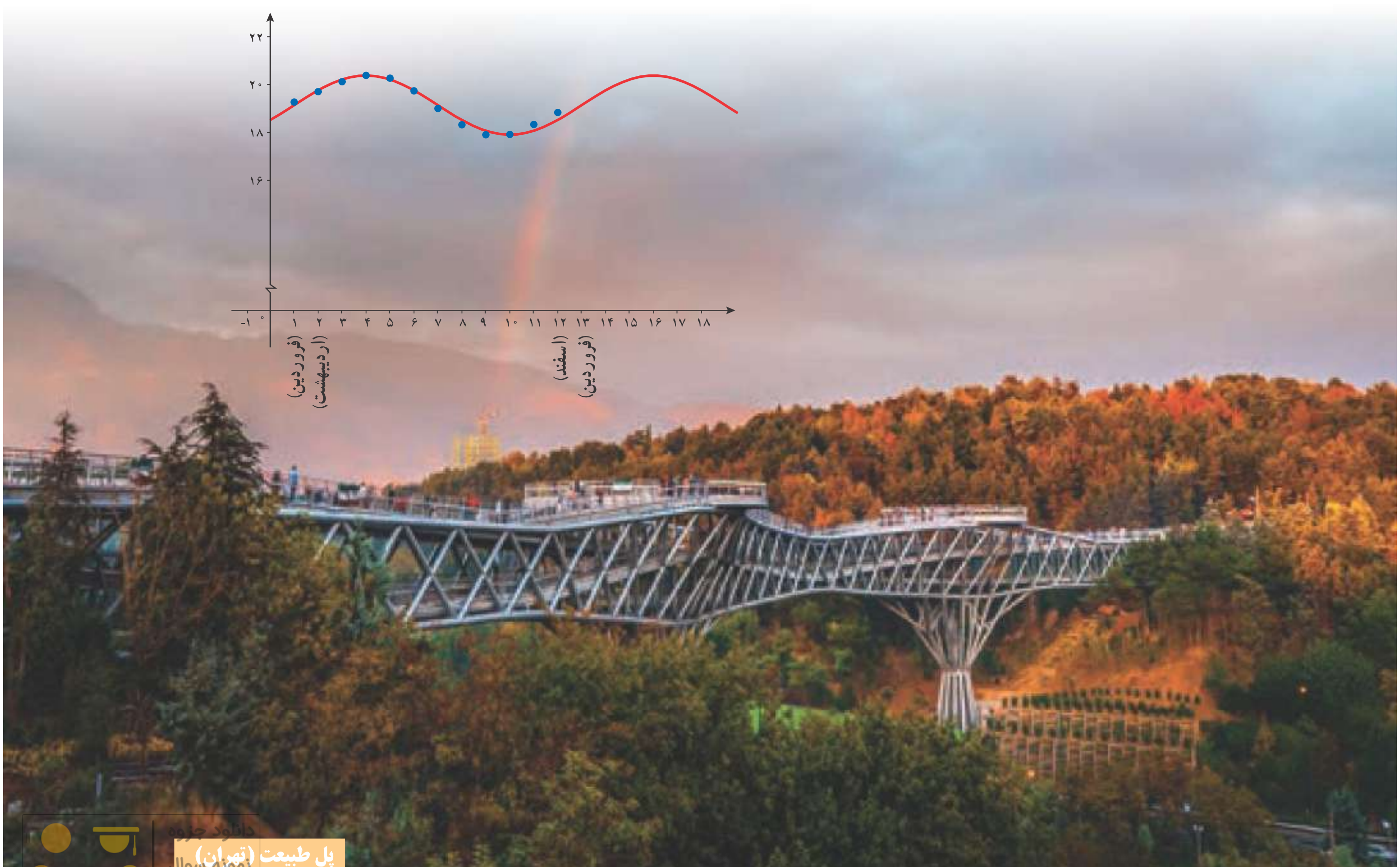
تابع

فصل ۱



پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل‌سازی می‌شوند. تبدیل نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت $y=۱/۲۴\sin(\frac{\pi}{۶}x-\frac{\pi}{۶})+۱۹/۱۴$ ، مدل ریاضی زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

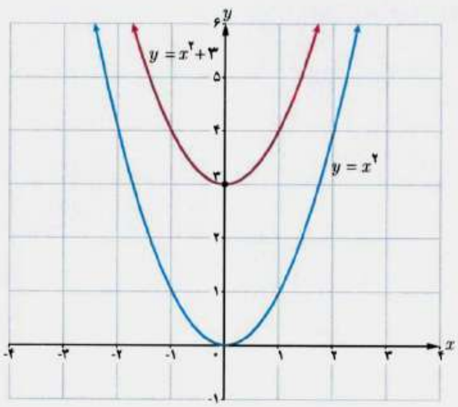
درس ۱

تبدیل نمودار توابع

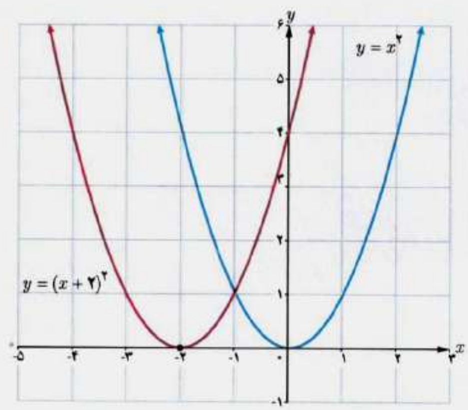
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+2)^2$ و $y=x^2+3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^2$ رسم کنید.



