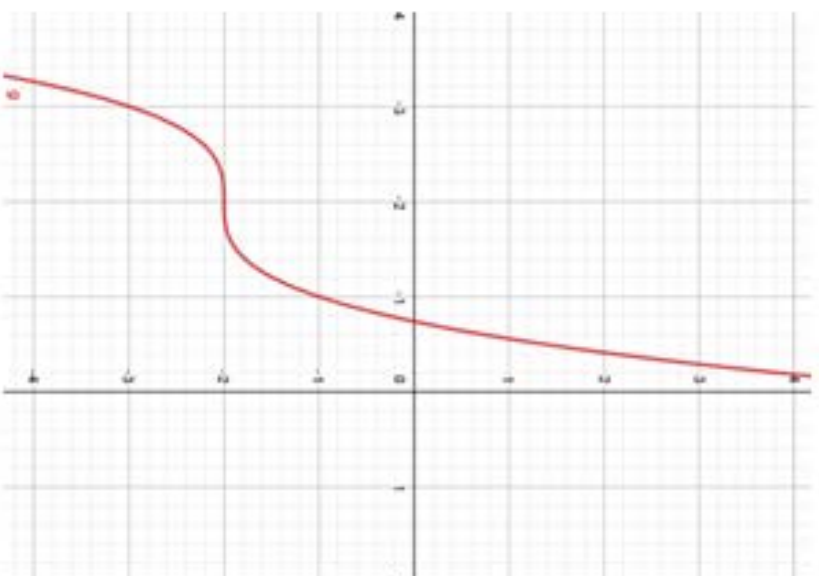
۶) تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.



$\begin{cases} y = 3^x \\ y = x^3 \end{cases}$ **اکیداً صعودی**

$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = -x^3 \end{cases}$ **اکیداً نزولی**

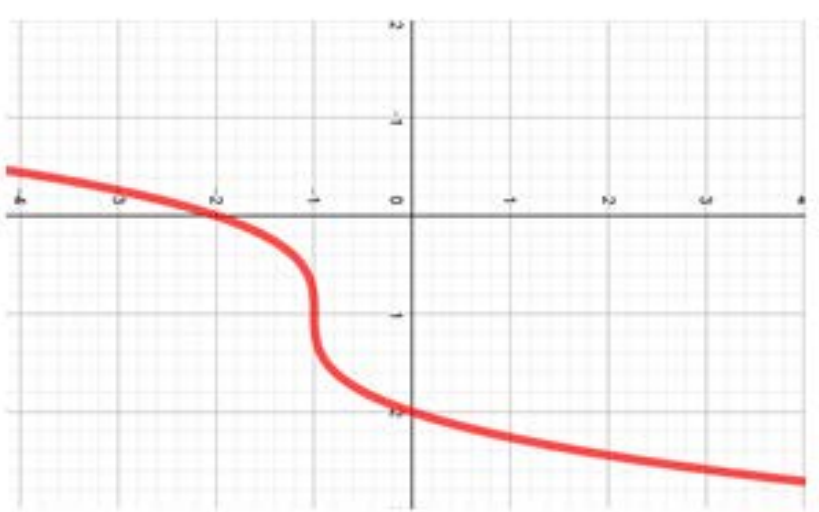
ب.



$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

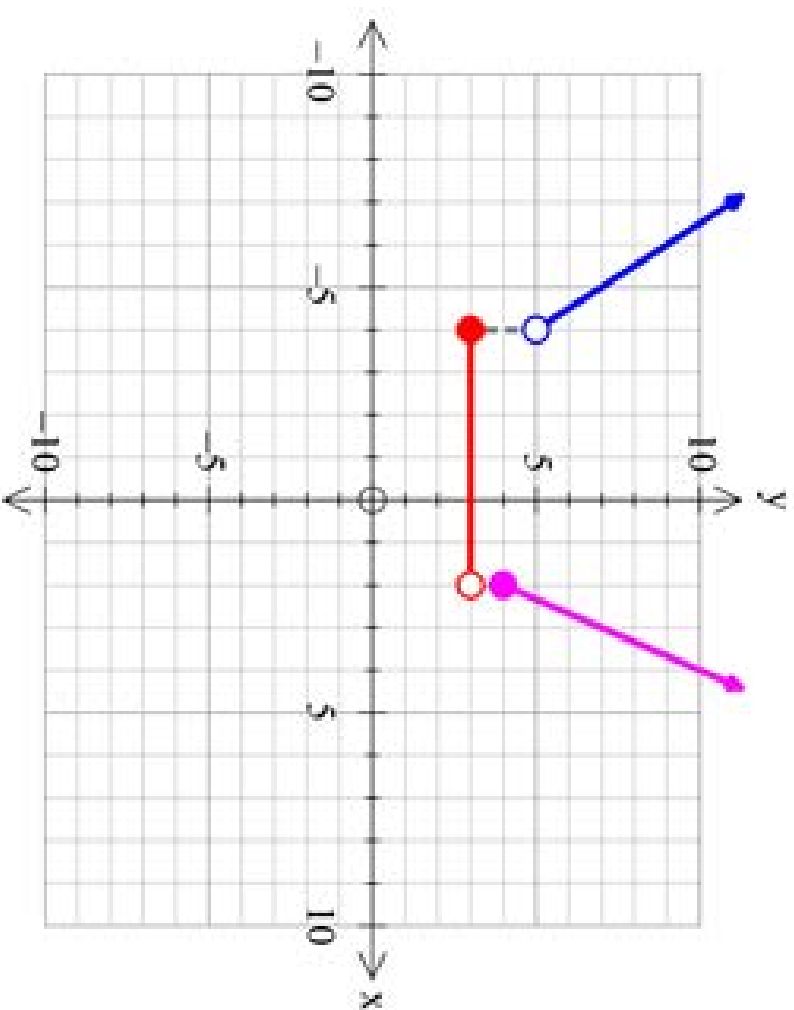
ج. الف



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

مرکز



$$x \in [p, +\infty)$$

صعودی

$$x \in (-\infty, -k)$$

نزولی

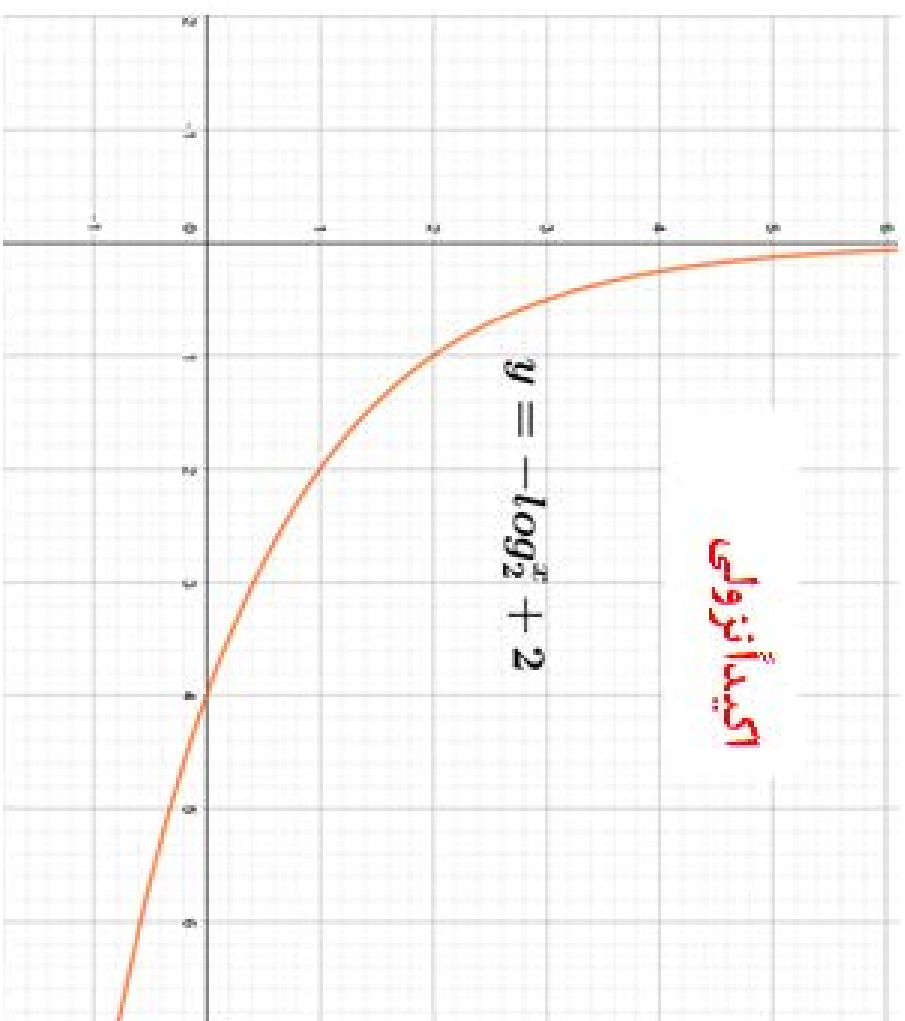
$$x \in [-k, p)$$

ثابت

مرکز ۴:

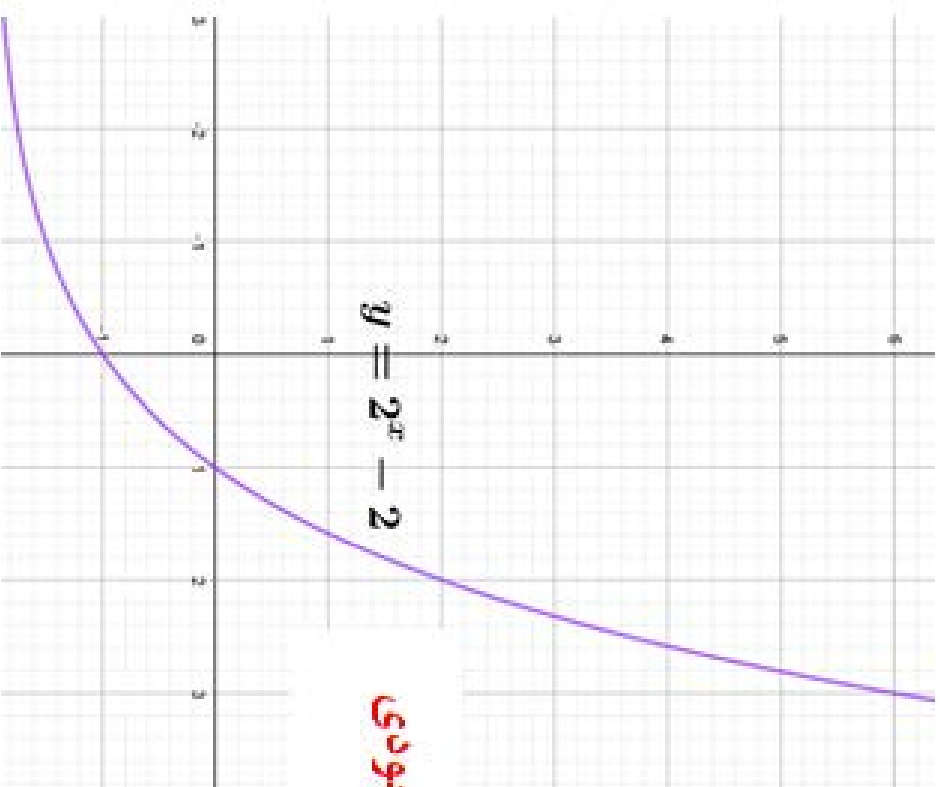
اگریداً نزولی

$$y = -\log_2 x + 2$$



اگریداً صعودی

$$y = 2^x - 2$$



در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است}).$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10° درجه سانتی‌گراد است.

