بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

www.tafrihicenter.ir/edu کلیک کنید

نمونه سوال

گام به گام

امتحان نهایی

جزوه

دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

۳ ترکیبیّات (شمارش)

نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی شهرستان : آبادان

با تشکر فراوان از استاد عزیزآقای انارکی که همکاری بسیار زیاد داشته و بنده را در حل مسائل یاری نموده اند.

۱ مباحثی در ترکیبیّات
۲ روش‌هایی برای شمارش

هزینه این فایل : قرائت صلوات جهت سلامتی مُنجی عالم بشریت ، قُطب دایره امکان (عج)

عزیزان می توانند به محض آماده شدن دیگر فایل ها به وبلاگ مراجعه نموده و دانلود کنند .

آدرس وبلاگ: sinxcosx.blogfa.com

همچنین در صورت مشاهده اشتباه در محاسبه و پاسخ ها بنده را از طریق شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ مطلع سازید .

سپاسگزارم

درس ۱ مباحثی در ترکیبیّات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل[۱] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب[۲] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

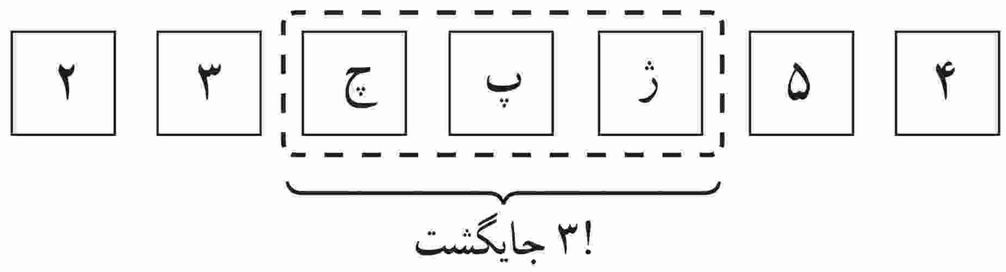
الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این‌صورت !۵ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین

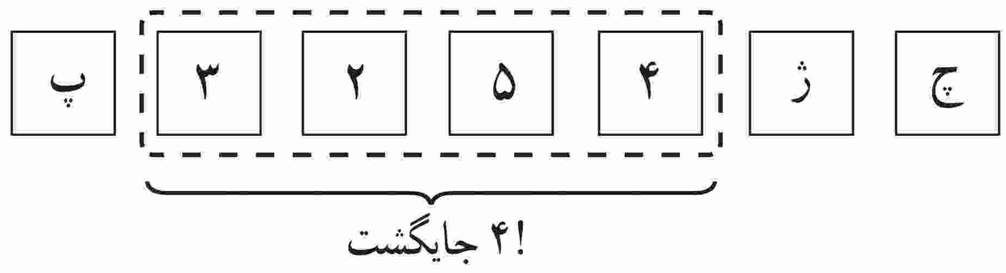
۱ـ $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

۲ـ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

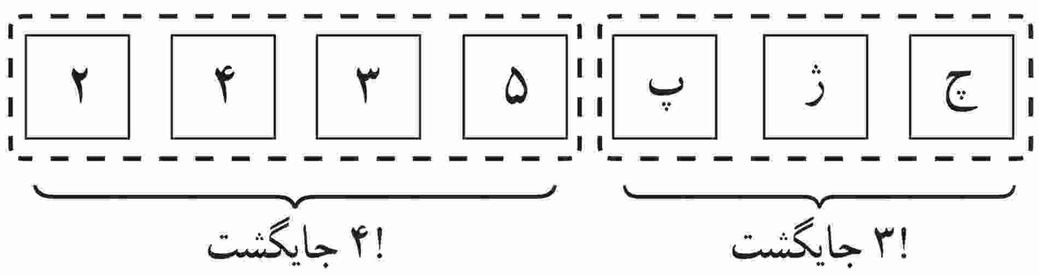
حال که کنار هم هستند !۳ جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای موردنظر برابر است با !۳×!۵



پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و !۴ جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم !۴ در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از !۴×!۴



ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و !۳ حروف در کنار هم و !۴ نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای موردنظر عبارت‌است از !۴×!۳×!۲



ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه‌حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال : ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به‌صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف) !۵×!۴×!۲

روش اول : ب) !۵×!۴

روش دوم : $\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱} \longrightarrow ۵\times۴\times۴\times۳\times۳\times۲\times۲=۵!\times۴!$

پ) (!۵×!۵)×۲

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a ، b و c برابر با ۶=!۳ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است (baa , aba , aab) درواقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کلّ جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی !۲ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $\frac{!۳}{!۲} = ۳$ است.

چون دو حرف a به !۲ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در !۳ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم !۳ بر !۲ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال !۴ بود ولی چون در این !۴ و به‌صورت ضربی، !۳ حالتِ ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $\frac{!۴}{!۳} = ۴$ است.

$\underbrace{۱۱۱۲,۱۱۲۱,۱۲۱۱,۲۱۱۱}_{\text{۴ رمز ممکن}}$ اعداد ۴ رقمی ممکن

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را، که به آن قضیهٔ جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد :

قضیهٔ جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آنها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱! \times n_۲! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال : با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار

$$\frac{!۹}{!۲ \times !۳ \times !۲}$$

تعداد چهارها ← !۲ ، تعداد دوها ← !۳ ، تعداد یک‌ها ← !۲

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از !۹ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه‌نفره و چهارنفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به‌ترتیب !۲، !۳ و !۴ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{انتخاب دو نفر برای اتاق دونفره}}\times\underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای اتاق سه‌نفره}}\times\binom{۴}{۴}=\frac{۹!}{۲!\times \cancel{۷!}}\times\frac{\cancel{۷!}}{۳!\times ۴!}\times ۱=\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$$

فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳	سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	...	**	*
۵	سه شاخه گل مریم	***	...	...
۶	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل مریم	**	...	*
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	...
۸	سه شاخه گل میخک	...	...	***
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	*	**
۱۰	دوشاخه گل رُز و یک شاخه گل مریم	*	**	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ خیر

جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ خیر

۳ با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد کلّ جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به‌دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \binom{۵}{۲} = \binom{۳+۲}{۲}$$

۴ این مسئله را در حالت کلّی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

$n =$ تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی

$k - ۱ =$ تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n + (k - ۱) =$ تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{[n+(k-۱)]!}{n! \times (k-۱)!} = \binom{n+(k-۱)}{k-۱}$$

جابه‌جایی ستاره‌ها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

جابجایی خطهای عمود با هم دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل :

$$\text{انواع گل} = k = ۴ \qquad \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} = n = ۸ \xRightarrow{\text{فعالیت قبل}} \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳! \times ۸!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. ۵=۴−۹ شاخه گل باقی‌مانده را به‌دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم :

$$\text{تعداد انتخاب‌های دلخواه} \leftarrow n = ۹ - ۴ = ۵ \qquad k = ۴ \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۸}{۳}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم $x_۱$ تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و $x_۲$ تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و $x_۳$ تعداد انتخاب ها از گل نوع سوم باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهندهٔ یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح ونامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

$x_1+x_2+x_3=7$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1
۱+۰+۶=۷	۶	۰	۱
۱+۱+۵=۷	۵	۱	۱
۴+۲+۱=۷	۱	۲	۴
۰+۷+۰=۷	۰	۷	۰
۱+۴+۲=۷	۲	۴	۱
۰+۳+۴=۷	۴	۳	۰

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{9}{2}=36$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (**راهنمایی** : مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

ابتدا از هر نوع گُل یک شاخه بر می داریم : $\underbrace{(x_1-1)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-1)}_{y_2}+\underbrace{(x_3-1)}_{y_3}=7-1-1-1 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=4$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی‌جدید (همان تعداد انتخاب های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل) پاسخ سوال می باشد ، که برابر است با : $\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. (**راهنمایی** : ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...) دقیقاً مشابه سوال قبل عمل می کنیم :

$$\underbrace{(x_1-1)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-1)}_{y_2}+\cdots+\underbrace{(x_k-1)}_{y_k}=n\underbrace{-1-1-\cdots-1}_{-k} \Rightarrow y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$$

$\Rightarrow$ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله جدید = تعداد جوا ب های صحیح و مثبت معادله ی مورد سوال $=\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$

۳ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط انکه $x_1>1$ و $x_3>3$[1] باشد؟

$x_1>1 \Rightarrow x_1\geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1-2}_{y_1}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_1=y_1+2}$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_3-4}_{y_3}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_3=y_3+4}$

$\Rightarrow$ معادله جدید : $y_1+2+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی اخیر ، پاسخ می باشد ، یعنی : $\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}$

۱ــ طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیّاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a\leq x_i\leq b$ در ان لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

۴ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots x_5=11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ $(x_i \geq 1 ، 1 \leq i \leq 5)$

از شرط قرار داده شده ($x_i \geq 1$) نتیجه می شود ، پاسخ مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله می باشد ، که طبق سوال ۲ ، برابر است با : $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$

۵ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} x_5>2 \Rightarrow \underbrace{x_5-2}_{y_5}>0 \Rightarrow x_5=y_5+2 \\ x_3=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{معادله جدید}: x_1+x_2+4+x_4+y_5+2+x_6=12$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+y_5+x_6=6$$

حال با توجه به رابطه بدست آمده در سوال ۲، تعداد جواب ها برابر است با : $\binom{6-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5$

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ـ۸، ۱۲ـ۱۰ و ۴ـ۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسهٔ درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک‌بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات / کلاس‌ها	۱۰ـ۸	۱۲ـ۱۰	۴ـ۲
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول ۳ × ۳ از اعداد به‌دست آورید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.

پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.

ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است.

a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.

b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.

c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.

d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

تعریف : یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «**مربع لاتین**[1]» می‌نامیم. (به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱ـ اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین ۳ × ۳ و دو مربع لاتین ۴ × ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین ۵ × ۵ بنویسید.

۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۲ با استدلال کلاسی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «**مربع لاتین چرخشی**» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۱	۲	۳	...	...	...	$n-۱$	n
n	۱	۲	۳	...	...	$n-۲$	$n-۱$
$n-۱$	n	۱	۲	۳	...	$n-۳$	$n-۲$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	n	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ , ۲ , ۳ , . . . , n یک مربع جدید به‌دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مربع به‌دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اوّل نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به‌دست آورید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱ → ۲
۲ → ۳
۳ → ۱

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱ → ۲
۲ → ۱
۳ → ۴
۴ → ۳

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

۱ → ۴
۲ → ۲
۳ → ۵
۴ → ۳
۵ → ۱

۴	۵	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۴	۵
۲	۴	۵	۱	۳
۵	۱	۳	۲	۴
۳	۲	۴	۵	۱

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «**متعامدند**» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به‌طور مثال برای دو مربع A و B به‌صورت زیر داریم :

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اوّل) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتینِ A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیابیم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتینِ B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.

$A =$

	a			
				a

$B =$

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(الف)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(پ)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۳		
	۳	

۱		
	۱	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین ۱ × ۱ وجود دارد؟ یک مربع وجود دارد که به صورت روبروست : | ۱ |

۲ آیا دو مربع لاتین ۲ × ۲ متعامد وجود دارد؟

خیر ، زیرا فقط دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد (شکل روبرو)، که تلفیق آنها دارای عضو تکراری است .

۱	۲
۲	۱

و

۲	۱
۱	۲

تلفیق

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

تلفیق

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بله ، زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد .

۴ آیا دو مربع لاتینِ ۴ × ۴ زیر متعامدند؟ بله زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد .

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

تلفیق

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

دیدیم که برای ۲ و ۱ = n، دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است[1] که اگر ۶ و ۲ و ۱ ≠ n، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد و برای ۶ و ۲ و ۱ = n دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به‌دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

۱ → ۲
۲ → ۴
۳ → ۳
۴ → ۱

$B' =$

۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲

تلفیق

۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

بله متعامدند زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری نداریم.

خواندنی

اویلر[2] در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت $n = 4k + 2$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[3] ثابت کرد که ادعای اویلر برای $n = 6$ درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای $n = 10$ و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر[4] و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس[5] و شریخاند[6] ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت $n = 6$ برای سایر $n = 4k + 2$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد ۶ و ۲ و ۱ ≠ n حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۱ــ اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲ــ Euler
۳ــ Tarry
۴ــ Parker
۵ــ Bose
۶ــ Shrikhande

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به‌دست می‌آید نیز با مربع لاتینِ دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتینِ حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم.) نشان دهید A و B_1 متعامدند. (**راهنمایی**: دو درایهٔ یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.)

دو درایه یکسان در A را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها در B نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد . پس A و B_1 متعامدند .

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_2 نیز متعامدند. (**راهنمایی**: دو درایهٔ یکسان در A در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.)

دو درایه یکسان در A را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها در B_2 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها در B نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد . پس A و B_2 متعامدند .

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برایِ کارِ ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد.

برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین ۵ × ۵ استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعدادِ** ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

$A =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد** ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

$B =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شمارهٔ ۴ با الیاف شمارهٔ ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع ۵ × ۵ به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شمارهٔ ۴ در روز یکشنبه با ماشین شمارهٔ ۳ و الیاف شمارهٔ ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگِ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شمارهٔ ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شمارهٔ الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$	$W_۴$	$W_۵$
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟
چون مربع نوشته شده ، مربع لاتین است و هر عدد نشان دهنده یک ماشین می باشد .

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند.
چون مربع مربوطه ، مربع لاتین است و هر عدد نمایشگر یک نوع الیاف است .

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟ چون A و B متعامدند .

۴ اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اوّل هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

ابتدا برای استفاده سه برادر از ۳ کُت در سه روز هفته به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که هر کدام در هر روز یک کُت بپوشد . لذا مربع لاتین روبرو را چنان رسم کرده که هر سطر نشان دهنده یکی از سه روز هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران باشد و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از کُت ها باشد .

	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

به همین ترتیب یک مربع لاتین دیگر که هر سطر نشان دهنده ی یکی از روزهای هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران است و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از پیراهن ها باشد ، رسم می کنیم . به طوری که با مربع قبلی متعامد باشد . (شکل روبرو)

	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

تلفیق دو مربع بالا

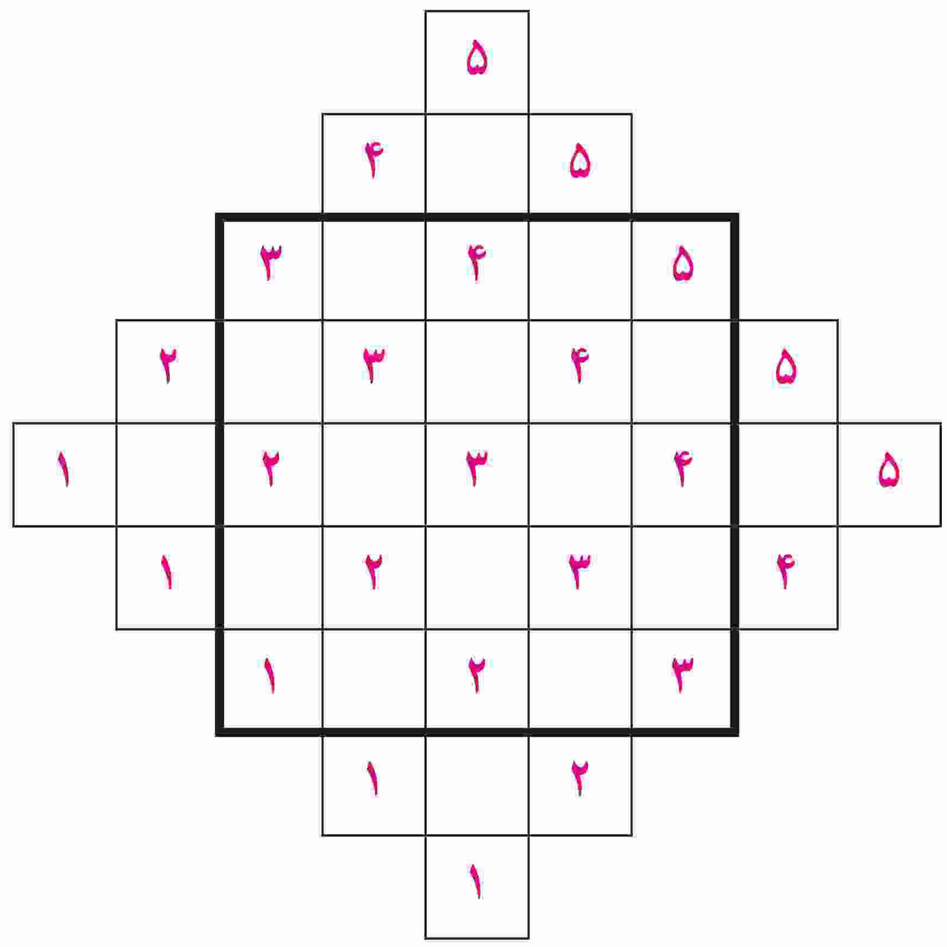
	$b_۱$	$b_۲$	$b_۳$
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۱	۱۲
دوشنبه	۳۲	۱۳	۲۱

تلفیق دو مربع(شکل روبرو) که متعامد می باشد ، برنامه مورد نظر را در اختیار ما قرار می دهد .
به طور مثال در روز شنبه برادر اول باید کُت۱ و پیراهن ۱ را بپوشد و در روز یکشنبه کُت ۲ و پیراهن ۳ را بپوشد و . . .

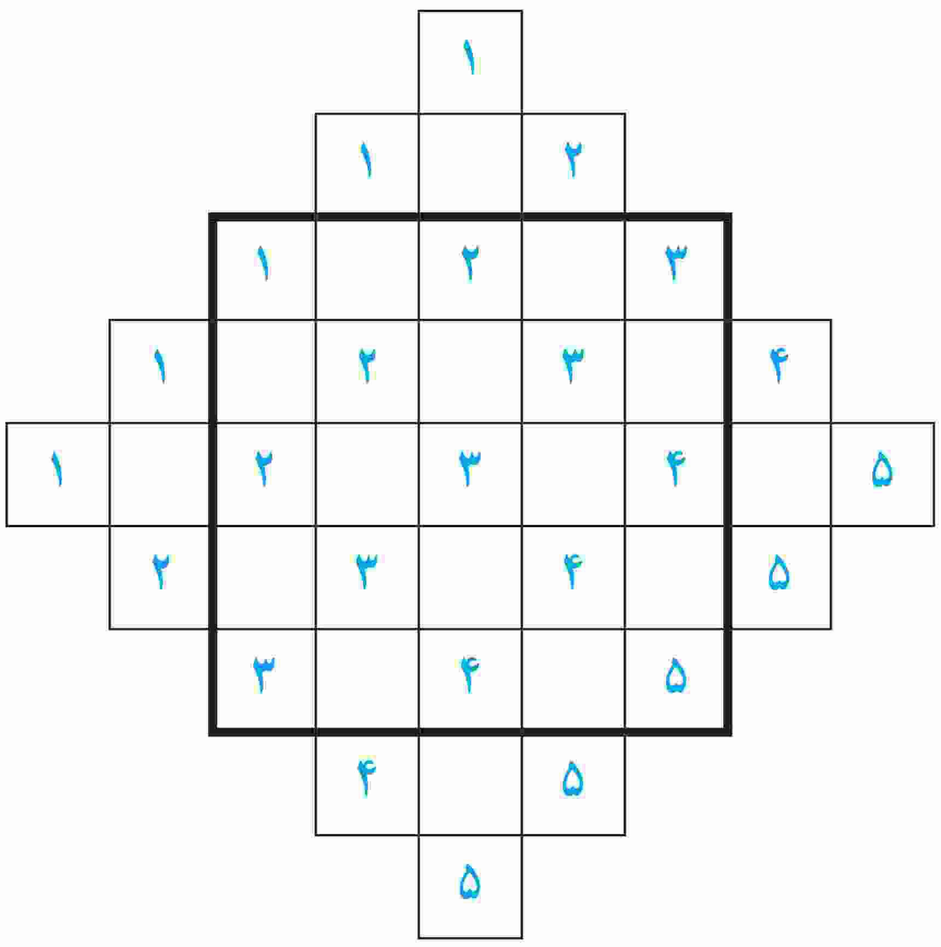
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ یک عدد فرد[1]

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین ۵ × ۵ متعامد به‌دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، . . . و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