(ب)



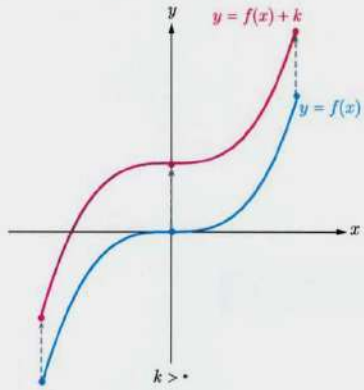
(الف)

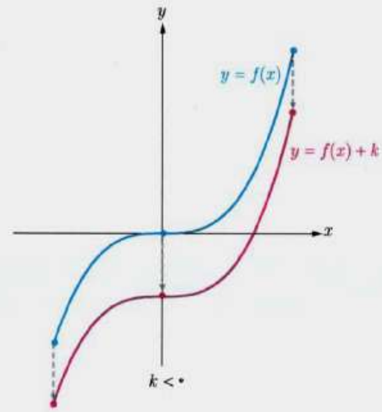
در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_0)=f(x_0)+k=y_0+k$$

بنابراین نقطه (x_0, y_0+k) از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.



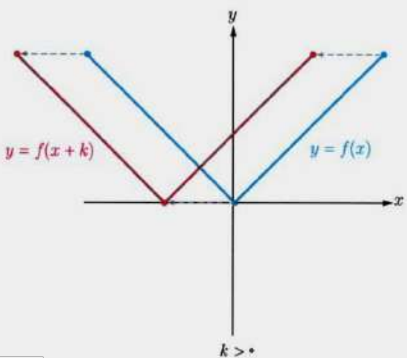


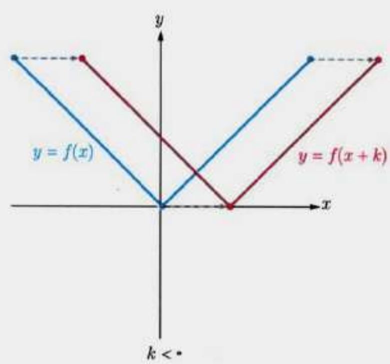
به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$h(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0) = y_0$$

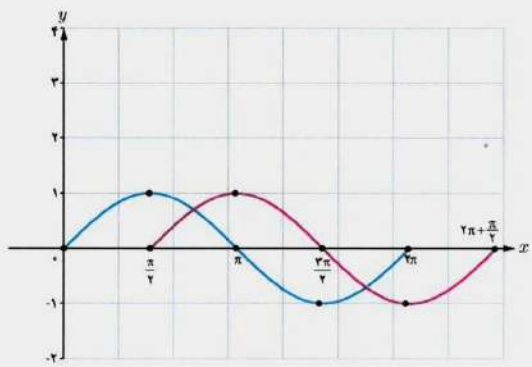
بنابراین نقطه $(x_0 - k, y_0)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

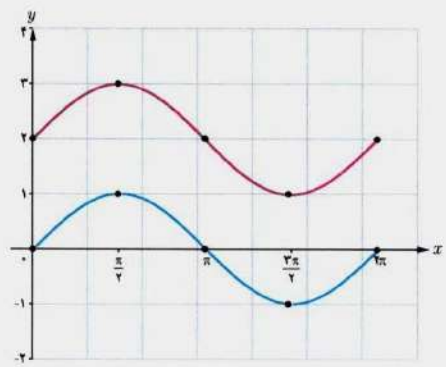




✤ **مثال :** نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنه $[\circ,2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\sin x+2$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



(ب)



(الف)

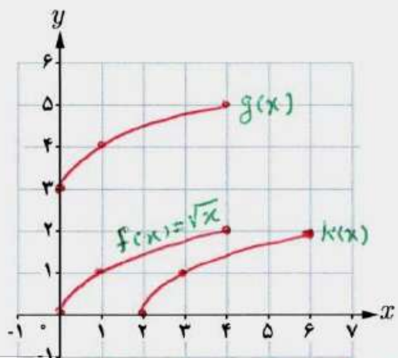
کار در کلاس

۱

الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[\circ,4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-2)$ و $g(x)=f(x)+3$ را به کمک انتقال رسم کنید.

ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.



	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-2)$	$g(x)=f(x)+3$
دامنه	$[\circ,4]$	[۲و۶]	[۰و۴]
برد	[۰و۲]	[۰و۲]	[۳و۵]

ج) بازه دامنه تابع k از انتقال بازه دامنه f در راستای افقی به اندازه ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع k همان برد تابع f می‌باشد.

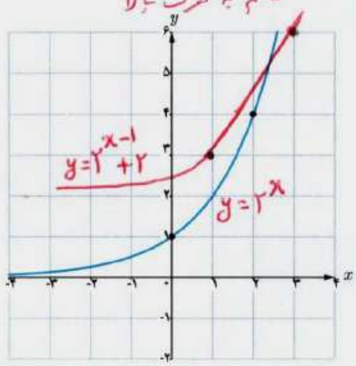
بازه دامنه g همان بازه دامنه تابع f است و بازه برد تابع g از انتقال ۳ واحد f در راستای قائم و به سمت بالا به دست می‌آید.

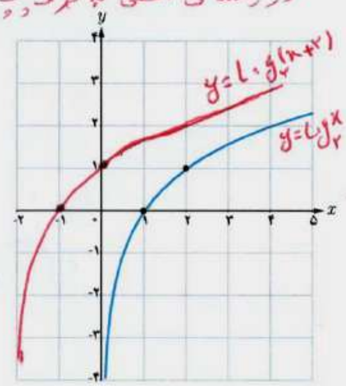
۲ در زیر، نمودار توابع $y=2^x$، $y=\log_2 x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=2^{x-1}+2$، $y=\log_2(x+2)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.