$$d(1) = 4 \times 1 + 2 = 6$$

دمای غذایی که یک ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۶ است

$$d(3) = 4 \times 3 + 2 = 14$$

دمای غذایی که سه ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۴ است

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2° درجه سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(d) = 20d^2 - 80d + 500; \quad 2 \leq d \leq 14$$

که در این تابع، d دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 500 = 1700$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10° درجه سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$$n(2) = 20 \times 2^2 - 80 \times 2 + 500 = 420 \quad \dots \text{تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای } 2^\circ \text{ درجه، } 420 \text{ تا است.}$$

$$n(3) = 20 \times 3^2 - 80 \times 3 + 500 = 440 \quad \dots \text{تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای } 3^\circ \text{ درجه، } 440 \text{ تا است.}$$

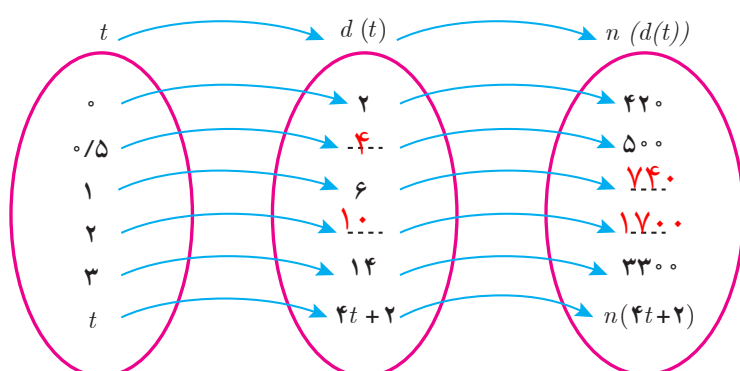
به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به دست آورد، به عبارت دیگر:

$$\text{تعداد باکتری‌ها} \xrightarrow{n} \text{دما} \xrightarrow{d} \text{زمان}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 1700 تا است.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t) = 4t + 2$	$n(d(t)) = n(4t + 2)$
۰	$d(0) = 2$	$n(d(0)) = n(2) = 420$
۰/۵	$d(0/5) = 0.4$	$n(d(0/5)) = n(0.4) = 500$
۱	$d(1) = 6$	$n(d(1)) = n(6) = 740$
۲	$d(2) = 10$	$n(d(2)) = n(10) = 1700$
۳	$d(3) = 14$	$n(d(3)) = n(14) = 3300$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است. آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟ به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟

برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500 = 20(16t^2 + 16t + 4) - 320t - 160 + 500 = 320t^2 + 420t \quad 0 \leq t \leq 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

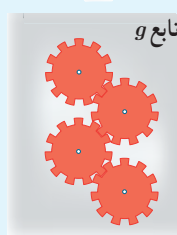
مرحله اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

x باید در دامنه تابع f باشد.



$f(x)$ باید در دامنه تابع g باشد.

مرحله دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.



$g(f(x))$

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(g \circ f)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $g \circ f$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر:

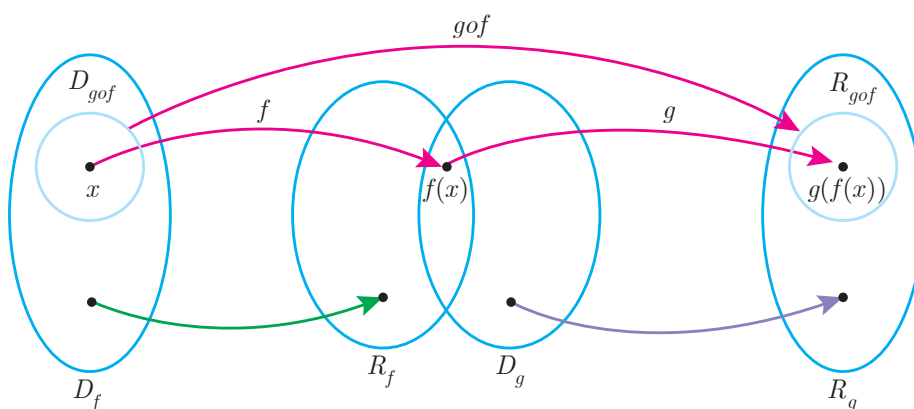
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر است:

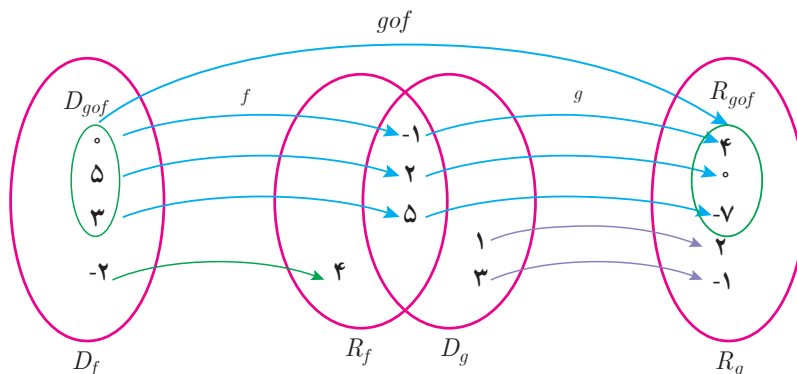
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ ، تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(-1) = 4 \\ (g \circ f)(5) &= g(f(5)) = g(2) = 0 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(5) = -7 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(4) : \text{تعریف نشده} \end{aligned} \right\} \rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$



با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$	x	$g(x)$
-۳	-۷	-۳	۸
-۲	-۵	-۲	۳
-۱	-۳	-۱	۰
۰	-۱	۰	-۱
۱	۳	۱	۰
۲	۵	۲	۳
۳	۵	۳	۸

$$\text{الف) } (fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۰) = -۱$$

$$\text{ب) } (fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(۰) = -۱$$

$$\text{پ) } (gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۰$$

$$\text{ت) } (gog)(-۲) = g(g(-۲)) = g(۳) = ۸$$

$$\text{ث) } (gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۵) \quad \text{تعریف نشده.}$$

$$\text{ج) } (fof)(۱) = f(f(۱)) = f(۳) = ۵$$

مثال: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع gof را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $0 \leq x-1$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$ ، بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{2x^2-1-1} = \sqrt{2x^2-2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع fog و gof را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر: دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنه تابع gof با توجه به ضابطه آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و fof را به دست آورید.

$$\operatorname{fog}(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{\mu}{g(x)-1}=\frac{\mu}{\frac{\mu}{x}-1}=\frac{\mu x}{\mu-x}$$

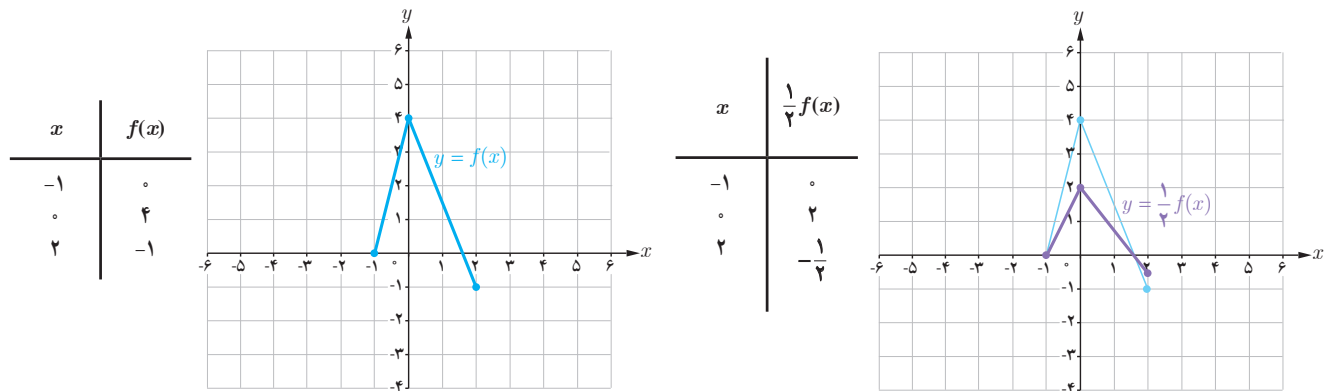
$$D_f=\mathbb{R}-\{1\}, D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_{\operatorname{fog}}=\left\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{0\}\mid \frac{\mu}{x}\in\mathbb{R}-\{1\}\right\}=\mathbb{R}-\{0,\mu\}$$

«تبدیل نمودار توابع»

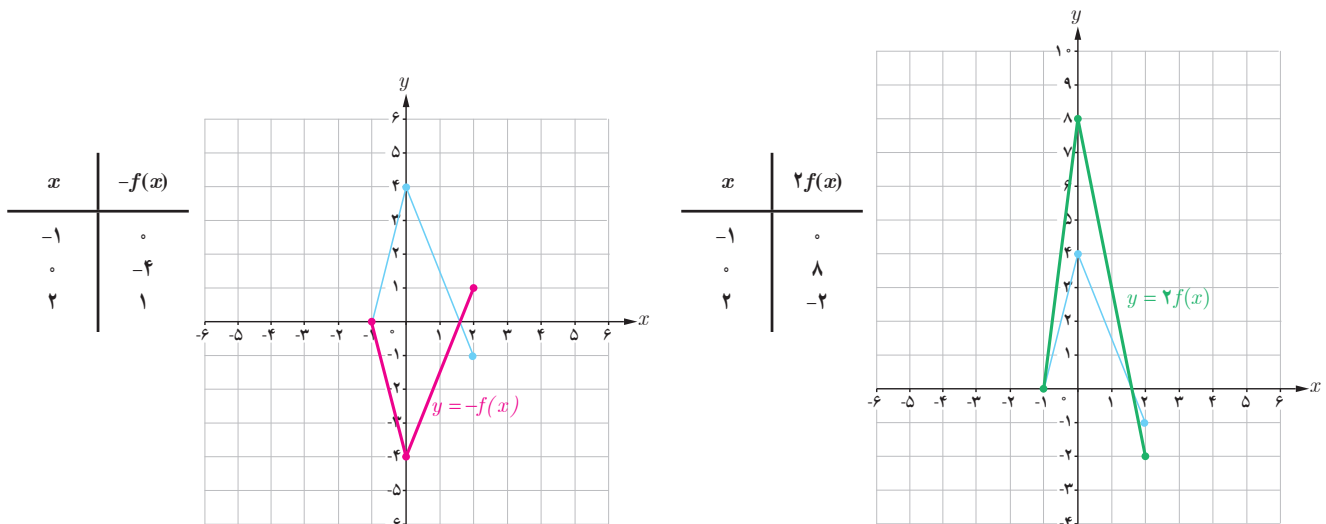
یادآوری: همان طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{4}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.



برای رسم نمودار $y=\frac{1}{4}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{4}$ ضرب می کنیم.

از آنجایی که ریشه های معادله $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور x ها یکسان است.