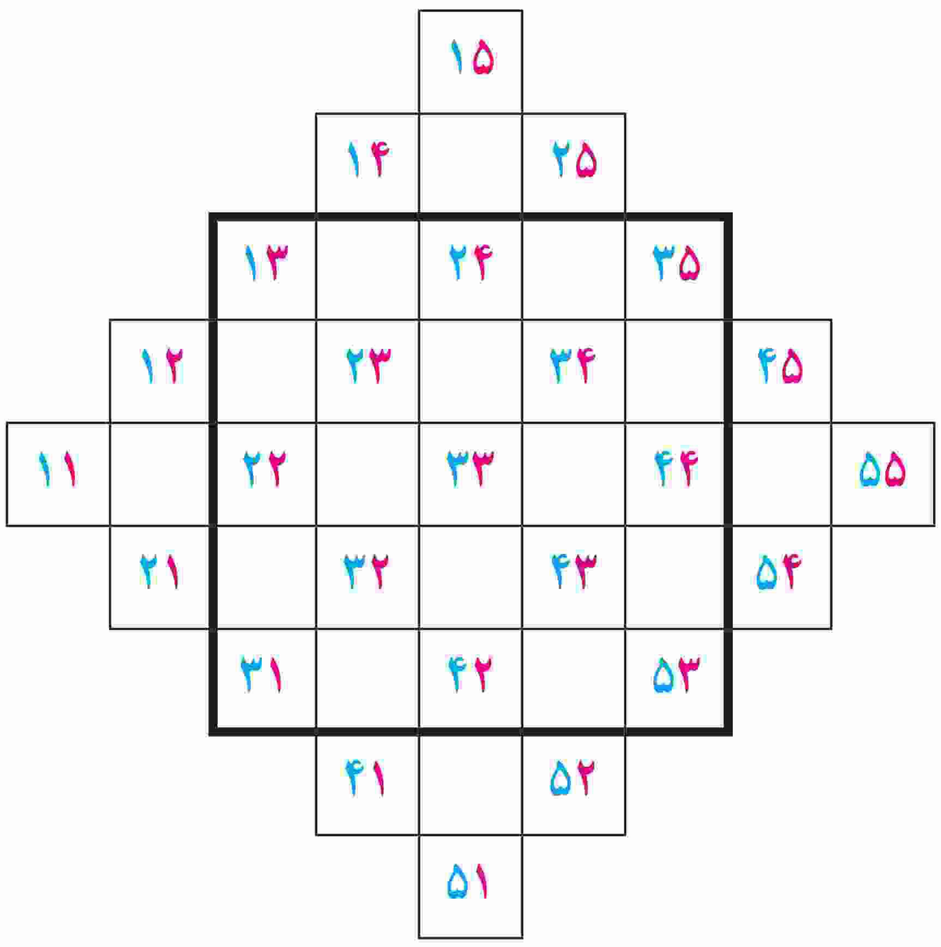


الف)



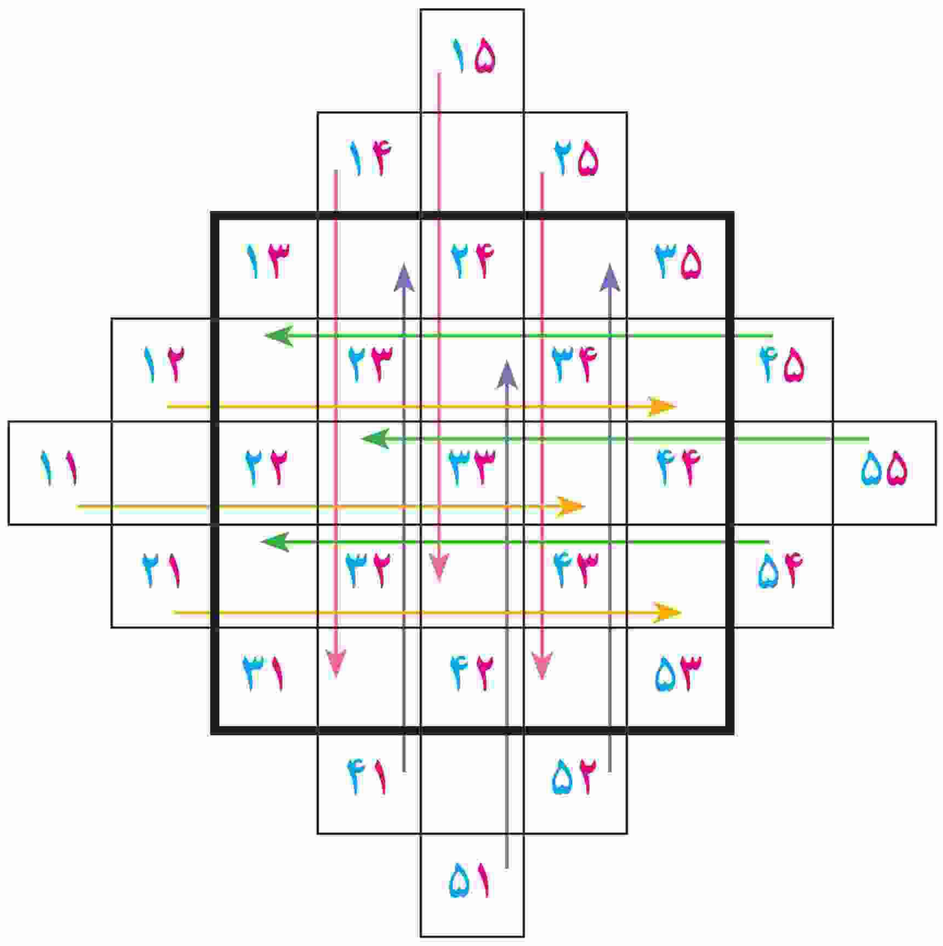
ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۱ــ از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمتِ چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

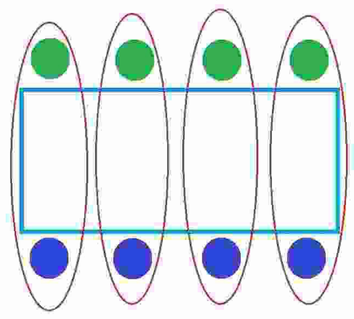
۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n به‌دست آورید.

تمرین

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



مسئله را به این صورت بیان می کنیم که :

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت برادر را روی آنها بنشانیم . طبق اصل شمارش این عمل به !۴ حالت امکان پذیر است .

از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم(کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید !۴ در $۲^۴$ ضرب شود . بنابراین جواب مسئله $۲^۴ \times !۴$ است .

۲ اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ ، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه ی A برابر است با : $\binom{۴}{۲}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه ی B برابر است با : $\binom{۵}{۳}$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر !۵ می باشد ،لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله $\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۳} \times ۵!$ است .

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر :

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به !۹ طریق امکان پذیر است .

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پَک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی ، ۶ شیء محسوب می شود و تعداد جایگشت آنها !۶ خواهد بود .

از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد !۴ طریق با هم امکان جابجایی دارند ، لذا طبق اصل ضرب ، جواب مسئله $!۴ \times !۶$ است .

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند : $RFRFRFRFR$

لذا برای ریاضی ها !۵ و برای فیزیک ها !۴ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل $!۴ \times !۵$ روش امکان پذیر است .

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

کتاب های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به !۳ طریق کنار هم قرار می گیرند در نظر می گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی مانده به !۷ طریق می توان کنار هم چید .

در نتیجه بنا به اصل ضرب به $!۷ \times !۳$ روش امکان پذیر است .

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن !۴×!۷ باشد.

۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند ، به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند ؟

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟ $\frac{!۶}{!۳ \times !۲}$

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرفِ d,d,d,c,c,a,b,a,a ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟ $\frac{!۹}{!۲ \times !۳ \times !۳}$

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟ $\frac{۷!}{۳!\times ۲!\times ۲!}$

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛ x_i را به عنوان گُل نوع i اُم معرفی می کنیم در نتیجه جواب مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$ است . بنابراین پاسخ آن $\binom{۱۱+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۵}{۴}$ است .

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

تعداد جواب های صحیح مثبت معادله قسمت قبل،جواب مسئله می باشد یعنی : $\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

یعنی در معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$ شرایط $x_۲\geq ۲$ و $x_۵>۳$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_۲\geq ۲\Rightarrow \underbrace{x_۲-۲}_{y_۲}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_۲=y_۲+۲}$$

$$x_۵>۳\Rightarrow x_۵\geq ۴\Rightarrow \underbrace{x_۵-۴}_{y_۵}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_۵=y_۵+۴}$$

$$\Rightarrow x_۱+y_۲+۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴=۱۱$$

$$\Rightarrow x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۵\Rightarrow \binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

یعنی در معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$ شرایط $x_۳=۰$ و $x_۴\geq ۵$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_۴\geq ۵\Rightarrow \underbrace{x_۴-۵}_{y_۴}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_۴=y_۴+۵}\xrightarrow{x_۳=۰} x_۱+x_۲+۰+y_۴+۵+x_۵=۱۱$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+y_۴+x_۵=۶\Rightarrow \binom{۶+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}$$

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۰$ $\qquad x_i>۰\ ,\ ۲\leq i\leq ۵$

$$\xrightarrow{۲\leq i\leq ۵} x_i>۰\Rightarrow x_i\geq ۱\Rightarrow \underbrace{x_i-۱}_{y_i}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_i=y_i+۱}\Rightarrow x_۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۰$$

$$\Rightarrow x_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶\Rightarrow \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$$

ب) $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱۲$ $\qquad x_۱>۲\ ,\ x_۵\geq ۴$

$$x_۱>۲\Rightarrow x_۱\geq ۳\Rightarrow \underbrace{x_۱-۳}_{y_۱}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_۱=y_۱+۳}$$

$$x_۵\geq ۴\Rightarrow \underbrace{x_۵-۴}_{y_۵}\geq ۰\Rightarrow \boxed{x_۵=y_۵+۴}$$

$$\Rightarrow y_۱+۳+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴+x_۶=۱۲$$

$$\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+x_۶=۵\Rightarrow \binom{۵+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}$$

پ) $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۱$ $\qquad x_i\geq ۱\ ,\ ۱\leq i\leq ۵$

طبق شرط مسئله ، باید تعداد جواب های صحیح و مثبت(طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با : $\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$

ت) $x_۱+۳x_۲+x_۳+x_۴=۷$ $\qquad x_i \geq ۰ \ , ۱ \leq i \leq ۴$

بدیهی است که با توجه به ضریب $x_۲$، برای آن ۳ حالت می توان در نظر گرفت :

حالت اول : $x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$

حالت دوم : $x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۴ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$

حالت سوم : $x_۲ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۱+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲} = ۳$

$$۳۶ + ۱۵ + ۳ = ۵۴$$

ث) $x_۱+\sqrt{x_۲}+x_۳+x_۴=۳$ $\qquad x_i \geq ۰ \ , ۱ \leq i \leq ۴$

با توجه به شرایط معادله ، چهار حالت برای $x_۲$ وجود دارد :

حالت اول : $x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۳ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$

حالت دوم : $x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۲ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$

حالت سوم : $x_۲ = ۴ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۱+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲} = ۳$

حالت چهارم : $x_۲ = ۹ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۰ \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۰+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۲}{۲} = ۱$

بنابراین تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله برابر است با : $۱۰+۶+۳+۱=۲۰$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_۱+x_۲+x_۳=۵ \xrightarrow{x_i \geq ۰} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد .

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸ \xrightarrow{x_i \geq ۱} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

۱۲ آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر امکان ندارد متعامد باشند زیرا اگر مثلاً در جایگشت، $۱ \to a$ باشد ، آنگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول ، عدد a در مربع دوم ظاهر می شود که در مربع تلفیق زوجِ $۱a$ تکراری خواهد بود .

برای درک بهتر به مربع روبرو همراه با جایگشت آن دقت کنید :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$۱ \to a$
$۲ \to ?$
$۳ \to ?$

a	?	?
?	?	a
?	a	?

۱۳ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

$A_۱ =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

تلفیق

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامدند .

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

$A_۲ =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

و $A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روبرو ، برای دو عدد یکسان ۱ ، دو عدد یکسان ۲ نظیر شده است .

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، به طور قطع نمی توان گفت ، ممکن است متعامد باشند یا نباشند .

۲ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، در بعضی مواقع ممکن است .

۱۴ قرار است شش مدرس T_1، T_2 و ... و T_6 در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ C_1، C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

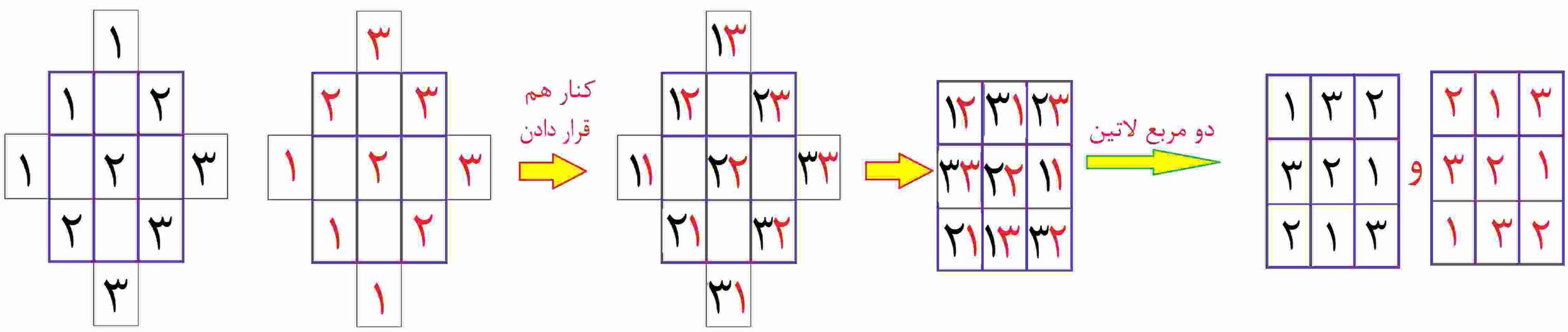
یک مربع لاتین ۶ × ۶ که هر سطر آن یکی از جلسات و هر ستون آن یکی از کلاس ها را مشخص می کند .

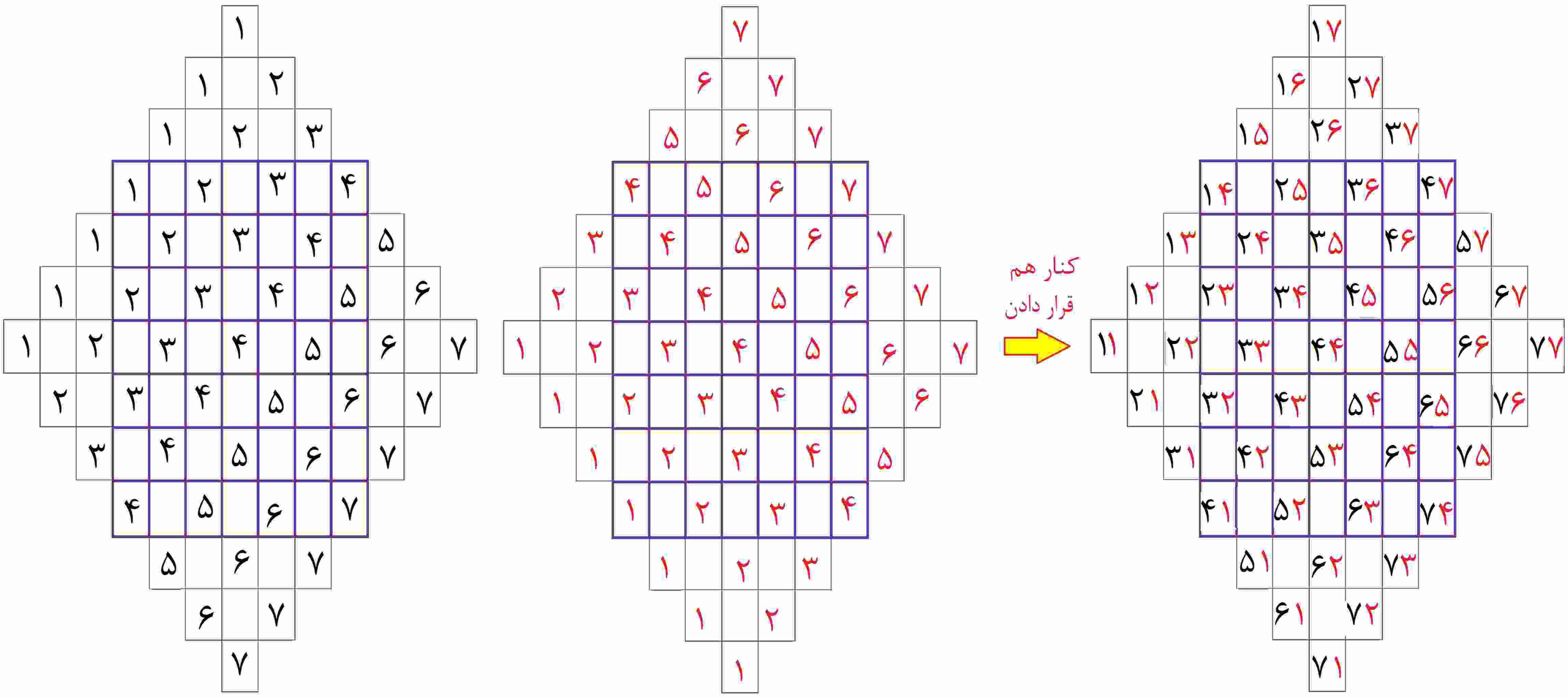
به عنوان نمونه معلم T_1 جلسه اول را در کلاس C_1 است .

و معلم T_6 جلسه چهارم را در کلاس C_3 است .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسه اول	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسه دوم	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسه سوم	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسه چهارم	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسه پنجم	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
جلسه ششم	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.





۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

و

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

دو مربع لاتین

۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

۱۶ در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد :

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود.

ــ برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

کافیست دو مربع لاتین ۷ × ۷ بنویسیم ، به طوری که سطر های آنها ، روز های هفته و ستون های آنها راننده ها نام گذاری شوند .

((برای سهولت در نوشتن ، راننده ها را a,b,c,d,e,f,g نام گذاری می کنیم .))

اگر آن دو مربع را A و B بنامیم ، اعداد درون مربع های A شماره ماشین و اعداد درون مربع های B شماره مسیر را مشخص می کنند .

لذا مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های آنها ، جواب مسئله است .

برای این منظور از مربع های بدست آمده در سوال ۱۵ استفاده می کنیم :

$A=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و

$B=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

تلفیق

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
یکشنبه	۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
دوشنبه	۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
سه شنبه	۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
چهارشنبه	۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
پنجشنبه	۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
جمعه	۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۴ خواهد بود .

عزیزان می توانند به محض آماده شدن دیگر
فایل ها به وبلاگ مراجعه نموده و دانلود کنند .
آدرس وبلاگ: sinxcosx.blogfa.com
همچنین در صورت مشاهده اشتباه در محاسبه و پاسخ
ها بنده را از طریق شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ مطلع سازید .
سپاسگزارم

نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی شهرستان : آبادان
با تشکر فراوان از استاد عزیزآقای انارکی که همکاری بسیار زیاد داشته و بنده را در حل مسائل یاری نموده اند.

هزینه این فایل : قرائت صلوات جهت سلامتی
مُنجی عالم بشریت ، قُطب دایره امکان (عج)

درس ۲ روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\cup B)$ یعنی $|A\cup B|$ چون اعضای $(A\cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A\cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

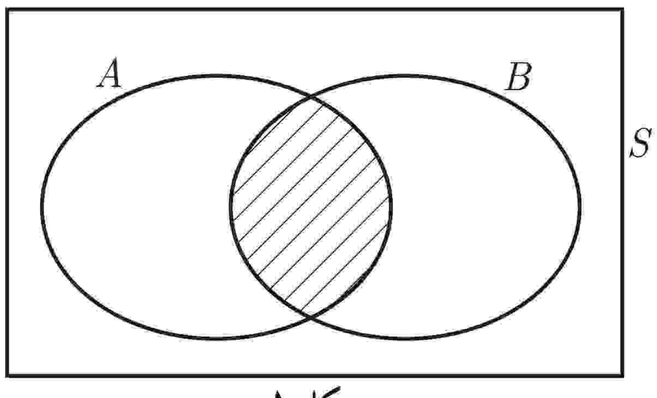
این تساوی به **اصل شمول** و **عدم شمول** برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را **اصل شمول** می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A\cup B)'|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

این تساوی نتیجهٔ اصل شمول است.