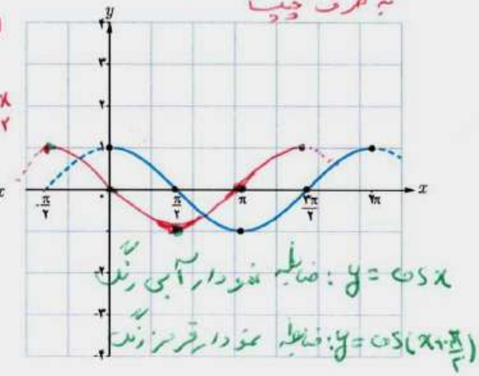
رسم: با انتقال یک واحد در راستای افقی به طرف راست و دو واحد در راستای عمودی به طرف بالا

رسم: با انتقال ۲ واحد در راستای افقی به طرف چپ

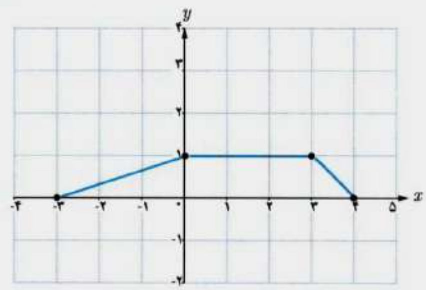
رسم: با انتقال $\frac{\pi}{2}$ در راستای افقی به طرف چپ



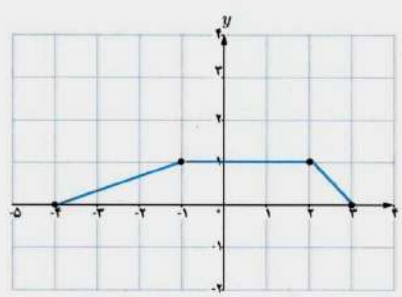




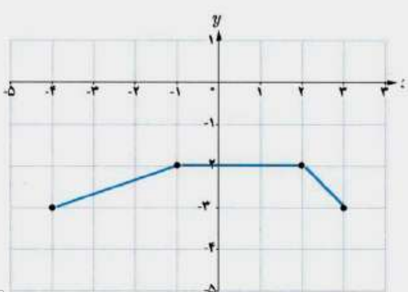
✤ **مثال:** نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ رسم شود (شکل ب).



(الف)



(ب)

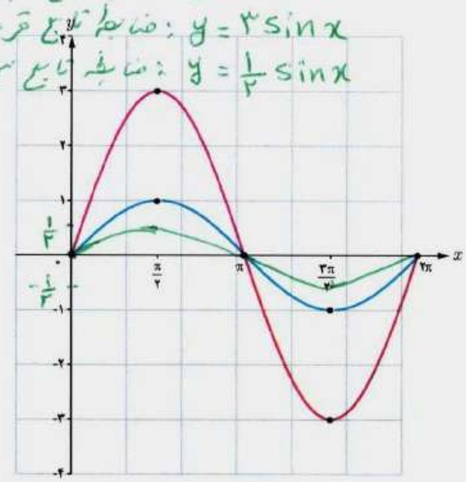
انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

$y = \sin x$: ضابطه تابع آبی رنگ
$y = ۳\sin x$: ضابطه تابع قرمز رنگ
$y = \frac{1}{۲}\sin x$: ضابطه تابع سبز رنگ

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$y=۳\sin x$	۰	۳	۰	-۳	۰
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	۰	$\frac{1}{۲}$	۰	$-\frac{1}{۲}$	۰



۲ با مقایسهٔ نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

نمودار تابع $y=۳\sin x$ نسبت به نمودار تابع $y=\sin x$ ، انبساط عمودی با ضریب انبساط ۳ داشته است.
نمودار تابع $y=\frac{1}{۲}\sin x$ نسبت به نمودار تابع $y=\sin x$ ، انقباض عمودی با ضریب انقباض $\frac{1}{۲}$ داشته است.

۳ دامنه و برد توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟

دامنه تابع $y=۳\sin x$ همان دامنه تابع $y=\sin x$ است. ولی برد تابع $y=۳\sin x$ نسبت به برد تابع $y=\sin x$ انبساط عمودی با ضریب انبساط ۳ داشته است به این صورت که برد تابع $y=\sin x$ ، $[-۱,۱]$ می‌باشد و برد تابع $y=۳\sin x$ ، $[-۳,۳]$ می‌باشد

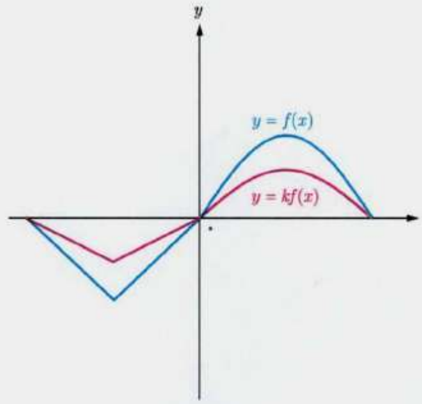
در حالت کلی اگر $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_۰) = kf(x_۰) = ky_۰$$

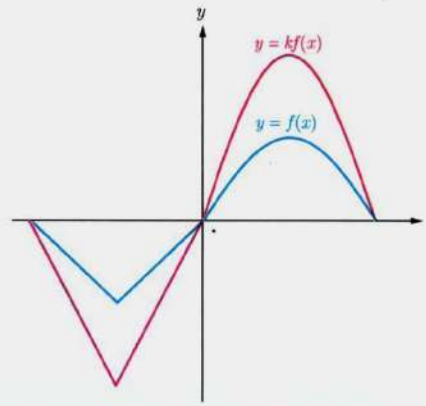
بنابراین $(x_۰, ky_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع f است.

ادامه جواب ۳ : دامنه تابع $y=\frac{1}{۲}\sin x$ همان دامنه تابع $y=\sin x$ است ولی برد تابع $y=\frac{1}{۲}\sin x$ نسبت به برد تابع $y=\sin x$ انقباض عمودی با ضریب انقباض $\frac{1}{۲}$ داشته است به این صورت که برد تابع $y=\sin x$ ، $[-۱,۱]$ می‌باشد و برد تابع $y=\frac{1}{۲}\sin x$ ، $[-\frac{1}{۲},\frac{1}{۲}]$ می‌باشد

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



$0 < k < 1$



$k > 1$

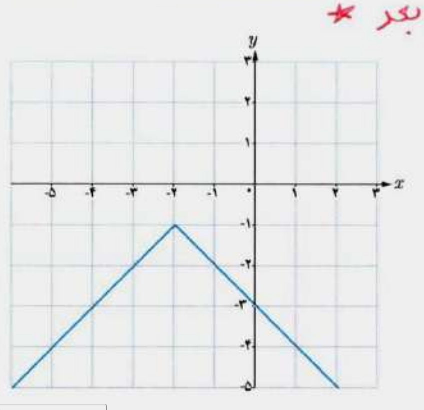
اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کار در کلاس

* حل این کاردرکلاس در صفحه بعد *

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.



۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

حل کار در کلاس صفحه ۷:

حل کار در کلاس ۱:

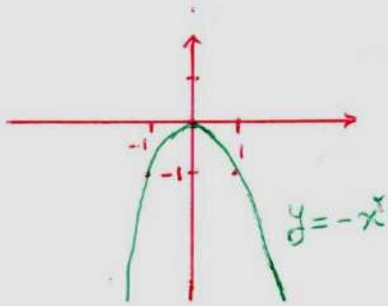
حالت $k>0$:

دامنه تابع $y=kf(x)$ (برای $k>0$) همان دامنه تابع $y=f(x)$ یعنی $[a,b]$ می باشد و برد تابع $y=kf(x)$ (برای $k>0$) برابر $[kc , kd]$ می باشد.

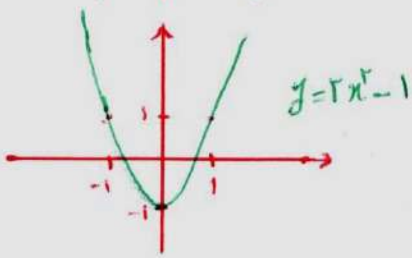
حالت $k<0$:

دامنه تابع $y=kf(x)$ (برای $k<0$) همان دامنه تابع $y=f(x)$ یعنی $[a,b]$ می باشد و برد تابع $y=kf(x)$ (برای $k<0$) برابر $[k.d , k.c]$ می باشد.

حل کار در کلاس ۲:



الف) برای رسم نمودار تابع $y=-x^2$ ، کافی است نمودار $y=x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



ب) برای رسم نمودار تابع $y=2x^2-1$ ، ابتدا نمودار تابع $y=x^2$ انبساط عمودی با ضریب انبساط ۲ خواهد داشت سپس نمودار حاصل ۱ واحد در راستای قائم به طرف پائین منتقل می شود.

پ) $y=-|x+2|-1$

توضیح قسمت پ) در نمودار تابع رسم شده، ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ دو واحد در راستای افقی به طرف چپ منتقل می شود که ضابطه آن به $y=|x+2|$ تبدیل می شود سپس نسبت به محور x ها قرینه شده است که ضابطه آن تبدیل به $y=-|x+2|$ می شود و در آخر یک واحد در راستای قائم به طرف پائین منتقل می شود که ضابطه آن را به $y=-|x+2|-1$ تبدیل می کند.

* پاسخ کار در کلاس ۳ در دستگاه های مختصات موجود در سوال داده شده است.

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.

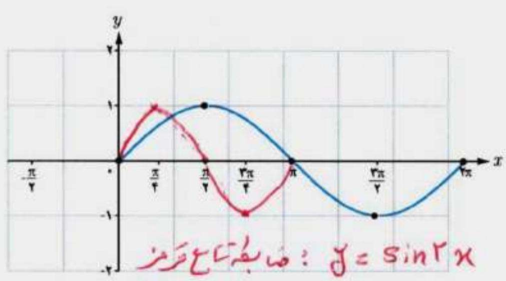
$y = f(x)$ $\qquad$ $y = f(x-۱)$ $\qquad$ $y = -f(x-۱)$ $\qquad$ $y = -f(x-۱)+۲$

انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم کنید.



ضابطه تابع قرمز : $y = \sin ۲x$

ضابطه تابع آبی : $y = \sin x$

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y = \sin ۲x$	۰	۱	۰	۱-	۰

۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

* نمودار تابع $y = \sin ۲x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ انقباض افقی با ضریب انقباض ۲ دارد

* دوره تناوب تابع $y = \sin x$ ، $T = ۲\pi$ می‌باشد و دوره تناوب تابع $y = \sin ۲x$ ، $T = \pi$ می‌باشد.

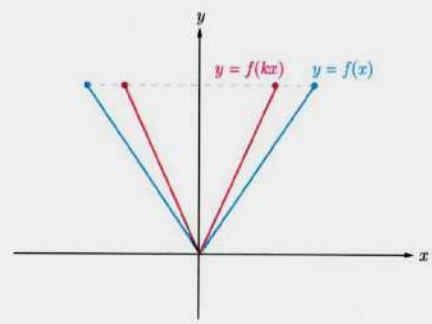
در حالت کلی اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

آنگاه :
$$g(\frac{x_\circ}{k}) = f(k\frac{x_\circ}{k}) = f(x_\circ) = y_\circ$$

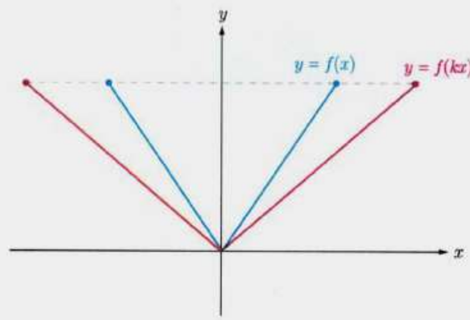
بنابراین نقطه $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودارتابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



الف) $k > 1$



ب) $0 < k < 1$

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

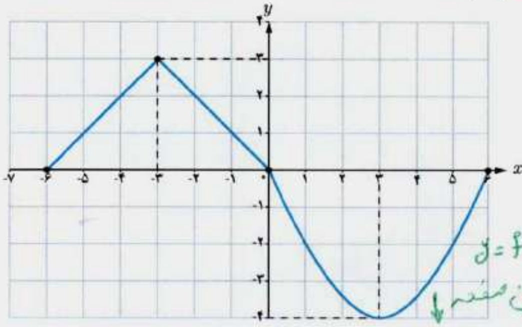
حل ۱ :

★ برای $k>0$: دامنه تابع $y=f(kx)$ (برای $k>0$) برابر $[\frac{1}{k}a, \frac{1}{k}b]$ می‌باشد و برد تابع $y=f(kx)$ (برای $k>0$) همان برد تابع $y=f(x)$ یعنی $[c,d]$ می‌باشد.