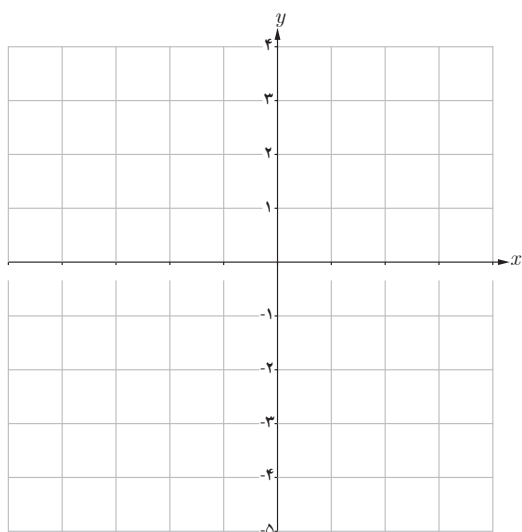
برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می کنیم.

برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در 2 ضرب می کنیم.

دامنه تابع با ضابطه تابع $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

کار در کلاس

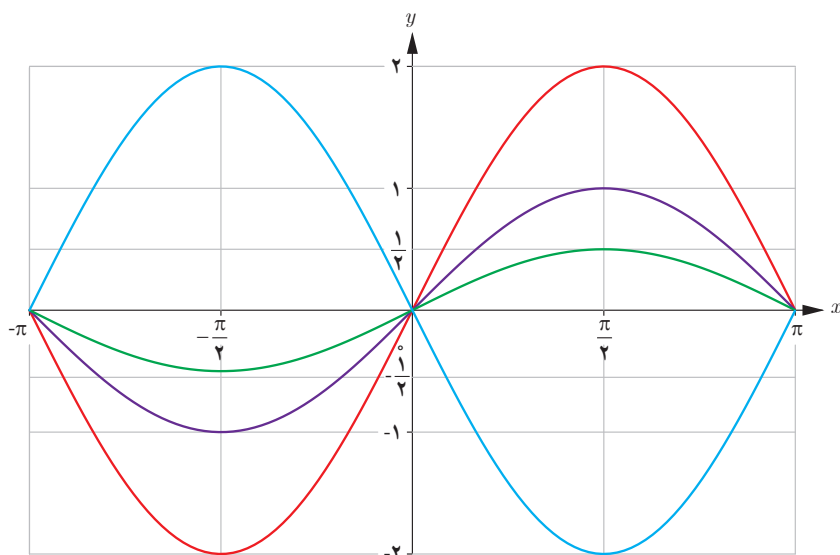
نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{3}|x - 2|$ و $k(x) = -\frac{1}{3}|x - 2|$ را رسم کنید.



کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$ ، $y = -2 \sin x$ و

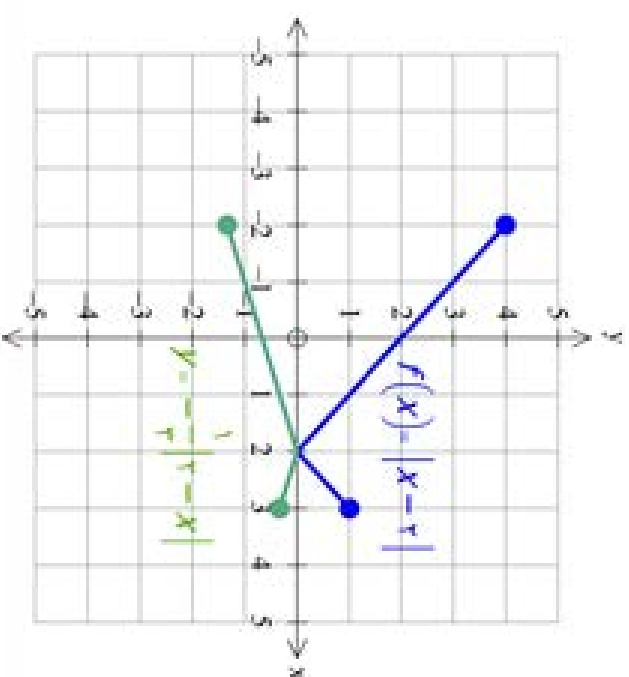
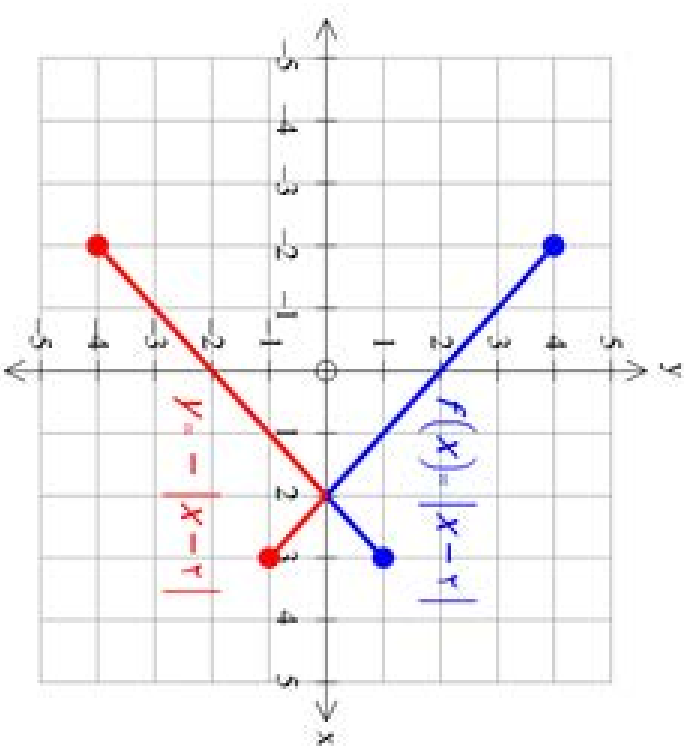
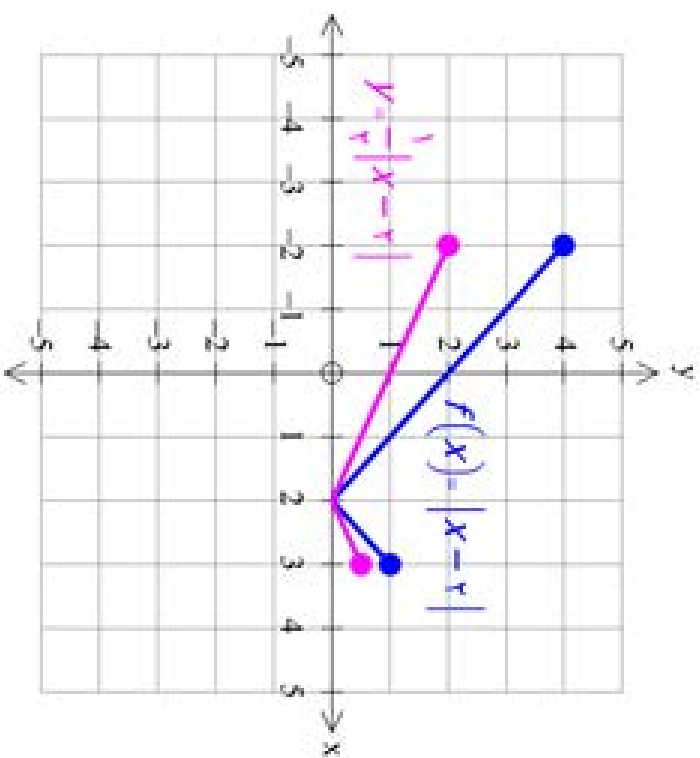
$y = \frac{1}{3} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



$y = \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-1, 1]$
$y = 2 \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-2, 2]$
$y = -2 \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = [-2, 2]$
$y = \frac{1}{3} \sin x$	$D = [-\pi, \pi]$	$R = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$



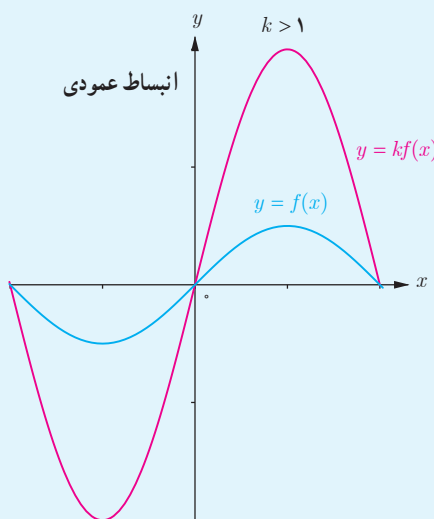
بیلاقات تالش



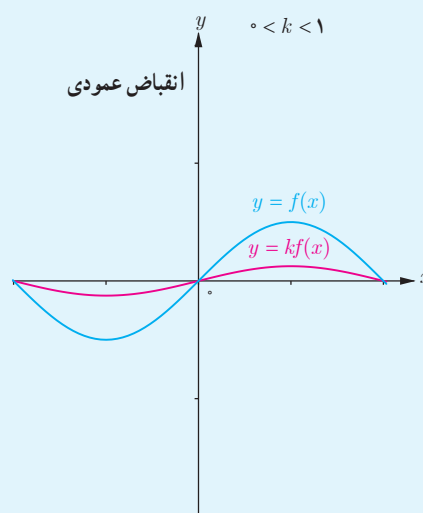
می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد.

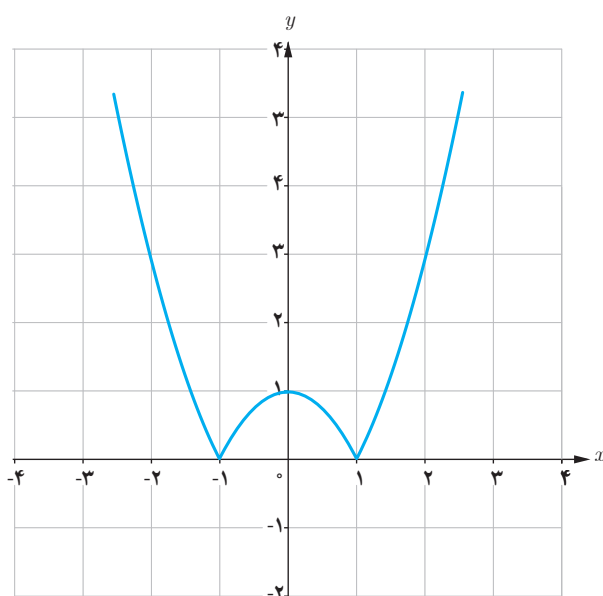
اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.



رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ را بررسی می‌کنیم. ضابطه تابع $y = f(2x)$ به صورت $f(2x) = 2x + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-4 \leq 2x \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(2x) : D = [-2, 0]$$

همچنین ضابطه تابع $y = f(\frac{x}{2})$ به صورت $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

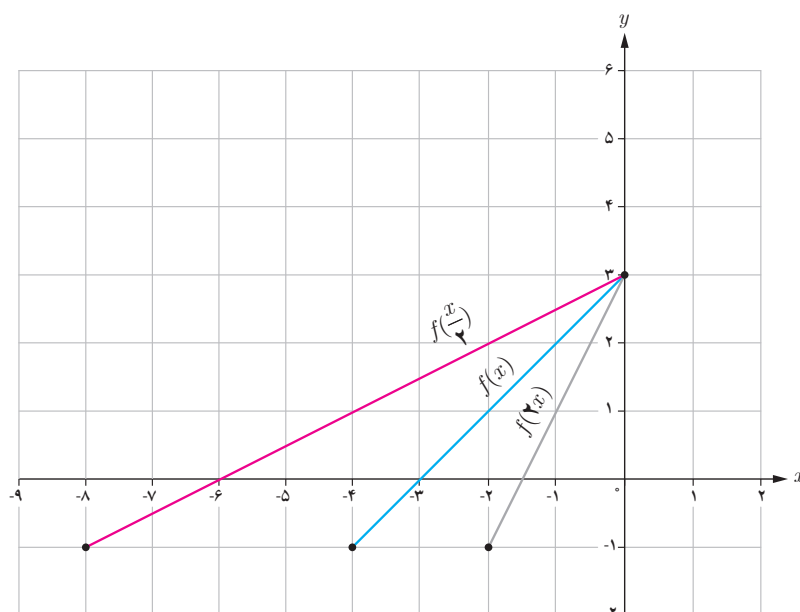
$$-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \rightarrow -8 \leq x \leq 0 \rightarrow \text{دامنه } f(\frac{x}{2}) : D = [-8, 0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x + 3$	-1	0	1	2	3

x	-2	-1/2	-1	-3/2	0
$f(2x) = 2x + 3$	-1	0	1	2	3

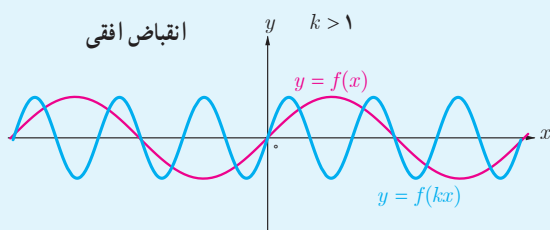
x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 3$	-1	0	1	2	3



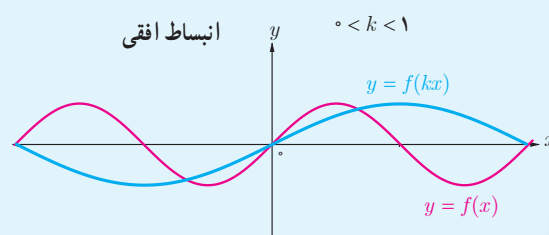
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(\frac{x}{2})$ و $f(2x)$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 0$ ، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.
اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

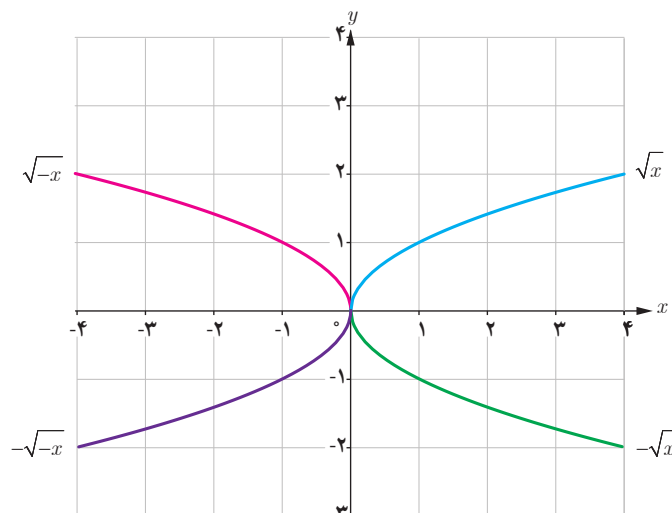
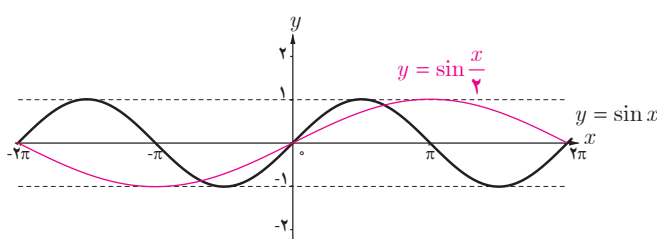
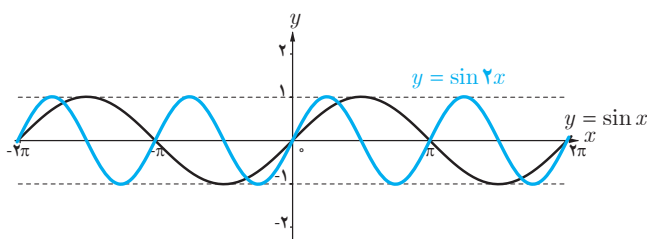


اگر $k > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin \frac{x}{2}$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها و نمودار تابع $y=\sin \frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور x ها به دست آمده است.



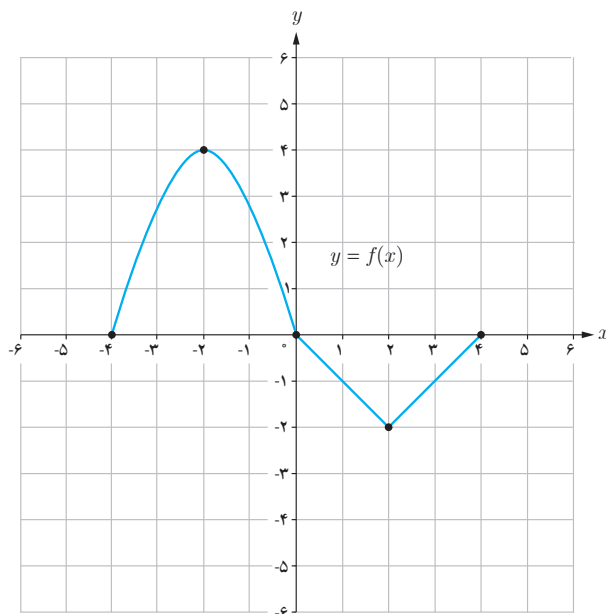
کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

$\sqrt{x}$	$D=[0, +\infty)$	$R=[0, +\infty)$
$-\sqrt{x}$	$D=[0, +\infty)$	$R=(-\infty, 0]$
$-\sqrt{-x}$	$D=(-\infty, 0]$	$R=(-\infty, 0]$
$\sqrt{-x}$	$D=(-\infty, 0]$	$R=[0, +\infty)$

نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

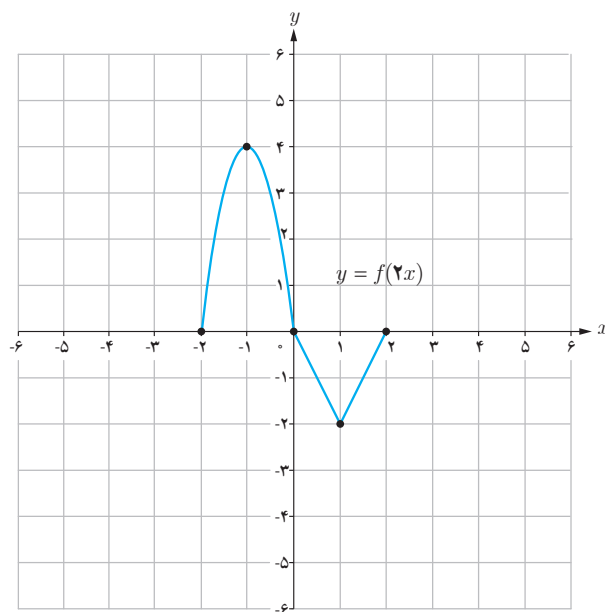


الف) برای تعیین دامنه $y=f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $y=f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید. برای رسم نمودار $f(2x)$ ، طول نقاط یا همان x ها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2, 0)$
-1	-2	4	$(-1, 4)$
0	0	0	$(0, 0)$
1	2	-2	$(1, -2)$
2	4	0	$(2, 0)$

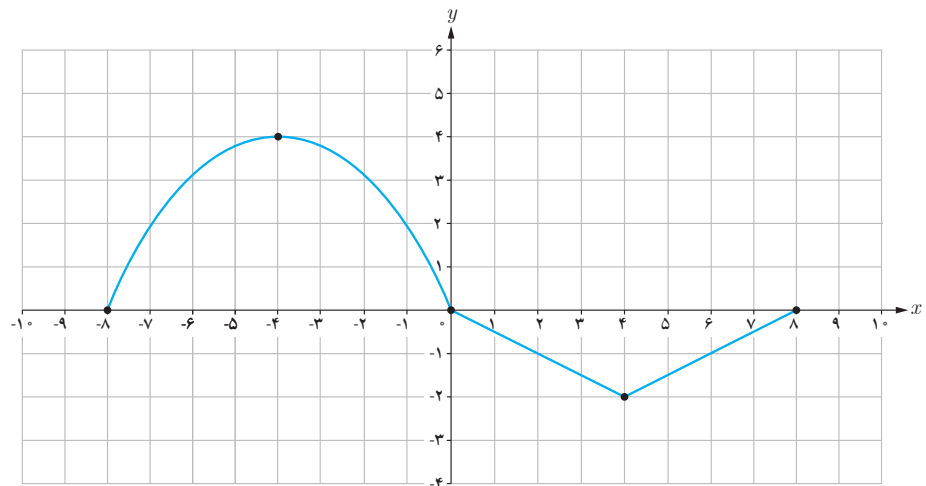


ب) برای تعیین دامنه $y=f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$$

پس دامنه تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است :

x	$f(\frac{1}{2}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0



همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y = f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y = f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y = f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در 2 ضرب می کنیم.

دامنه تابع $y = f(kx)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y = f(kx)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

خواندنی

فرش بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش هایی را بر روی آثارشان جلوه گر می سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می کنند. در این طراحی ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می شود.



$$f \circ g = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\} \quad g \circ f = \{(5, 5)\}$$

تمرین

۱ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳ اگر $f(x) = 3x - 4$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

۵ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنجشنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

۷ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

پایان

(الف)

$$f(x)=x^r-\boldsymbol{\mathcal{D}} \quad g(x)=\sqrt{x+\boldsymbol{\mathcal{S}}}$$

$$D_f=\mathbb{R} \quad D_g=[-\boldsymbol{\mathcal{S}},+\infty)\Rightarrow D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in [-\boldsymbol{\mathcal{S}},+\infty) \mid \sqrt{x+\boldsymbol{\mathcal{S}}}\in \mathbb{R}\right\}=\\ \sqrt{x+\boldsymbol{\mathcal{S}}}\in \mathbb{R} \qquad \rightarrow D_{fog}=[-\boldsymbol{\mathcal{S}},+\infty)\cap \mathbb{R}=[-\boldsymbol{\mathcal{S}},+\infty)$$

$$(f\circ g)_{(x)}=f\left(g(x)\right)=\left(g(x)\right)^r-\boldsymbol{\mathcal{D}}=\left(\sqrt{x+\boldsymbol{\mathcal{S}}}\right)^r-\boldsymbol{\mathcal{D}}=x+1$$

$$f(X) = \sqrt{\mu - \mu_X}$$

$$g(X) = \frac{\varsigma}{\mu_X + \Delta}$$

$$D_f = \left(-\infty, \frac{\mu}{\mu} \right]$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\Delta}{\mu} \right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ X \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\Delta}{\mu} \right\} \mid \frac{\varsigma}{\mu_X + \Delta} \in \left(-\infty, \frac{\mu}{\mu} \right] \right\} = \left(-\infty, \frac{\Delta}{\mu} \right) \cup \left[\mu, +\infty \right)$$

$$(f \circ g)_{(X)} = f(g(X)) = \sqrt{\mu - \mu g(X)} = \sqrt{\mu - \mu \left(\frac{\varsigma}{\mu_X + \Delta} \right)} = \sqrt{\frac{q_X - \mu \varsigma}{\mu_X + \Delta}}$$

$$f(x) = \sqrt{x+\mu} \qquad g(x) = \sqrt{x^r-1}\, \varsigma$$

$$D_f = [-\mu, +\infty) \qquad D_g = (-\infty, -\kappa] \cup [\kappa, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in [-\mu, +\infty) \mid \sqrt{x+\mu} \in (-\infty, -\kappa] \cup [\kappa, +\infty) \right\} = [1\kappa, +\infty)$$

$$\sqrt{x+\mu} \leq -\kappa \quad \vee \quad \sqrt{x+\mu} \geq \kappa \rightarrow x+\mu \geq 1\varsigma \rightarrow x \geq 1\kappa \Rightarrow x \in [1\kappa, +\infty)$$