نتیجهٔ مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند. برابر است با :



شکل ۱

$$|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشتهٔ ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند به‌ترتیب F و V بنامیم در این‌صورت خواهیم داشت :

$|F\cup V|=|F|+|V|-|F\cap V| \Rightarrow |F\cup V|=۱۵+۱۴-۹=۲۰$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند $=|\overline{F\cup V}|=|S|-|F\cup V|=۲۵-۲۰=۵$

اصل شمول را می‌توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

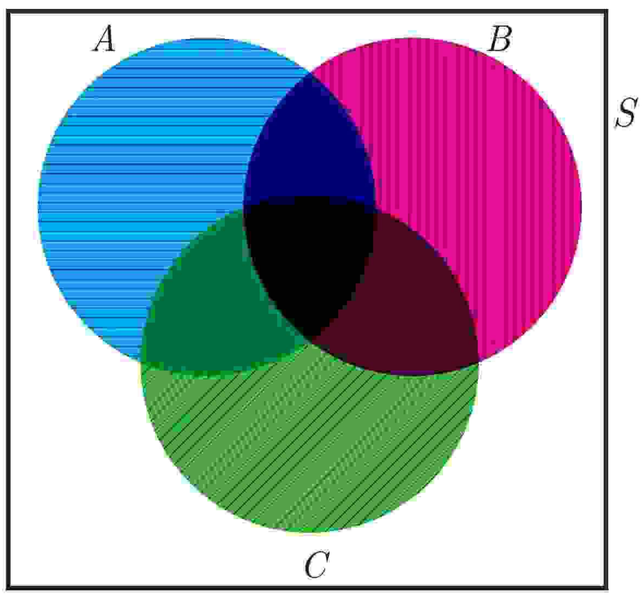
اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این‌صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

چون در جمعِ تکی ها ، اشتراک های دو تایی مکرر شمرده شده اند ، باید اضافی آن حذف شود . لذا اشتراک های دو تایی را کم می کنیم .

از طرفی طی کم کردن آن اشتراک ها ، اشتراک سه تایی که قبلاً ۳ بار حساب شده ، ۳ بار هم کم می شود ، پس باید یکبار افزوده گردد .



شکل ۲

با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می‌شود :

$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$ (تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند)

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۴۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک موردنظر می‌باشند؟ ۱۳ زیرا بر هیچکدام از اعداد ۳و۴و۵ بخش پذیر نیست .

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد موردنظر است؟ خیر ، زیرا بر هر سه عدد ۳و۴و۵ بخش پذیر است .

۳ اگر مجموعهٔ اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیرند A و اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید.

$\overline{A}$ = مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند . $\overline{B}$ = مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند . $\overline{C}$ = مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند .

آیا مجموعهٔ $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می‌شود؟ بله

۴ آیا تساوی $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=(\overline{A\cup B\cup C})$ برقرار است؟ بله ، زیرا :

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{(A\cup B)\cup C}\overset{\text{دمورگان}}{=}\overline{A\cup B}\cap\overline{C}\overset{\text{دمورگان}}{=}(\overline{A}\cap\overline{B})\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجهٔ اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۳\mid n\}\rightarrow |A|=\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]=۱۳۳$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{۳}\right]$).

$$B=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۴\mid n\}\rightarrow |B|=\left[\frac{۴۰۰}{۴}\right]=۱۰۰$$

$$C=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۵\mid n\}\rightarrow |C|=\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]=۸۰$$

$(A\cap B)$ یعنی مجموعهٔ اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعهٔ اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعهٔ اعدادی که بر «ک‌م‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A\cap B|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=۳۳$$

$$|A\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=۲۶$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right]=۲۰$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=۶ \qquad ([۳,۴,۵]=[[۳,۴],۵]=[۱۲,۵]=۶۰)$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=۴۰۰-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=۴۰۰-(۱۳۳+۱۰۰+۸۰-۳۳-۲۶-۲۰+۶)=۱۶۰$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۳۵۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵،۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

(توجه داشته باشید که $[۵,۶]=۳۰$, $[۴,۶]=۱۲$, $[۵,۴,۶]=۶۰$)

مجموعه اعداد بخش پذیر بر۴ ، را با A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ را با B و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷ \quad و \quad |B|=\left[\frac{۳۵۰}{۵}\right]=۷۰ \quad و \quad |C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸ \quad و \quad |A\cap B|=\left[\frac{۳۵۰}{۲۰}\right]=۱۷$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۳۰}\right]=۱۱ \quad و \quad |C\cap A|=\left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹ \quad و \quad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶۰}\right]=۵$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳۵۰-(۸۷+۷۰+۵۸-۱۷-۱۱-۲۹+۵)=۱۸۷$$

مثال : اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.

حل : یک رمز ۴ رقمی را به‌صورت $\overline{abcd}$ نمایش می‌دهیم که در آن a ، b ، c و d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبهٔ تعداد چنین ارقامی به‌صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه موردنظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷\}\rightarrow |A|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$B=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۸\}\rightarrow |B|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$(A\cap B)=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷,۸\}\rightarrow |A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به‌کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴رقمی است که در آنها عدد ۸ به‌کار رفته است. البته $(\overline{A}\cap\overline{B})$ یعنی مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به‌کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ⟵ تعداد کل ۴ رقمی‌ها $=|S|=$ ۱۰×۱۰×۱۰×۱۰ = ۱۰۰۰۰

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$

$=$۱۰۰۰۰−(۹⁴+۹⁴−۸⁴) = ۹۷۴

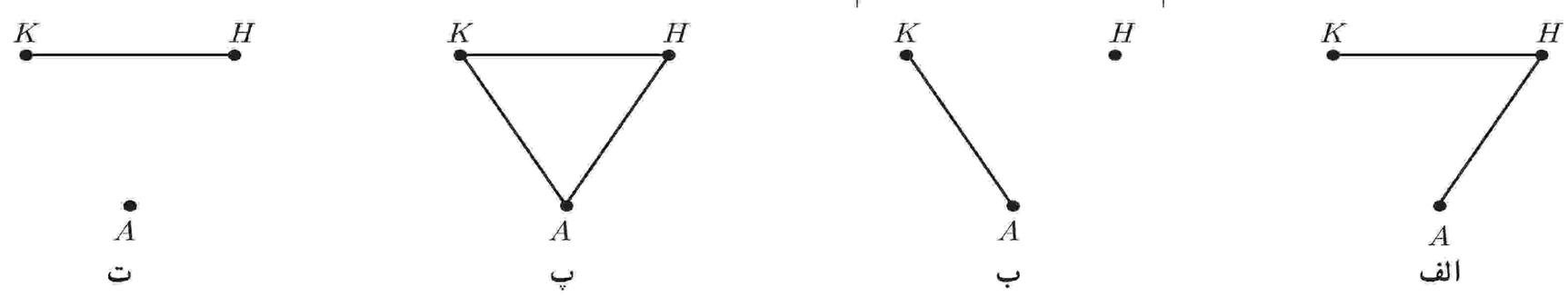
زمان لازم برحسب ثانیه =۹۷۴×۵ = ۴۸۷۰

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به‌طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف سادهٔ زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ گراف های ب و ت را نباید شمرد زیرا یک راس تنها می ماند .



شکل ۳

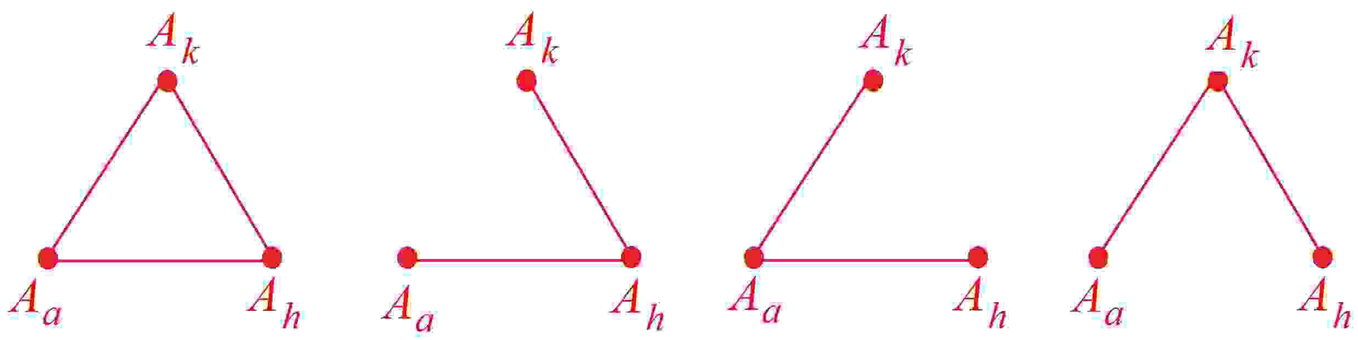
۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با : $|S|=۲^{\binom{۳}{۲}}=۲^{۳}=۸$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحیِ ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعهٔ راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

$|A_k|=|A_a|=|A_h|=۲$ و $|A_k\cap A_a|=|A_a\cap A_h|=|A_h\cap A_k|=۱$ و $|A_k\cap A_a\cap A_h|=۱$

$\Rightarrow|\overline{A_k}\cap\overline{A_a}\cap\overline{A_h}|=|\overline{A_k\cup A_a\cup A_h}|=|S|-|A_k\cup A_a\cup A_h|=۸-(۲+۲+۲-۱-۱-۱+۱)=۴$



۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k|=|A_a|=|A_h|=۲$ یکی از روستا ها را کنار گذاشته و فقط بین دو روستای دیگر می تواند یک جاده باشد یا نباشد . لذا ۲ حالت داریم .

ب) $|A_k\cap A_a|=|A_k\cap A_h|=|A_a\cap A_h|=۱$ یک راس مانده و فقط یک حالت داریم و آن گراف تهی است .

پ) $|A_k\cap A_a\cap A_h|=۱$ تمام رئوس بدون یال هستند (بین روستاها جاده نیست) که گراف تهی بوده و فقط یک حالت محسوب می شود .