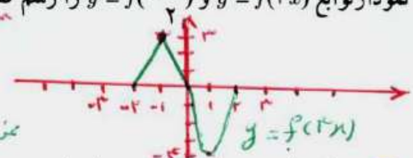
★ برای $k<0$: دامنه تابع $y=f(kx)$ (برای $k<0$) برابر $[\frac{1}{k}b, \frac{1}{k}a]$ می‌باشد و برد تابع $y=f(kx)$ (برای $k<0$) همان برد تابع $y=f(x)$ یعنی $[c,d]$ می‌باشد.

کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y=f(kx)$ را برای $k>0$ و $k<0$ تعیین کنید. حل این کار در کلاس در بالای صفحه ↑



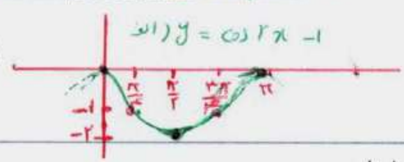
۲ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودارتوابع $y=f(3x)$ و $y=f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

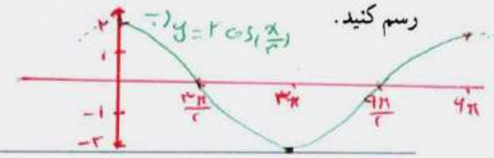


۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.

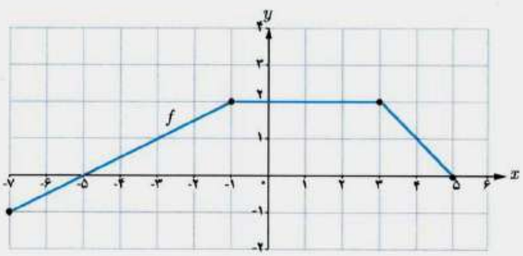
الف) $y=\cos 2x-1$

ب) $y=2\cos(\frac{x}{3})$



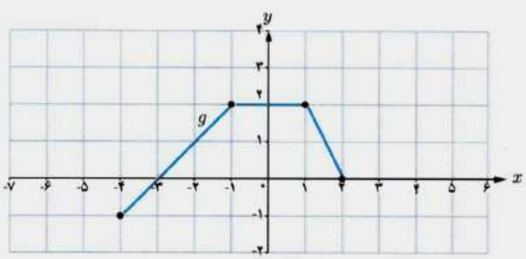


مثال : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودارتابع $g(x)=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



اگر $A=(x_0, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه $A'=\left(\frac{x_0-1}{2}, y_0\right)$ نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا[1] :

$$g\left(\frac{x_0-1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{x_0-1}{2}\right)+1\right)=f(x_0-1+1)=f(x_0)=y_0$$

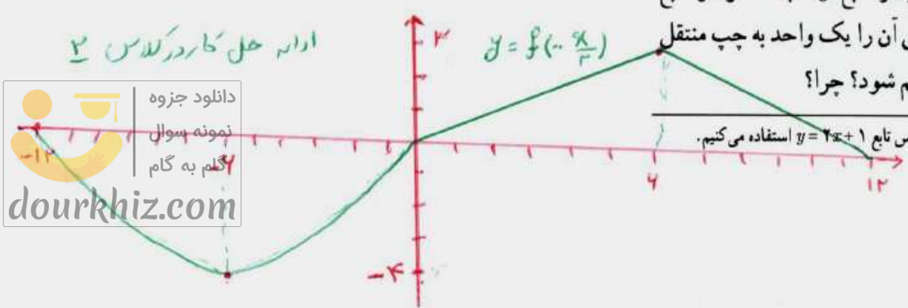


بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

با توجه به اینکه $\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}$، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x)=f(2x+1)$ رسم شود؟ چرا؟

ادامه حل کار در کلاس ۲



۱ــ برای یافتن طول نقطه A'، از معکوس تابع $y=2x+1$ استفاده می‌کنیم.

تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$ $\longrightarrow$ a

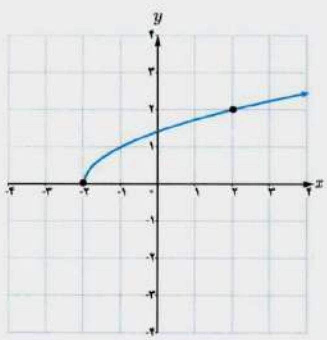
ب) $y=۲+\sqrt{x}$ $\longrightarrow$ d

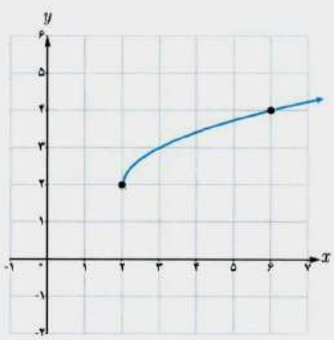
پ) $y=-۲\sqrt{x}$ $\longrightarrow$ e

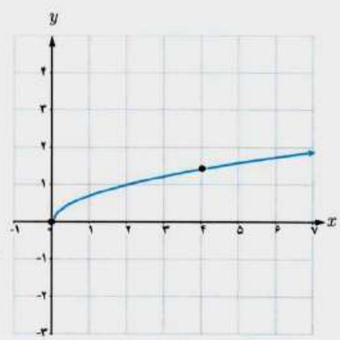
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ $\longrightarrow$ c