همواره نادرست است

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = \sqrt{\left(f(x)\right)^r-1}\, \varsigma = \sqrt{x-1\kappa}$$

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0, +\infty) \right\} = \mathbb{R} \cap [2k\pi, 2k\pi+\pi] \, (k \in \mathbb{Z}) = [2k\pi, 2k\pi+\pi]_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\sin x \geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x \in [2k\pi, 2k\pi+\pi] \, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = \sqrt{(\sin x)} = \sqrt{\sin x}$$

نتیجہ:

$$f(g(X)) = \mu_X^r - \zeta_X + 1 \mu \quad f(X) = \mu_X - \mu$$

$$f(g(X)) = \mu(g(X)) - \mu \Rightarrow \mu_X^r - \zeta_X + 1 \mu = \mu(g(X)) - \mu \Rightarrow \mu(g(X)) = \mu_X^r - \zeta_X + 1 \mu$$

$$\Rightarrow \boxed{g(X) = X^r - \mu_X + \zeta}$$

پایخ مرن ۴:

الف) نادرست

$$(f \circ g)_{(\Delta)} = f(g(\Delta)) = g(\Delta)^p - \mu = \left(\sqrt{X^p - \mu}\right)^p - \mu = \left(\sqrt{\Delta^p - \mu}\right)^p - \mu = \mu \mid - \mu = 1 \neq \gamma$$

ب) نادرست

$$\begin{cases} f_{(x)} = \mu_X \\ g_{(x)} = \mu_X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f \circ g_{(x)} = f(g_{(x)}) = \mu(\mu_X) = \xi_X \\ g \circ f_{(x)} = g(f_{(x)}) = \mu(\mu_X) = \xi_X \end{cases} \rightarrow f \circ g_{(x)} = g \circ f_{(x)}$$

پ) درست

$$(f \circ g)_{(\mu)} = f(g(\mu)) = f(\gamma) = \Delta$$

ت) درست

$$\begin{cases} (f \circ g)_{(\Delta)} = f(g(\Delta)) = \sqrt{\mu \times \Delta - 1} = \sqrt{9} = \mu \\ g_{(\mu)} = \mu \times \mu - 1 = \mu \end{cases}$$

پایخ سوال ۵:

الف) مقرون به صافه است

$$f_{(x)} = X - \frac{\mu}{10} - X = -\frac{\lambda}{X} = -\frac{4}{X} \quad (X > 0) \quad g_{(x)} = X - \mu = 0 \quad X > 150000$$

$$g(f_{(x)}) = f_{(x)} - \mu = 0 = -\frac{4}{X} - \mu = 0$$

$$\frac{\lambda}{100} \times \mu = 0 - \mu = 0 = 140000$$

$$f(g_{(x)}) = f_{(X - \mu)} = -\frac{4}{X - \mu} = -\frac{4}{X - 150000}$$

$$\frac{\lambda}{100} (\mu - \mu) = 140000$$

ب)

پاشا مړين ۴:

$$\begin{cases} \text{fog}_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \sqrt[p]{\mu X^r - \mu X + 1} & \times \\ \text{gof}_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = \mu \sqrt[p]{X^r} - \mu \sqrt[p]{X} + 1 & \times \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} \text{fog}_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \left(\mu X^r - \mu X + 1\right)^{\diamond} & \checkmark \\ \text{gof}_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = \mu \left(X^{\diamond}\right)^r - \mu X^{\diamond} + 1 = \mu X^{r\diamond} - \mu X^{\diamond} + 1 & \times \end{cases}$$

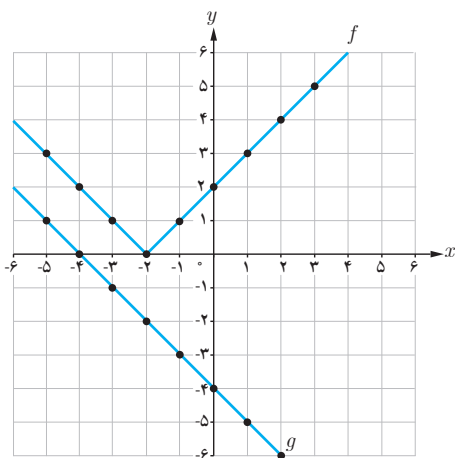
(ب)

پاشا مړين ۷:

$$\begin{aligned} h_{(x)} &= \sqrt[p]{X^r + 1} \rightarrow f_{(x)} = X^r + 1, g_{(x)} = \sqrt[p]{X} \\ l_{(x)} &= \sqrt{X^r + 1} \rightarrow f_{(x)} = X^r + \mathbf{O}, g_{(x)} = \sqrt{X} \end{aligned}$$

(ب)

خير منحصر بقدر نيست



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(2) = -6$

پ) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(-5) = 3$

ت) $(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -5$

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(fog)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(gof)(x) = -5$

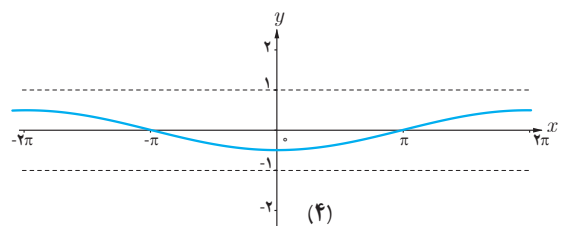
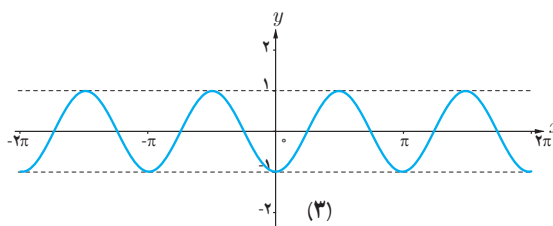
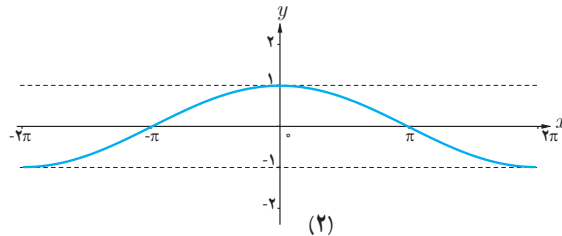
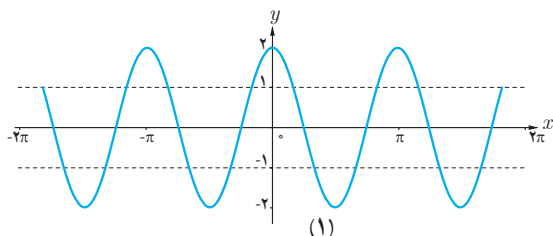
۱۰ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ۴

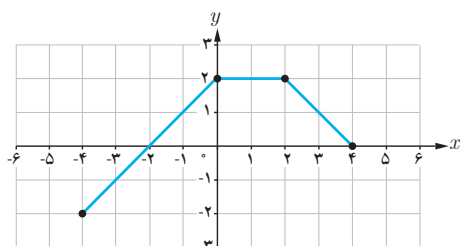
ب) $y = 2\cos 2x$ ۱

پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ ۲

ت) $y = -\cos 2x$ ۳



۱۱ نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



۱۲ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

الف) مثال سوم:

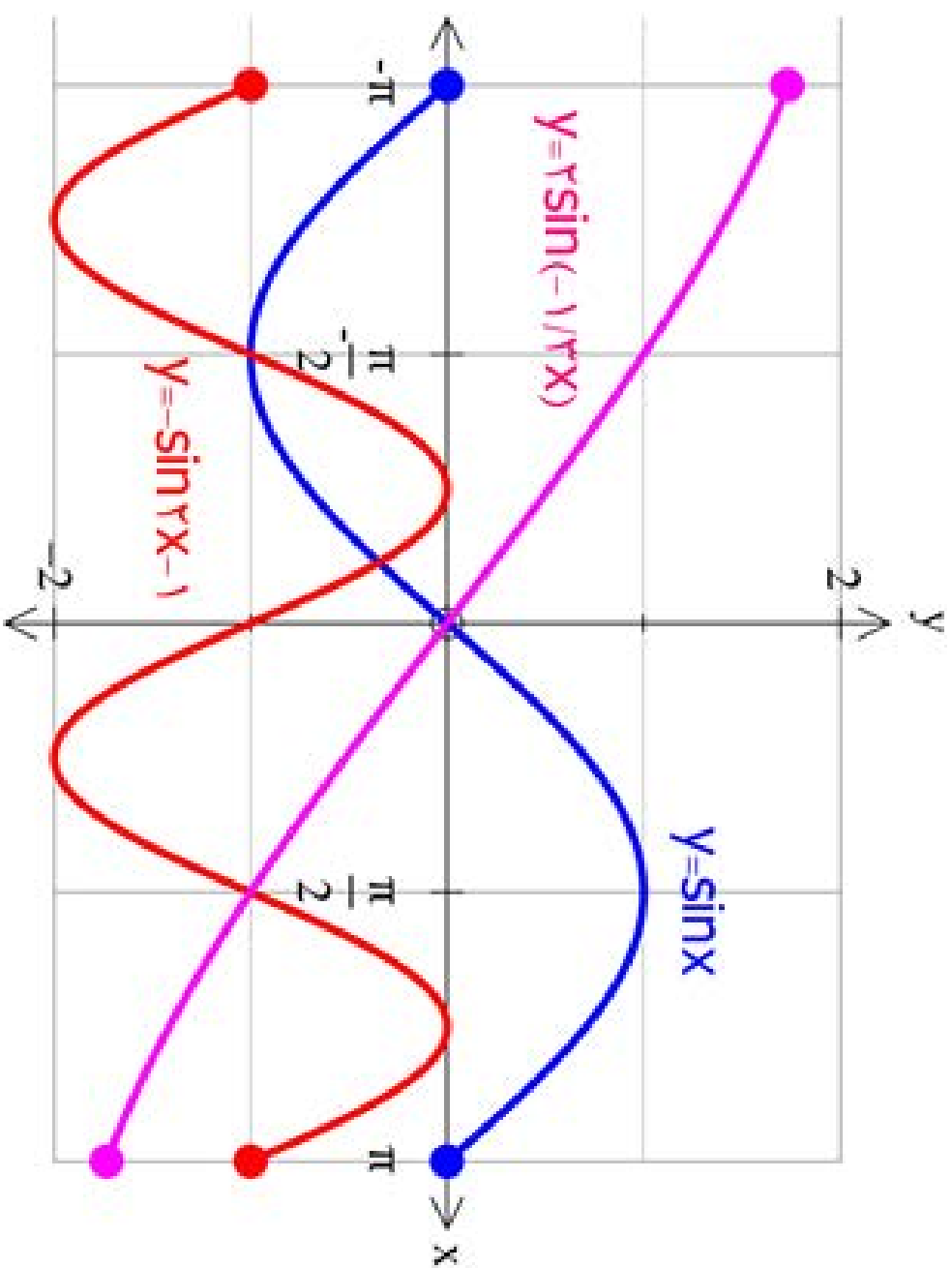
$$f(x) = \mu_X - \Delta; g(x) = x^r - \mu_X + \Lambda \rightarrow \begin{cases} f(g(x)) = V \\ \mu(x^r - \mu_X + \Lambda) - \Delta \end{cases} \Rightarrow \mu_X^r - \zeta_X + 11 = V$$

$$\Rightarrow \mu_X^r - \zeta_X + \mu = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} X=1 \\ X=\mu \end{cases}$$