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \le i \le m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا ... یا $f(a_i)=b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با : $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$، در این‌صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و تعریف کنیم،

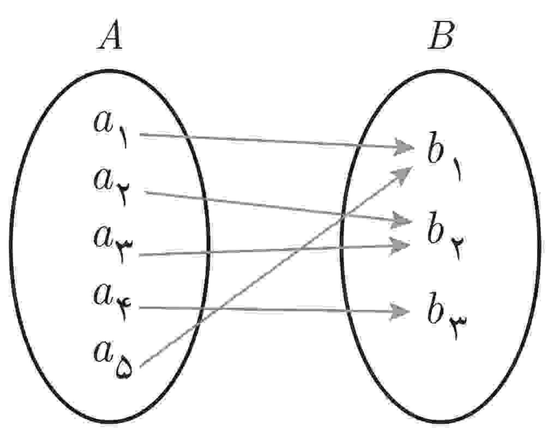
$A_1=\{f: A \to B \mid f(a_i) \ne b_1 ; 1 \le i \le 5\}$

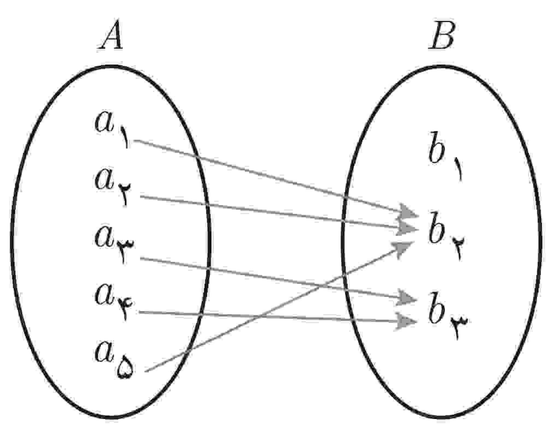
$A_2=\{f: A \to B \mid f(a_i) \ne b_2 ; 1 \le i \le 5\}$

$A_3=\{f: A \to B \mid f(a_i) \ne b_3 ; 1 \le i \le 5\}$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می‌آورند.

یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $\overline{A_1}$





یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ A_1

شکل ۴

۲ مجموعهٔ $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = (\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$|S| = 3^5 = 243 , |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$

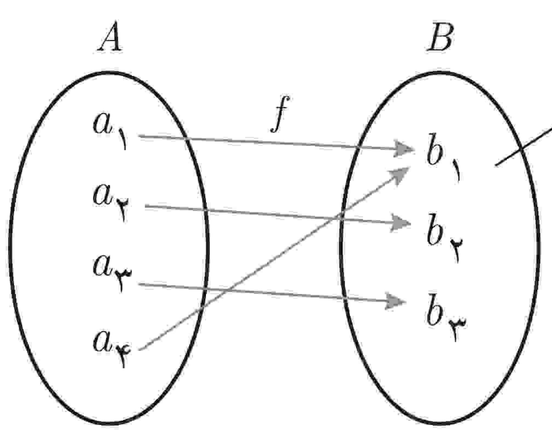
$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1 \quad , |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$= 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B، به طوری که بُرد این توابع همهٔ اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت داده شود.)



به شخص b_1 دو خودکار a_1 و a_4 داده شده است.

شکل ۵

$A_i = \{f : A \to B \mid f(a_i) \ne b_j , 1 \le i \le 4 , 1 \le j \le 3\}$

$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1 , |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\overline{A_۱}\cap\overline{A_۲}\cap\overline{A_۳}|=\left|\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}\right|=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|$$
$$=۸۱-(۳\times۱۶-۳\times۱+۰)=۳۶$$

تذکر : تعداد تابع‌هایی چون $f: A\to B$ با فرض $|A|=m\geq ۳$ و $|B|=۳$ به‌طوری که $R_f=B$، از رابطهٔ $۳^m-(۳\times۲^m-۳)$ به‌دست می‌آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی که برابر است با $۸^۴=۴۰۹۶$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی را شمارش کنیم،

۱ اگر فرض کنیم $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,\cdots,b_۶\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_۱)$، چند راه انتخاب داریم؟ ۶ راه وجود دارد . زیرا $f(a_۱)$ می تواند $b_۱$ یا $b_۲$ یا $b_۳$ یا $b_۴$ یا $b_۵$ یا $b_۶$ انتخاب شود .

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_۱)$، برای تعریف f روی $a_۲$ چند راه انتخاب داریم؟ ۵ راه وجود دارد زیرا با انتخاب یکی از b_iها برای $f(a_۱)$ فقط ۵ انتخاب برای $f(a_۲)$ می ماند .

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_۱)$ را تعریف کرد $\to b_۶$ یا $\cdots$ یا $b_۲$ یا $f(a_۱)=b_۱$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_۲)$ را تعریف کرد $\to f(a_۲)\neq f(a_۱)\Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

به ۴ طریق می توان $f(a_۳)$ را تعریف کرد . $\Rightarrow f(a_۳)\neq f(a_۱)\ ,\ f(a_۳)\neq f(a_۲)\Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

.....

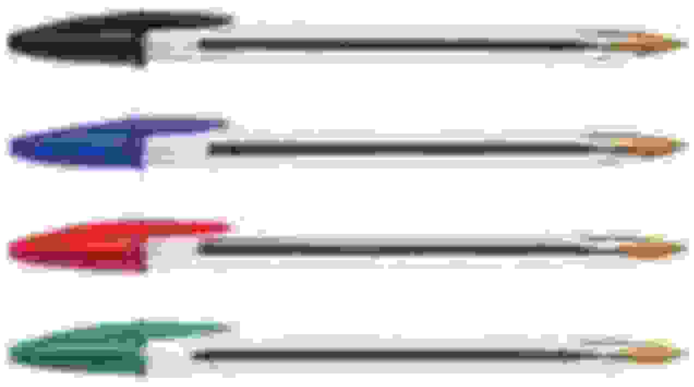
طبق اصل ضرب $\Rightarrow$ تعداد کل تابع‌های یک‌به‌یک $=۶\times۵\times۴\times۳=\frac{۶!}{۲!}=(۶)_۴$

این نماد همان $P(۶,۴)$ می باشد

در حالت کلّی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m\leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا $(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}$.

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شکل ۶

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی یعنی، $(۸)_۴ = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$.

اصل لانه کبوتری[1]

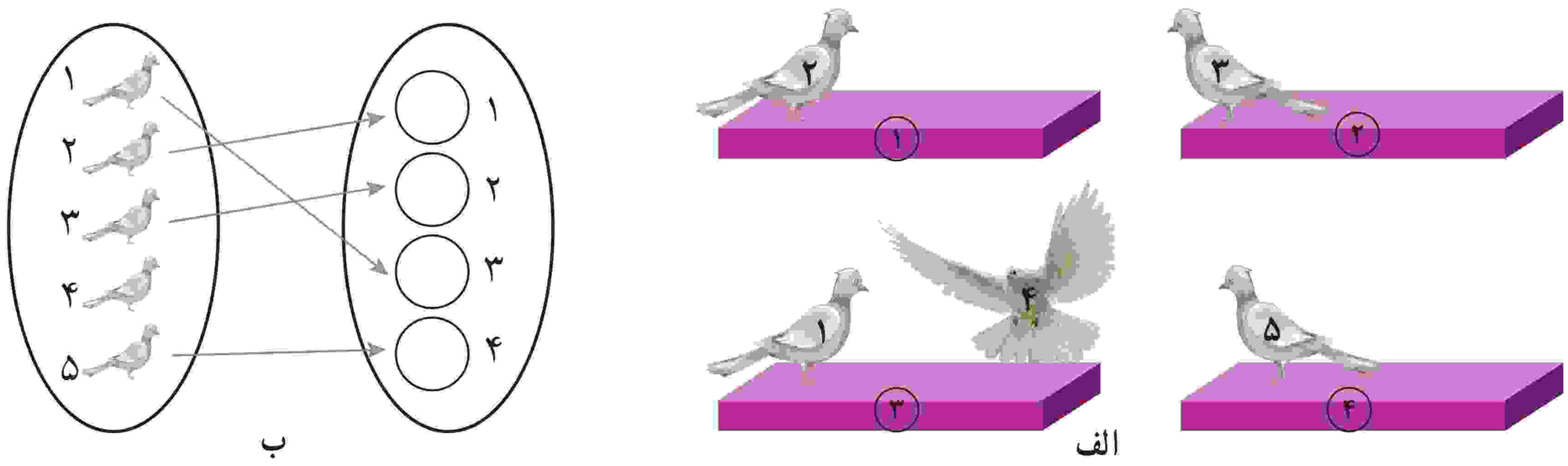
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولّدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به‌دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

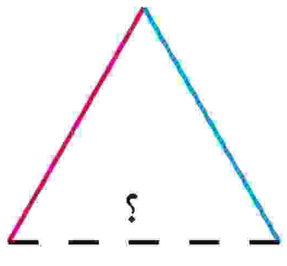
شکل ۷

اصل لانه کبوتری : اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱ــ اصل لانه‌کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل : اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

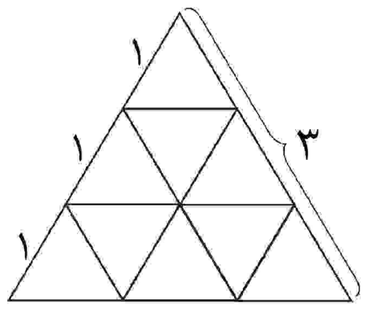
مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل : می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعهٔ $R=\{۰,۱,۲,۳\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \overset{۴}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

تمرین : در حالت کلّی ثابت کنید در بین هر $(n+۱)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند).

باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعضای مجموعه $R=\{۰,۱,۲,...,n-۱\}$ است ، حال اگر $n+۱$ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر n را لانه ها فرض کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت ،یعنی حداقل دو عدد از این $n+۱$ عدد باقی مانده های تقسیمشان بر n با هم برابر است .اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم ، آن دو در تقسیم بر n هم باقی مانده بوده و در نتیجه تفاضل آنها بر n بخش پذیر است . به عبارت دیگر $a \overset{n}{\equiv} b$.

کار در کلاس

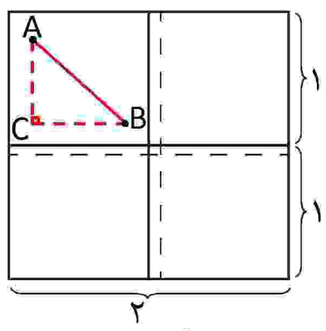


شکل ۹

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

مطابق شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم . حال ۱۰ نقطه را کبوتر و هر مثلث کوچک را یک لانه فرض می کنیم (۹ لانه داریم) ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت .

از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث کوچک ۱ واحد می باشد ، فاصله بین دو نقطه ی درون یک مثلث از ۱ واحد کمتر است .



شکل ۱۰

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

سوال : ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است . ثابت کنید ، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود دارد به طوری که فاصله ی آنها از یکدیگر کمتر از $\sqrt{۲}$ است .