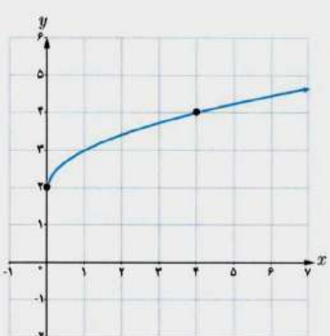
ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$ $\longrightarrow$ b

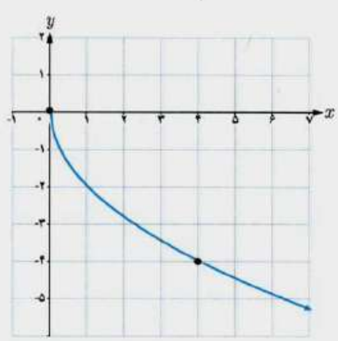
ج) $y=\sqrt{-۲x}$ $\longrightarrow$ f

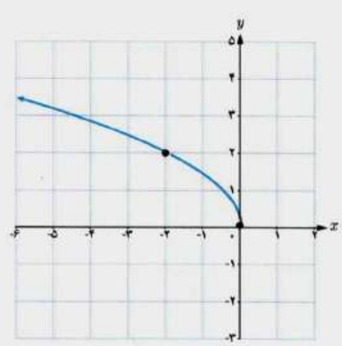

(a)


(b)

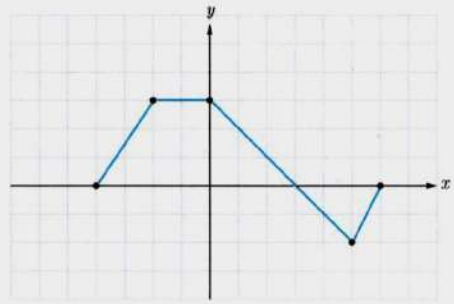

(c)


(d)


(e)


(f)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(-x)$

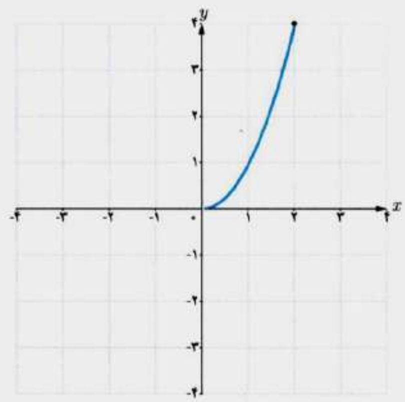
ب) $y = 2f(x-1)$

پ) $y = -f(x) + 2$

ت) $y = f(2x-1)$

ث) $y = f(3-x)$

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

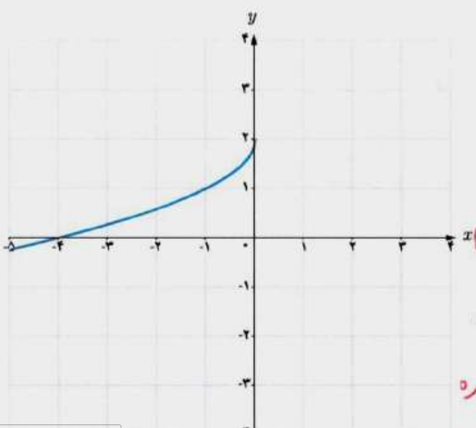


الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$

۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



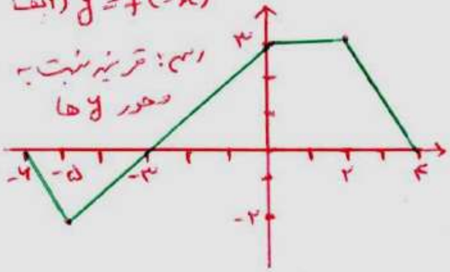
نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه شده است و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است بنابراین ضابطه این تابع به صورت زیر می‌باشد:

$y = -\sqrt{-x} + 2$

حل تمرین صفحه ۱۲

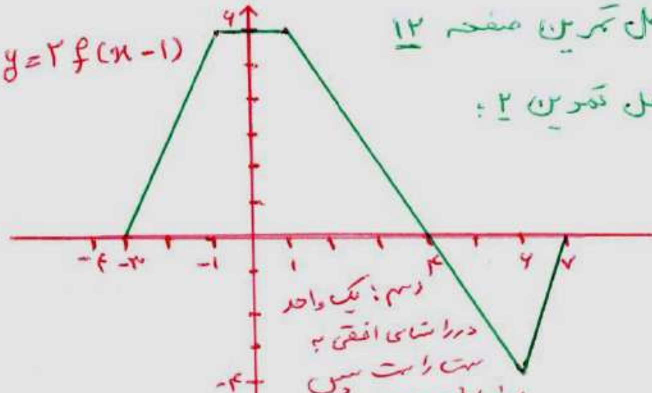
حل تمرین ۲:

الف) $y=f(-x)$



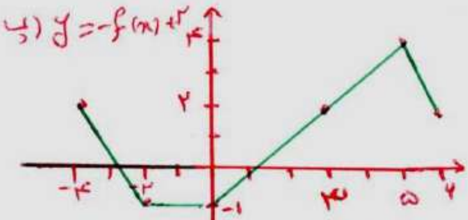
رسم: قرینه نسبت به محور y ها

ب) $y=2f(x-1)$



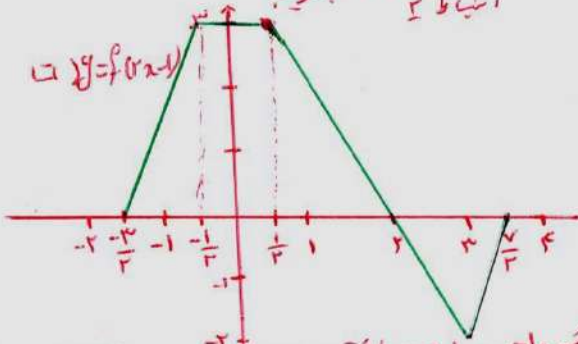
رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست سپس انبساط عمودی با ضریب انبساط ۲