ب)

$$f(x) = \mu_X^r + X - 1; g(x) = 1 - \mu_X \rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = -\Delta \\ 1 - \mu(\mu_X^r + X - 1) \end{cases} \Rightarrow -\zeta_X^r - \mu_X + \mu = -\Delta$$

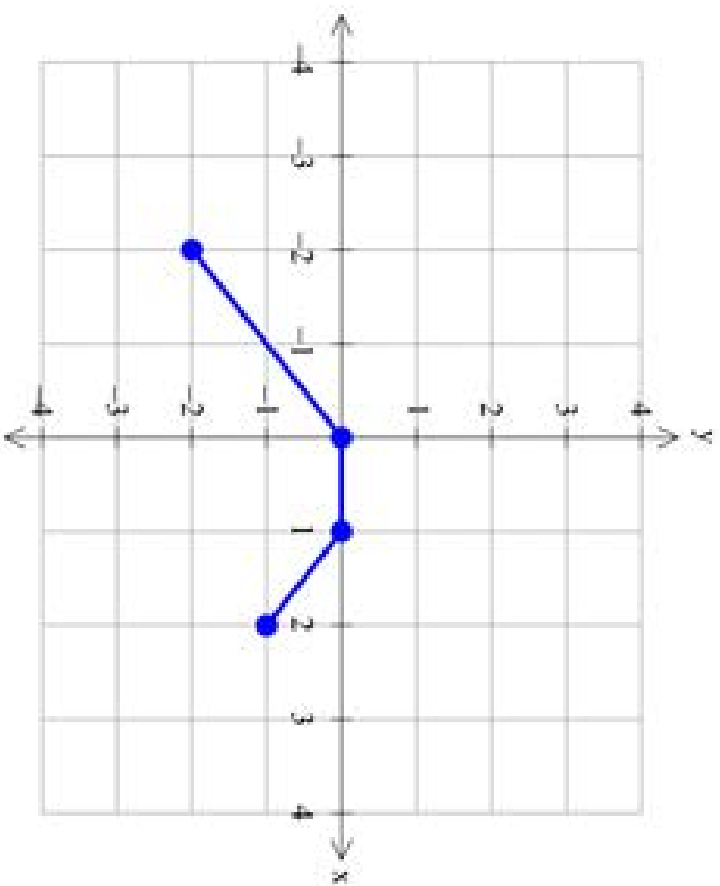
$$\Rightarrow -\zeta_X^r - \mu_X + \Lambda = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} X=1 \\ X = -\frac{\Lambda}{\zeta} = -\frac{\mu}{\mu} \end{cases}$$



$$y = \frac{1}{\mu} f(\mu x) - 1 \quad (1) \quad \text{مربع}$$

$$y = \frac{1}{\mu} f(\mu x) - 1 \quad \mu x = t \rightarrow t = \frac{1}{\mu} x$$

$\frac{1}{\mu} \times (-\mu)$	$\frac{1}{\mu}(-\mu)$	$\frac{1}{\mu}(0)$	$\frac{1}{\mu}(\mu)$	$\frac{1}{\mu}(\mu)$	
$\frac{1}{\mu}(-\mu) - 1$	$\frac{1}{\mu}(0) - 1$	$\frac{1}{\mu}(\mu) - 1$	$\frac{1}{\mu}(\mu) - 1$	$\frac{1}{\mu}(0) - 1$	$\Rightarrow$
-1	-1	0	1	1	-1

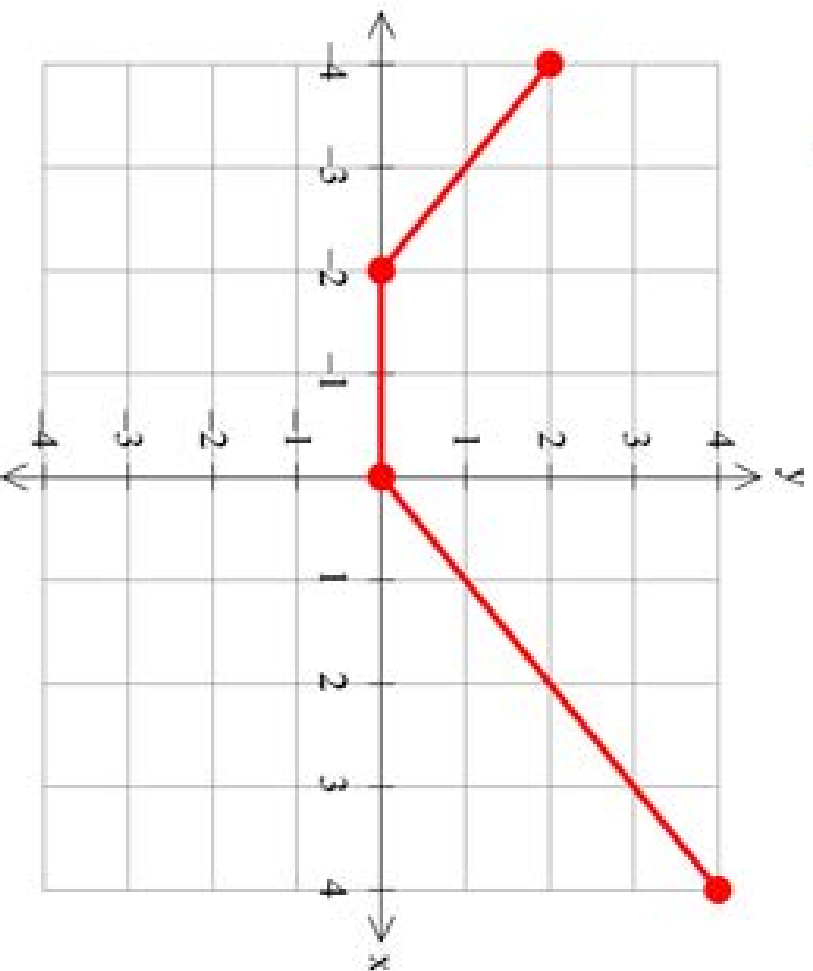


$$y = \begin{cases} x & -\mu \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 1 & 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \mu] \quad R = [-\mu, 0]$$

$$y = -f(-x) + \mu(r) \quad \text{مربع}$$

$-(-\mu)$	$-(-\mu)$	$-(0)$	$-(\mu)$	$-(\mu)$
$-(-\mu) + \mu$	$-(0) + \mu$	$-(\mu) + \mu$	$-(\mu) + \mu$	$-(0) + \mu$
$\Rightarrow$				
μ	μ	0	$-\mu$	$-\mu$
μ	μ	0	0	μ



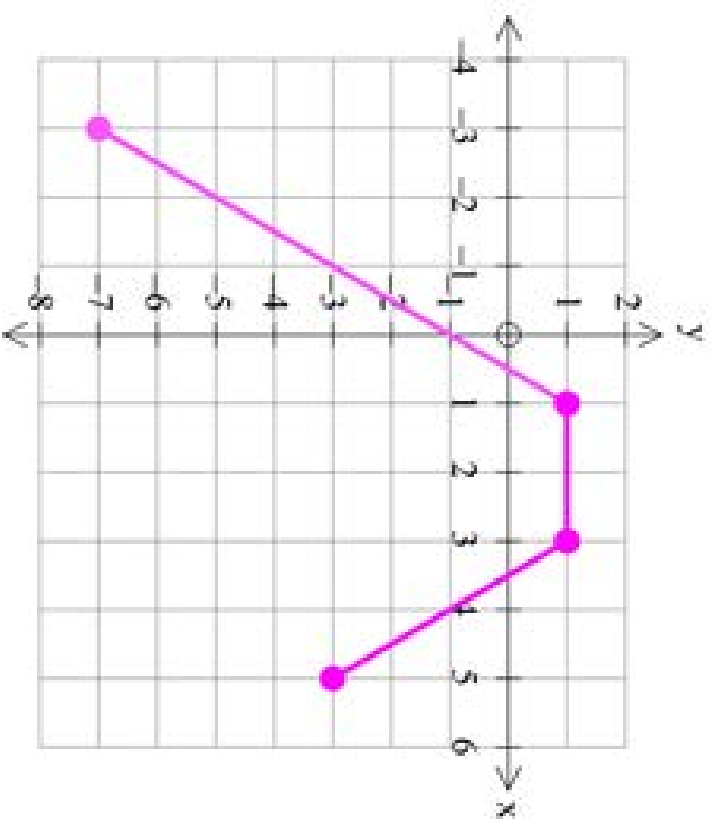
$$y = \begin{cases} -x - \mu & -\mu \leq x \leq -\mu \\ 0 & -\mu \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \mu]$$

$$R = [0, \mu]$$

$$y = \mu f(x-1) - \mu^2 Y^*$$

$(-k)+1$	$(-p)+1$	$(0)+1$	$(p)+1$	$(k)+1$	
$\mu(-p) - \mu^2$	$\mu(0) - \mu^2$	$\mu(p) - \mu^2$	$\mu(p) - \mu^2$	$\mu(0) - \mu^2$	
$-\mu$	-1	1	μ	Δ	
$-v$	$-\mu$	1	1	$-\mu$	



$$y = \begin{cases} \mu X - 1 & -\mu \leq X \leq 1 \\ 1 & 1 \leq X \leq \mu \\ -\mu X + v & \mu \leq X \leq \Delta \end{cases}$$