پاسخ : مطابق شکل روبرو مربع را به چهار مربع یکسان (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می کنیم .

حال ۵ نقطه را کبوتر و مربعات کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می گیریم .طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه واقع می شوند ، یعنی حداقل دونقطه مثل A و B یافت می شوند که در یک مربع کوچک قرار می گیرند .

حال با توجه به شکل ، طبق قضیه فیثاغورث می توان نوشت :

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \xrightarrow[BC<۱]{AC<۱} AB^۲ < ۱^۲ + ۱^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۲ \Rightarrow AB < \sqrt{۲}$$

۳ نشان دهید در یک خانوادهٔ حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

هر سال دارای ۴ فصل است که آنها را به عنوان ۴ لانه و هر یک از افراد خانواده را به عنوان یک کبوتر در نظر می گیریم . بنابراین می خواهیم حداقل ۵ کبوتر را در ۴ لانه جای دهیم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند ، یعنی حداقل دو نفر از افراد خانواده وجود دارند که در یک فصل از سال متولد شده اند .

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $P \geq ۲$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (**راهنمایی :** مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این‌صورت درجات رئوس از ۱ تا $P-۱$ تغییر می‌کند.
(۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیهٔ رئوس از ۱ تا $P-۲$ تغییر می‌کند)

با توجه به راهنمایی داده شده مسئله را حل می کنیم :

حالت اول (اگر گراف فاقد راس تنها باشد) : هر کدام از رئوس گراف را یک کبوتر و هر کدام از درجات ۱ تا $P-۱$ را یک لانه فرض می کنیم . بنابراین P کبوتر و $P-۱$ تا لانه کبوتر داریم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو تا از رئوس دارای درجه یکسان می باشند .

حالت دوم (اگر گراف دارای یک راس تنها باشد) : درجه آن راس تنها صفر می باشد ، که با کنار گذاشتن آن ، $P-۱$ راس داریم و آنها را به عنوان کبوتر در نظر می گیریم .

از طرفی هر کدام از این رئوس می توانند درجات ۱ تا $P-۲$ داشته باشند . که اگر به عنوان لانه در نظر گرفته شوند ، طبق اصل لانه کبوتری با وجود $P-۱$ کبوتر و $P-۲$ لانه ، حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند . یعنی حداقل دو راس وجود دارد که دارای درجه یکسانند .

آیا نیازی هست حالتی را درنظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

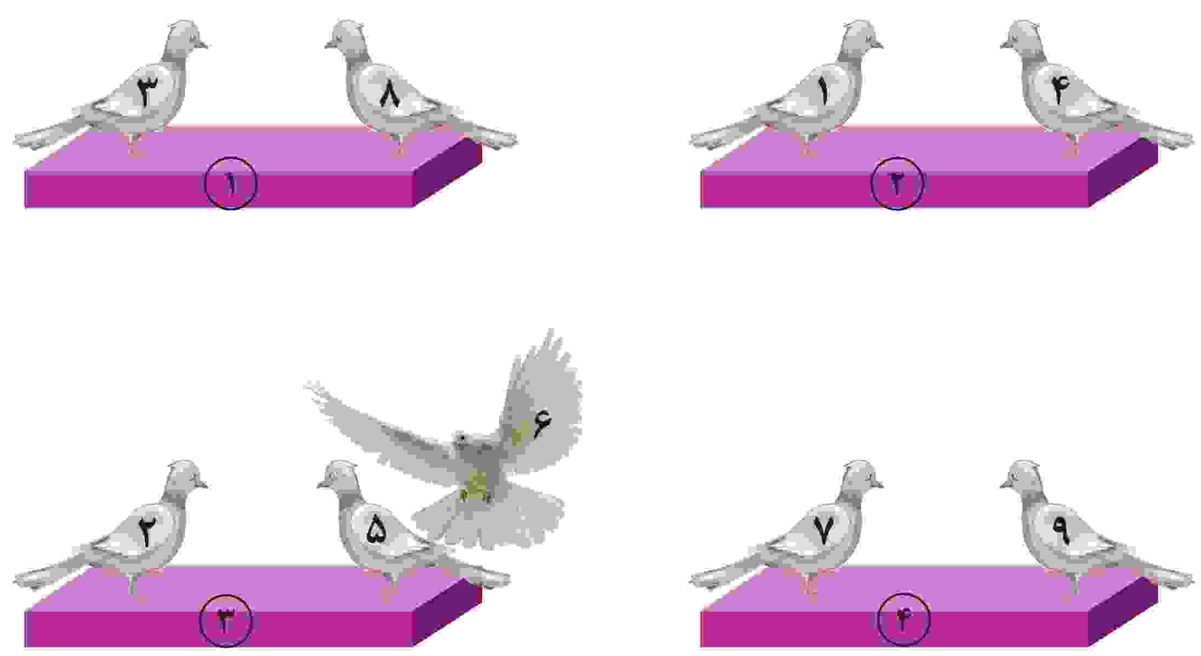
خیر ، زیرا هر چه راس تنها داشته باشیم ، آنها را کنار گذاشته و از تعداد رئوس و تعداد اعدادی که می توانند درجه ی آنها محسوب شوند ، به یک میزان کاسته می شود و همواره تعداد رئوس بیشتر از تعداد درجات است .

فعالیت

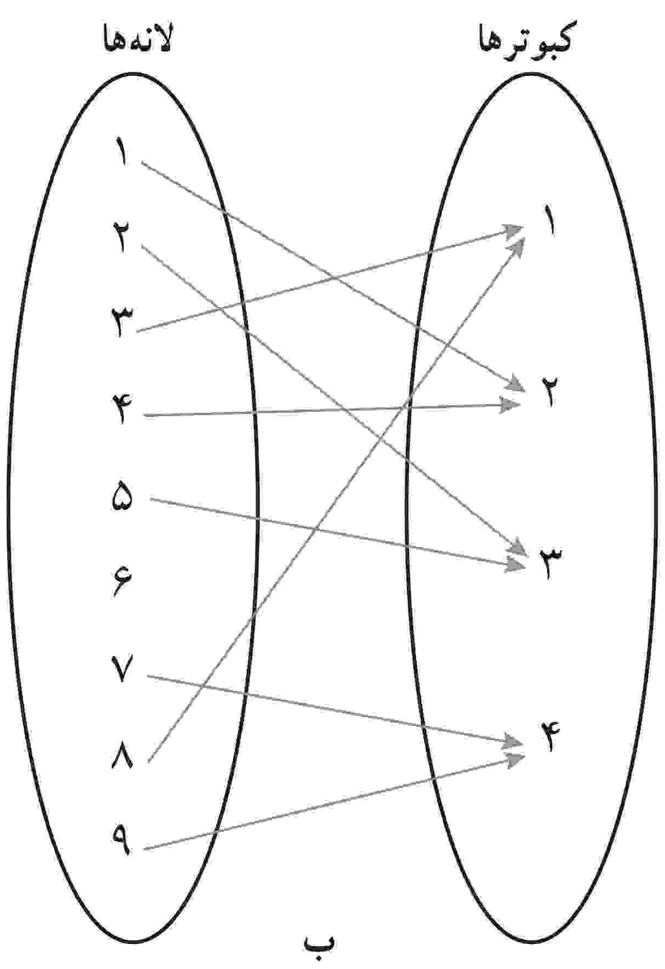
جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر	تعداد کبوترها $(kn+1)$	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	$1\times n+1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر	$2\times n+1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	$3\times n+1$	n
⋮	⋮	⋮
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $k+1$ کبوتر	$kn+1$	n

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به‌ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $2\times4+1=9$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدّد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است.
توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همهٔ کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا . . .).



الف



ب

شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله $k+۱=۷$ یعنی $k=۶$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=۱۲$ است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn+۱=۶\times۱۲+۱=۷۳$ باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟ هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است ، لذا طبق اصل ضرب $n=۱۲\times۷=۸۴$.

$$\left.\begin{array}{l} n=۸۴ \\ k+۱=۱۰ \Rightarrow k=۹ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حداقل تعداد دانش آموزان} = kn+۱=۸۴\times۹+۱=۷۵۷$$

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+۱=۵ \Rightarrow k=۴$

$kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=۵۳ \Rightarrow n=[\frac{۵۳}{۴}]=۱۳$

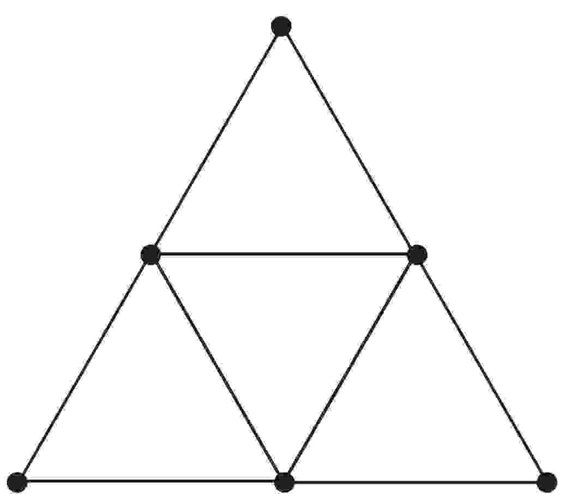
۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟ (فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی موردنظر است).

تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می باشد ، پس برای حرف اول ۳۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم ، که طبق اصل ضرب : $n=۳۲\times۳۱=۹۹۲$

$$\left.\begin{array}{l} n=۹۹۲ \\ k+۱=۳ \Rightarrow k=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حداقل تعداد افراد حاضر در سالن همایش} : kn+۱=۲\times۹۹۲+۱=۱۹۸۵$$

مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصلهٔ این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.



شکل ۱۲

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز $(n\geq۲)$ حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطهٔ دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

طبق آنچه راهنمایی شده ، گرافی را تعریف می کنیم که راس های آن دانش آموزان و رابطه ی دوستی بین هر دو دانش آموز ، یالی بین راس های متناظرشان باشد . بنابراین درجه ی هر راس تعیین کننده تعداد دوستان شخص متناظر با آن راس است .

از طرفی در هر گراف ساده حداقل دو راس هم درجه وجود دارد ، یعنی حداقل دو دانش آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها با هم برابر است .