پ) $y=-f(x)+2$



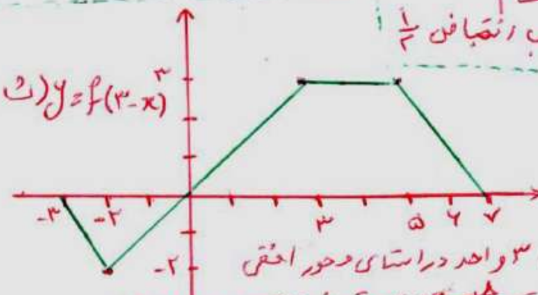
رسم: قرینه نسبت به محور x ها و سپس ۲ واحد در راستای قائم به بالا

ت) $y=f(2x-1)$



رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست و سپس انقباض افقی با ضریب انقباض $\frac{1}{2}$

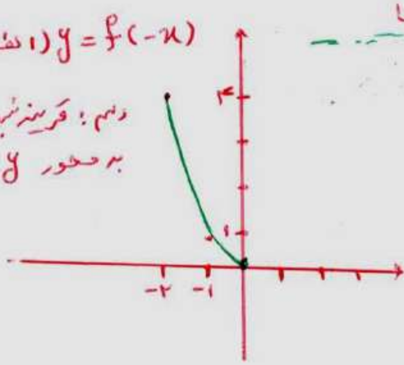
ث) $y=f(3-x)$



رسم: ۳ واحد در راستای محور افقی به سمت چپ و سپس قرینه نسبت به محور y ها

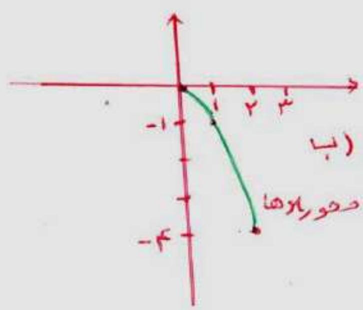
حل تمرین ۳:

الف) $y=f(-x)$



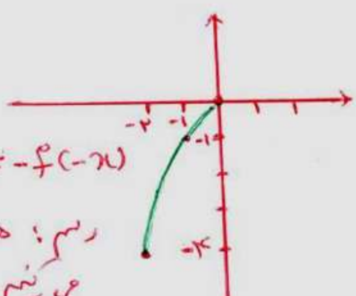
رسم: قرینه نسبت به محور y ها

ب) $y=-f(x)$



رسم: قرینه نسبت به محور x ها

پ) $y=-f(-x)$



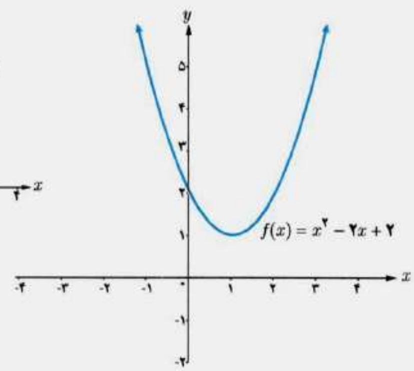
رسم: هم نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و هم نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

درس ۲
تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

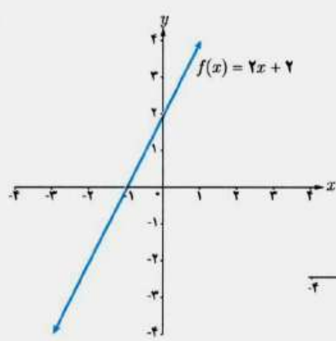
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1} و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[1]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

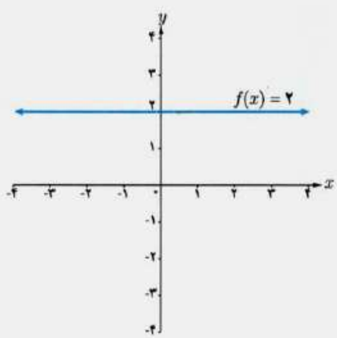
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه دو



تابع درجه یک



تابع درجه صفر

کار در کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

$f(x) = 2x - 3$ درجه ۱ ، $h(x) = x^3 + x - 4$ درجه ۳ ، $n(x) = 2x - x^4$ درجه ۴

$g(x) = (x-1)^2 + 3$ درجه ۲ ، $m(x) = 5$ درجه صفر ، $p(x) = x^2(1-x)^3$ درجه ۵

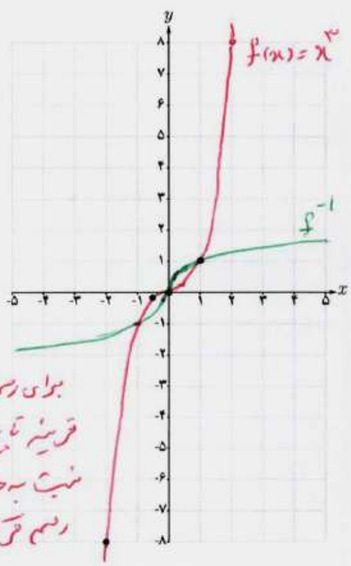
۱ــ برای $f(x)=0$، درجه تعریف نمی‌شود.