$$D = [-\mu, \Delta] \quad R = [-v, 1]$$

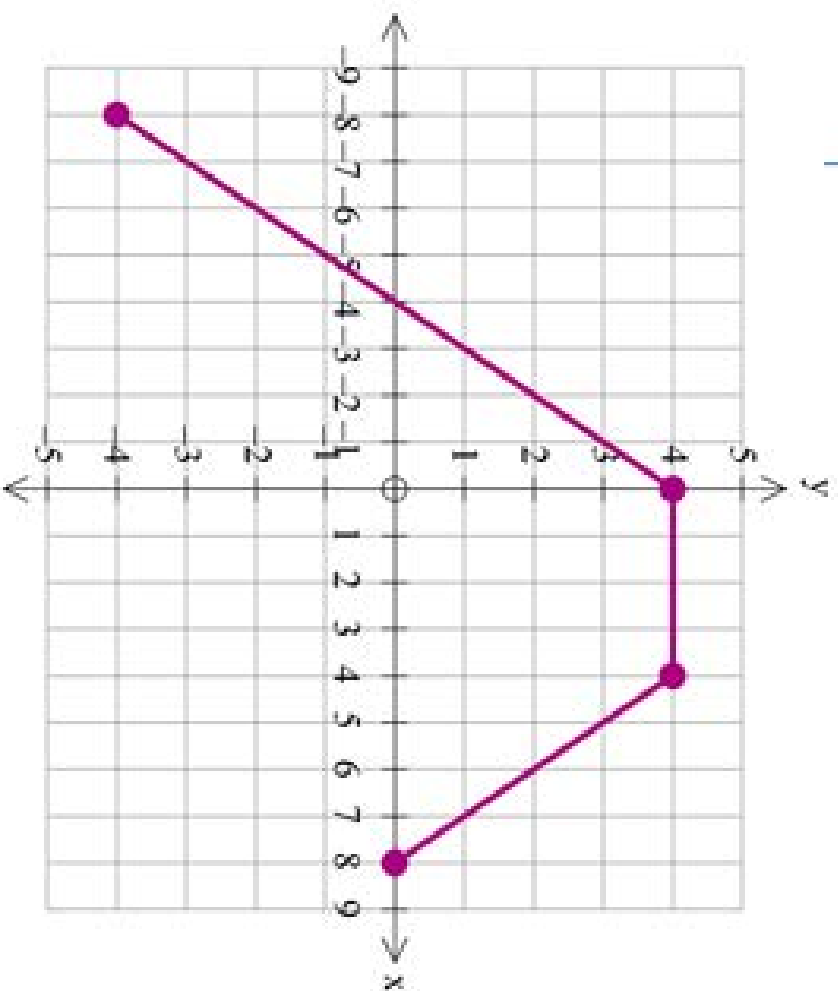
$$y = \mu_F\left(\frac{1}{\mu}x\right) \quad (F)$$

$$: \mathcal{W}_{\mathcal{C}_F}$$

$\mu(-\mu)$	$\mu(-\mu)$	$\mu(0)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(0)$
$\mu(-\mu)$	$\mu(0)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(\mu)$	$\mu(0)$	

$$\Rightarrow$$

$-A$	$-\mu$	0	μ	A
$-\mu$	0	μ	μ	0



$$y = \begin{cases} x + \mu & -A \leq x \leq 0 \\ \mu & 0 \leq x \leq \mu \\ -x + A & \mu \leq x \leq A \end{cases}$$

$$D = [-A, A]$$

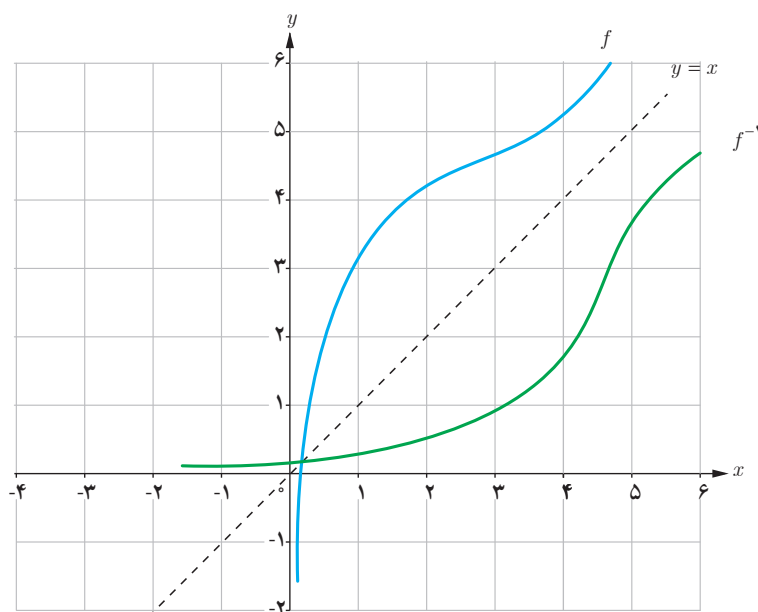
$$R = [-\mu, \mu]$$

یادآوری

همان طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک به یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (fof^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow fof^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (fof^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

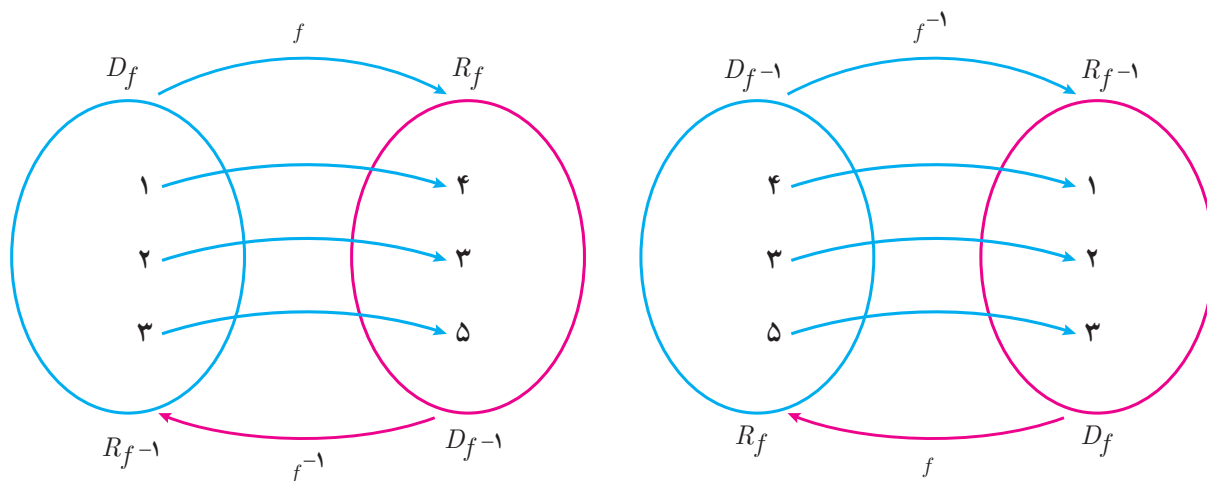
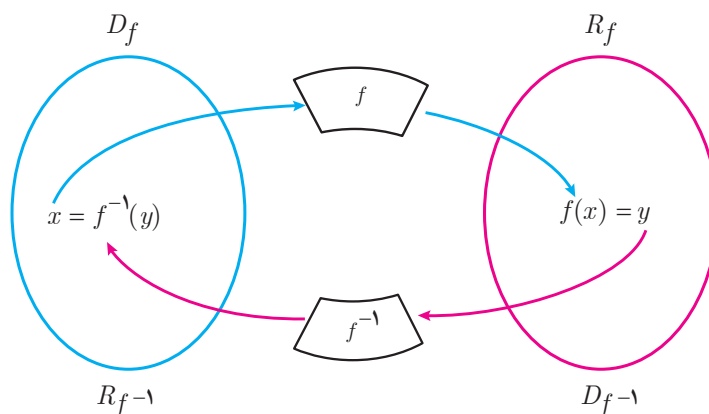
بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x) = x$$

همچنین :

$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم :به طور کلی اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد.اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه ای باشند که :

$$(f \circ g)(x) = x \quad ; \quad x \in D_g \quad (\text{الف})$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \quad (\text{ب})$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x+4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

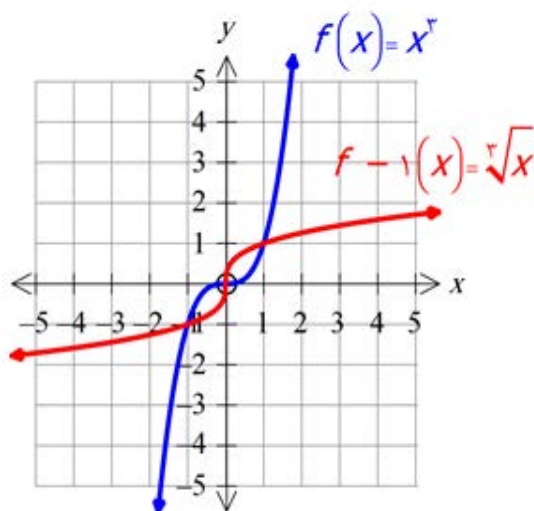
بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع به یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.^۱

$$\begin{array}{l} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_2^3 \end{array} \xrightarrow{y_1 = y_2} x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟



$$f(x) = x^3 \xrightarrow{y \leftrightarrow x} x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

۱- توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، x^2 و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی ها الزامی است.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید. تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

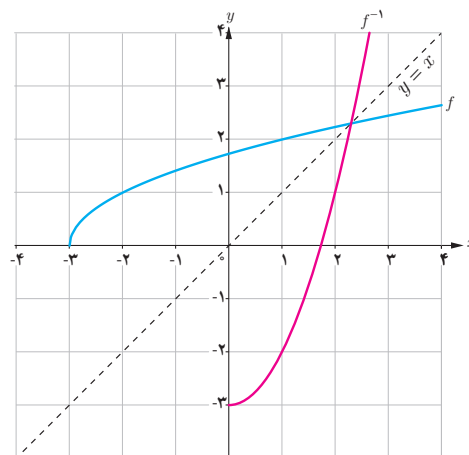
$$y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(y) = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$



کار در کلاس

ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

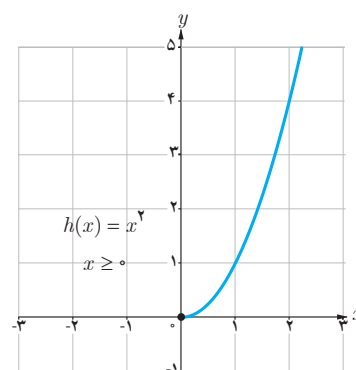
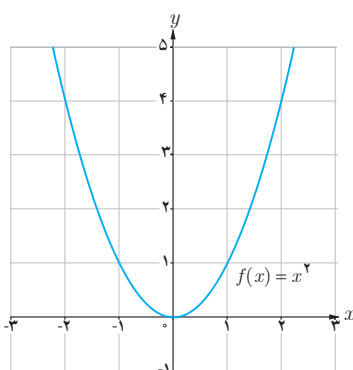
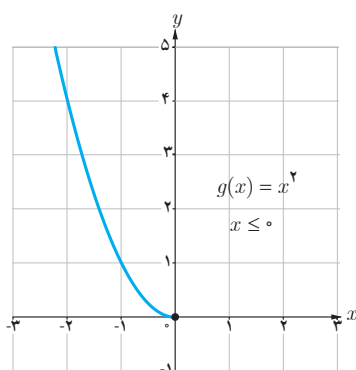
الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیر مجموعه هایی از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می آید.



حل کاردر کلاس الف)

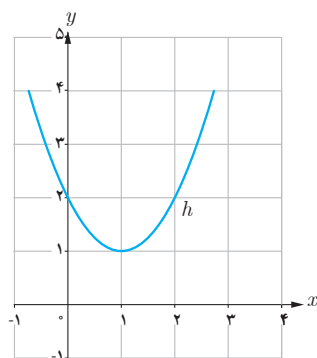
$$\underbrace{f(x) = -\frac{1}{\mu}x + \mu \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -\frac{1}{\mu}y + \mu \rightarrow -\frac{1}{\mu}y = x - \mu \rightarrow y = -\mu x + \mu \rightarrow f^{-1}(x) = -\mu x + \mu}_{D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}} \quad \underbrace{D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} = \mathbb{R}}$$

ب)

$$\underbrace{g(x) = 1 + \sqrt{x - \mu} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = 1 + \sqrt{y - \mu} \rightarrow \sqrt{y - \mu} = x - 1 \rightarrow y - \mu = (x - 1)^2 \rightarrow g^{-1}(x) = (x - 1)^2 + \mu}_{D_g = [\mu, +\infty) \quad R_g = [1, +\infty)} \quad \underbrace{D_{g^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{g^{-1}} = [\mu, +\infty)}$$

پ)

$$\underbrace{h(x) = x^p + 1 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = y^p + 1 \rightarrow y^p = x - 1 \rightarrow y = \sqrt[p]{x - 1} \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[p]{x - 1}}_{D_h = [0, +\infty) \quad R_h = [1, +\infty)} \quad \underbrace{D_{h^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{h^{-1}} = [0, +\infty)}$$



مثال: نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

مثلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است.