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($۱\leq n \leq ۹۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]=۴۵ \qquad |B|=\left[\frac{۹۰}{۳}\right]=۳۰ \qquad |A\cap B|=\left[\frac{۹۰}{۶}\right]=۱۵$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($۱\leq n \leq ۲۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]=۵۰ \quad و \quad |A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]=۷ \Rightarrow |A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=۵۰-۷=۴۳$$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

$$|F|=۱۵ \quad و \quad |V|=۱۱ \quad و \quad |B|=۹ \quad و \quad |F\cap V|=۵ \quad و \quad |V\cap B|=۶ \quad و \quad |F\cap B|=۳ \quad و \quad |F\cup V\cup B|=۳۴-۱۰=۲۴$$

$$|F\cup V\cup B|=|F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|V\cap B|-|B\cap F|+|F\cap V\cap B| \longrightarrow ۲۴=۱۵+۱۱+۹-۵-۶-۳+|F\cap V\cap B| \Rightarrow |F\cap V\cap B|=۳$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

$$|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$$

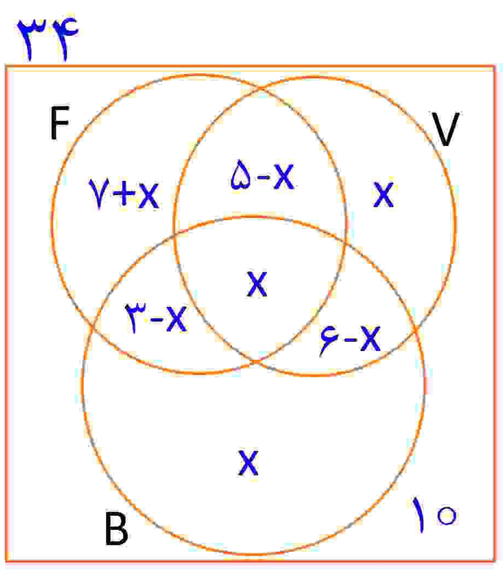
پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

$$|V-B|=|V|-|V\cap B|=۱۱-۶=۵$$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

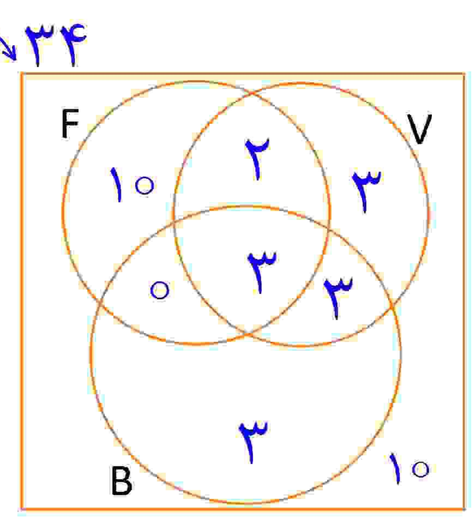
$$\left.\begin{array}{l} \text{فقط فوتبال}=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰ \\ \text{فقط والیبال}=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|=۱۱-۵-۶+۳=۳ \\ \text{فقط بسکتبال}=|B|-|B\cap F|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|=۹-۳-۶+۳=۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۱۶$$

روش ساده تر : پیشنهاد می شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود :



$$۷+x+۵-x+x+۳-x+x+۶-x+x+۱۰=۳۴ \Rightarrow x=۳$$

بنابراین می توان نمودار ون را به شکل زیر باز نویسی کرد :



الف) ۳

ب) ۱۰

پ) ۳+۲=۵

ت) ۱۰+۳+۳=۱۶

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

می خواهیم با ارقام ۹و۸و۷و۶و۵و۴و۳و۲و۱ رمز های ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند .

بدون در نظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $۹^۵$ رمز می توان ساخت . به عبارت دیگر : $|S| = ۹^۵$.

مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۷ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A| = |B| = |C| = ۸^۵ \quad و \quad |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = ۷^۵ \quad و \quad |A \cap B \cap C| = ۶^۵$$

$$\xrightarrow{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|} |A \cup B \cup C| = ۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵$$

$$\Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = ۹^۵ - (۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵) = ۳۳۹۰$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد ، حداکثر ۳۳۹۰×۶ = ۲۰۳۴۰ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است .

۵ چه تعداد تابع چون $f: A \to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

تعداد توابع مورد نظر برابر است با $۴^۵$ که هیچکدام از آنها یک به یک نیست ، زیرا تعداد اعضای دامنه ی تابع (A) بیشتر از تعداد اعضای هم دامنه ی تابع (B) است .

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

روش اول : حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب : ۸ (کتاب۱) ، ۷ (کتاب۲) ، ۶ (کتاب۳) ، ۵ (کتاب۴) ، ۴ (کتاب۵) $\xrightarrow{\times} \frac{۸!}{۳!}$

روش دوم : تعداد حالت ها ی ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای ۵ عضوی به یک مجموعه ی ۸ عضوی : $(۸)_۵ = \frac{۸!}{۳!}$

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد این حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۶ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی .

با فرض $X = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, y_۳\}$، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه می کنیم :

S = مجموعه ی تمام توابع قابل ساخت از X به Y $\Rightarrow |S| = ۳^۶$

A = مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۲, y_۳\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۱$ است) . $\Rightarrow |A| = ۲^۶$

B = مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱, y_۳\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۲$ است) . $\Rightarrow |B| = ۲^۶$

C = مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱, y_۲\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۳$ است) . $\Rightarrow |C| = ۲^۶$

$$\Rightarrow |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = ۱ \quad و \quad |A \cap B \cap C| = ۰$$

$$\xrightarrow{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|} |A \cup B \cup C| = ۳ \times ۲^۶ - ۳ \times ۱ + ۰$$

$$\Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = ۳^۶ - (۳ \times ۲^۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۵۴۰$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه در نظر بگیریم ، می خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (هر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سالهای کبیسه که ۳۶۶ روز می باشند) جای دهیم .

لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت ، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند که در یک روز سال متولد شده اند .

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظور از یکسان بودن روزِهفته و ماه تولد آن است که ایام طبق اعضای مجموعه ی زیر در نظر گرفته شده اند :

{(اسفندوجمعه) و. . . و (اردیبهشت و شنبه) و (فروردین و جمعه) و (فروردین و پنجشنبه) و (فروردین و چهارشنبه) و (فروردین و سه شنبه) و (فروردین و دوشنبه) و (فروردین و یکشنبه) و (فروردین و شنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و درنتیجه $۷ \times ۱۲ = ۸۴$ لانه داریم .

حال در صورتی که هر دانش آموز را به عنوان یک کبوتر ، در نظر بگیریم ، ۵۰۵ کبوتر داریم . بنابراین :

$۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷ \Rightarrow$ حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است .

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (برای سهولت در حل مسئله ، سال را غیر کبیسه در نظر می گیریم .)

$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹$

$n = ۳۶۵$: تعداد لانه ها همان تعداد ایام سال است .

$\xrightarrow{n.k+۱}$ حداقل $۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$ نفر تماشا گر مسابقه کشتی هستند .

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

می دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲ ، برابر ۰ یا ۱ می باشد .

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوتر ها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی ۰ و ۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم ، طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت ، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند .

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند ، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود ، که در هر صورت مجموعشان عددی زوج است .

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۲, . . . , ۸۴\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعداد مجموعه ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم :

$\{۱, ۸۴\}$ و $\{۲, ۸۳\}$ و $\{۳, ۸۲\}$ و ... و $\{۴۲, ۴۳\}$

قفس ها را به عنوان لانه ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می گیریم ، به طوری که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم .

طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد ، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه وجود دارند که مجموع آن ها ۸۵ است .

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

مجموعه A را به ۱۲ زیر مجموعه به شکل زیر افراز می کنیم :

$A_۱=\{۵,۸۵\}$ $A_۲=\{۹,۸۱\}$ $A_۳=\{۱۳,۷۷\}$ $A_۴=\{۱۷,۷۳\}$ $A_۵=\{۲۱,۶۹\}$ $A_۶=\{۲۵,۶۵\}$

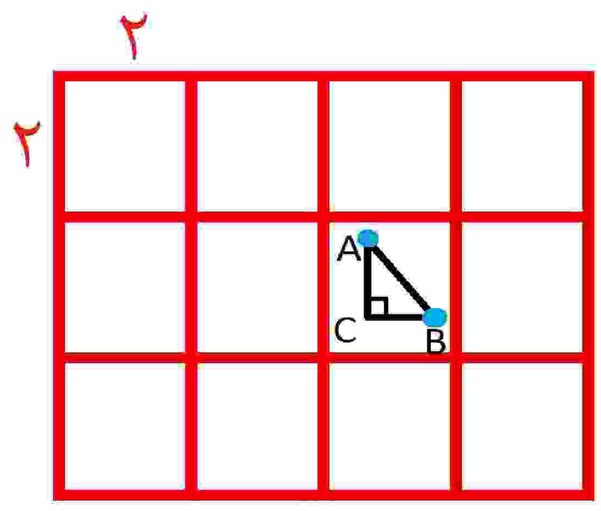
$A_۷=\{۲۹,۶۱\}$ $A_۸=\{۳۳,۵۷\}$ $A_۹=\{۳۷,۵۳\}$ $A_{۱۰}=\{۴۱,۴۹\}$ $A_{۱۱}=\{۴۵\}$ $A_{۱۲}=\{۱\}$

همانطور که مشاهده می شود ، مجموع اعداد درون زیر مجموعه های دو عضوی برابر ۹۰ است .

زیر مجموعه های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می گیریم که می خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد ، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه هستند .

واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است .

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.



مطابق شکل ، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر کدام از آنها را به عنوان یک لانه در نظر می گیریم.

در صورتی که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم ، می خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم . طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد .

حال طبق قضیه فیثاغورث :

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲ \xrightarrow[BC<۲]{AC<۲} AB^۲<۲^۲+۲^۲ \Rightarrow AB^۲<۸ \Rightarrow AB<\sqrt{۸}$$

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

پنج نقطه با مختصات های صحیح را به عنوان ۵ کبوتر معرفی می کنیم .

برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix}\text{زوج}\\ \text{زوج}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{زوج}\\ \text{فرد}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{فرد}\\ \text{زوج}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{فرد}\\ \text{فرد}\end{bmatrix}$ وجود دارد ، که اگر به عنوان چهار لانه در نظر گرفته شوند ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی ، حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات،شبیه هم خواهند بود .

پس مجموع طول های آنها زوج و مجموع عرض های آنها نیز زوج است ، در نتیجه مختصات نقطه ی وسط صحیح خواهد شد .