در تابع k ، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$(x-1)^2 = y-1$$

$$x-1 = \pm\sqrt{y-1}$$

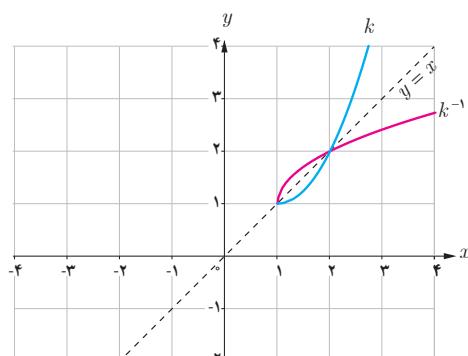
$$x = \pm\sqrt{y-1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

زیرا دامنه k اعداد مثبت بزرگتر مساوی یک است

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت زیر است:



باغ ارم شیراز

۱ ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$
 ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

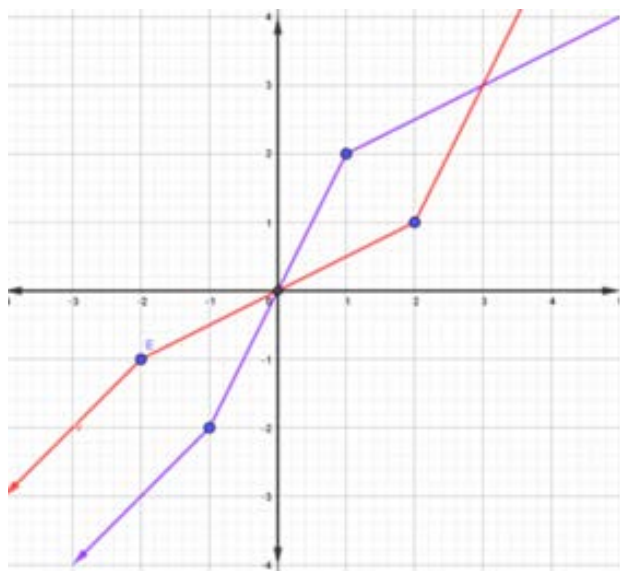
۲ در مورد هر یک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$
 ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8 + x^2 ; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها به دو روش متفاوت توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$
 ب) $g(x) = -x^2$
 پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$



۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

۶ با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

تمرین ۱:

$$f(X) = \frac{-\lambda X + \mu}{\mu} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = \frac{-\lambda Y + \mu}{\mu} \rightarrow -\lambda Y = \mu X - \mu \rightarrow$$

$$Y = \frac{-\mu X + \mu}{\lambda} \rightarrow f^{-1}(X) = \frac{-\mu X + \mu}{\lambda}$$

$$g(X) = -\mathfrak{O} - \sqrt{\mu X + 1} \xrightarrow{X \leftrightarrow Y} X = -\mathfrak{O} - \sqrt{\mu Y + 1} \rightarrow \sqrt{\mu Y + 1} = X + \mathfrak{O}$$

$$\rightarrow \mu Y + 1 = (X + \mathfrak{O})^r \rightarrow \mu Y = (X + \mathfrak{O})^r - 1 \rightarrow Y = \frac{(X + \mathfrak{O})^r - 1}{\mu} \rightarrow g^{-1}(X) = \frac{(X + \mathfrak{O})^r - 1}{\mu}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\frac{\cancel{\mu}}{\mu} \left(-\frac{\mu x + \cancel{\varsigma}}{\cancel{\mu}} \right) - \mu = x + \mu - \mu = x$$

الف)

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = -\frac{\mu \left(\frac{-\cancel{V}x}{\mu} - \mu \right) + \varsigma}{V} = \frac{Vx - \varsigma + \varsigma}{V} = x$$

ب)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = -\sqrt{\Lambda + x^p} - \Lambda = -\sqrt{x^p} = -|x| \xrightarrow{x \leq 0} = -(-x) = x$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \left(-\sqrt{x - \Lambda} \right)^p + \Lambda = x - \Lambda + \Lambda = x$$

مرین ۲:

$$f(X)=\frac{q}{\Delta}X+\mu\mu\overset{y\leftrightarrow X}{\longrightarrow}X=\frac{q}{\Delta}y'+\mu\mu\Rightarrow \Delta X=qy'+1\text{ } \mu\circ\rightarrow qy'=\Delta X-1\text{ } \mu\circ\rightarrow y'=\frac{\Delta}{q}X-\frac{1}{q}\mu\circ\rightarrow f^{-1}(X)=\frac{\Delta}{q}X-\frac{1}{q}\mu\circ$$

میزان تغییرات درجه نسبت به فارینهایت را نشان می دهد

مرین ۴:

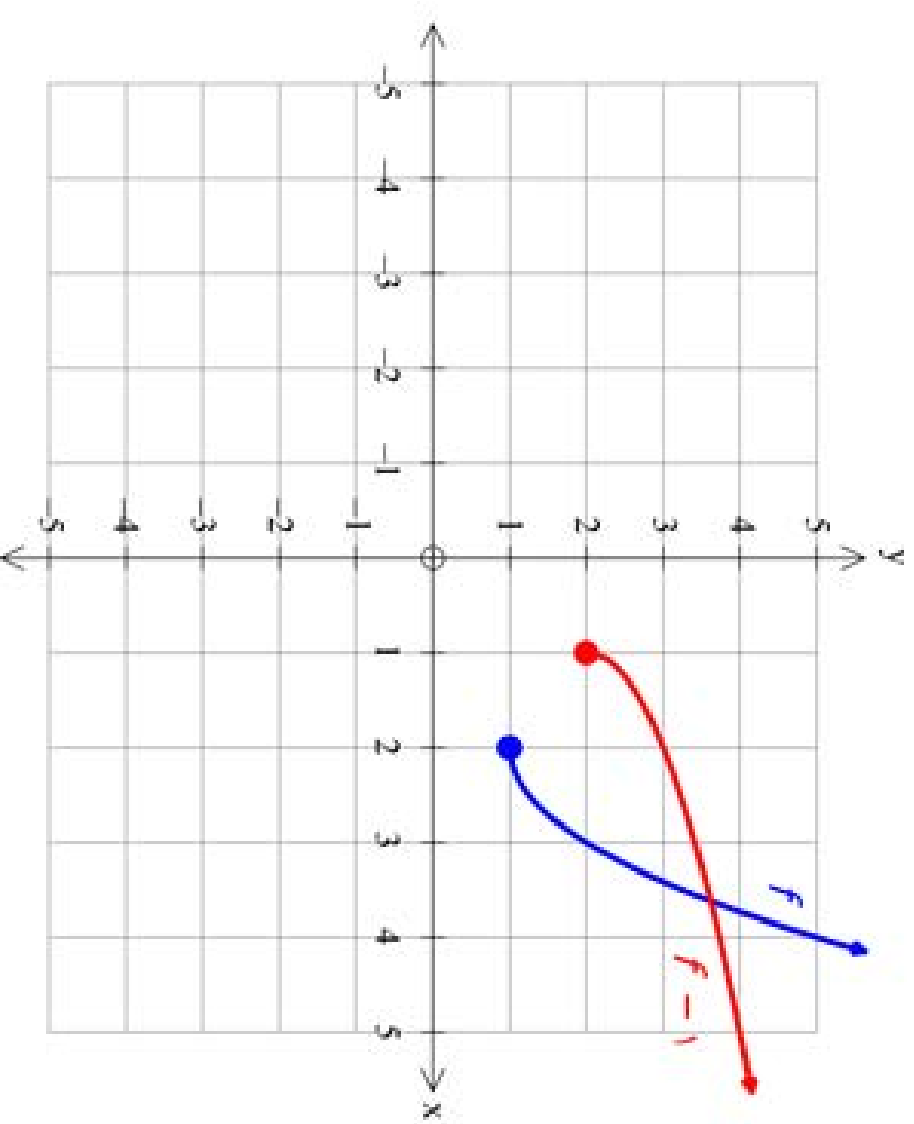
$$g(X)=-X^r\qquad\qquad\qquad\text{ب) }X\leq\circ\qquad\qquad\qquad\text{الف) }f(X)=|X|\qquad\qquad\qquad X\geq\circ$$

$$h(X)=(X+\mu)^r-1\qquad\qquad\qquad X\geq\circ\qquad\qquad\qquad\text{ب) }p$$

$$f(x) = x^p - px + \alpha = (x-p)^p + 1 \quad D_f = [p, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$y = (x-p)^p + 1 \rightarrow y-1 = (x-p)^p \Rightarrow x-p = \pm \sqrt[p]{y-1} \Rightarrow x = \pm \sqrt[p]{y-1} + p$$

$$\xrightarrow{x \geq p} f^{-1}(x) = \sqrt[p]{x-1} + p \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [p, +\infty)$$



جواب:

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(s) = f^{-1} \left(\underbrace{f^{-1}(s)}_{\Lambda(s+\mu)=v^{\mu}} \right) = f^{-1}(s) = \Lambda(v^{\mu} + \mu) = s \circ \circ \quad \text{الف)}$$

ب)

$$(f \circ g)^{-1}(\Delta) = \sqrt[m]{\Lambda \times \Delta + \mu^{\mu}} = \sqrt[m]{s^{\mu}} = \mu$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(x^{\mu}\right) = -\frac{1}{\Lambda} x^{\mu} - \mu \rightarrow y + \mu = -\frac{1}{\Lambda} x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} = \Lambda y + \mu^{\mu} \rightarrow x = \sqrt[m]{\Lambda y + \mu^{\mu}}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[m]{\Lambda x + \mu^{\mu}}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\Delta) = g^{-1} \left(\underbrace{f^{-1}(\Delta)}_{\Lambda(\Delta+\mu)=s^{\mu}} \right) = g^{-1}(s^{\mu}) = \sqrt[m]{s^{\mu}} = \mu \quad \text{ت)}$$

سوال: تحت چه شرایطی تابع f معکوس خود را می خورد؟

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0, ad-bc \neq 0$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow cxy + dy = ax + b \rightarrow x(cy - a) = -dy + b \rightarrow x = \frac{-dy + b}{cy - a} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow \begin{cases} a = -d \\ d = -a \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} = D_{f^{-1}}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \cdot f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) = \frac{a\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) + b}{c\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right) + d} = \frac{-adx + ab + bcx - ab}{-dcx + bc + dcx - ad} \xrightarrow[\frac{c}{c}]{x \neq \frac{a}{c}} \frac{-adx + ab + bcx - ab}{bc - ad \neq 0} \rightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{-d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - a} = \frac{-adx - bd + bcx + db}{cax + cb - acx - ad} \xrightarrow[\frac{c}{c}]{x \neq \frac{d}{c}} \frac{-adx - bd + bcx + db}{-bc + ad \neq 0} \rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{aligned}$$



عکاس : بهختیار رنجبری

روستای رهلی داغلار — آذربایجان شرقی