فعالیت

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

x	$y = x^3$
-2	$(-2)^3 = -8$
-1	$(-1)^3 = -1$
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
1	1
2	$2^3 = 8$



برای رسم تابع وارون قرینه تابع $y = x^3$ را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است. این تابع یک تابع یک به یک است چون هر خط موازی محور xها نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند پس وارون پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

کار در کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

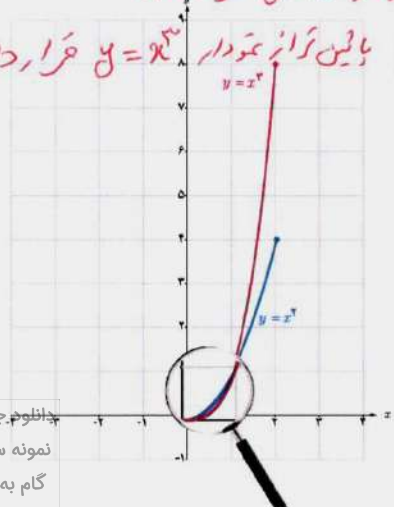
الف) $y = (x+1)^3$ ب) $y = -x^3 + 1$ پ) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

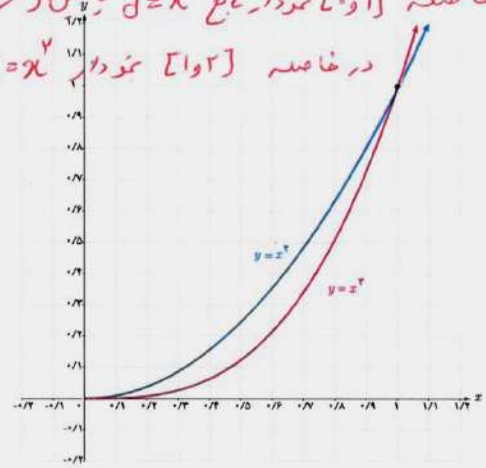
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ در فاصله $[0,2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0,1]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1,2]$ چطور؟

در فاصله $[0,1]$ نمودار تابع $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

در فاصله $[1,2]$ نمودار $y = x^2$ پایین‌تر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.



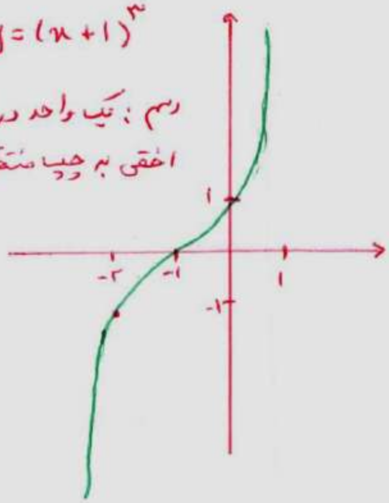


حل کار در کلاس صفحه ۴۱ :

حل ۱ :

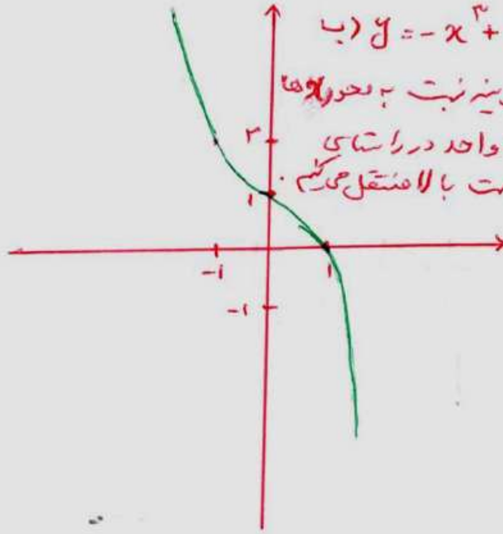
الف) $y=(x+1)^3$

رسم : یک واحد در راستای افقی به چپ منتقل می‌کنیم



ب) $y=-x^3+1$

رسم : قرینه نسبت به محور xها سپس یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنم.

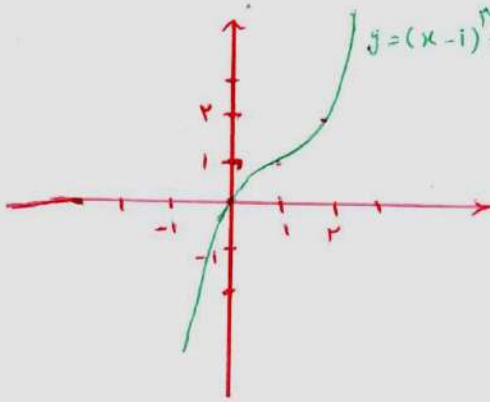


پ) $y=x^3-3x^2+3x$

ابتدا تابع سمت چپ را به صورت $y=(x+a)^3+b$ می‌نویسیم :

$$y=x^3-3x^2+3x=\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{\text{اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای}}+1=(x-1)^3+1$$

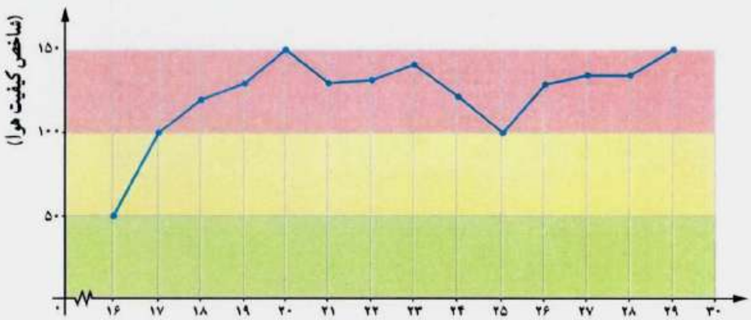
اکنون برای رسم : یک واحد در راستای افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



توابع صعودی و توابع نزولی

فعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



و [۲۸،۲۹]

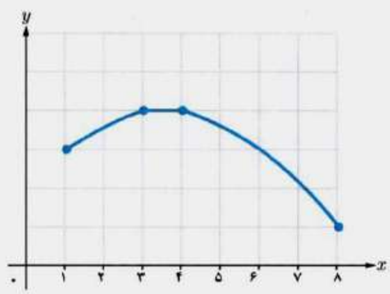
الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۱۶،۲۰] و [۲۱،۲۳] و [۲۵،۲۷]

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۲۰،۲۱] و [۲۳،۲۵]

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟ در فاصله زمانی [۲۷،۲۸]

دامنهٔ تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[1,8]$ است. در بازه $[1,3]$، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[1,3]$ صعودی می‌گوییم. در بازه $[3,4]$ مقدار تابع ثابت است.

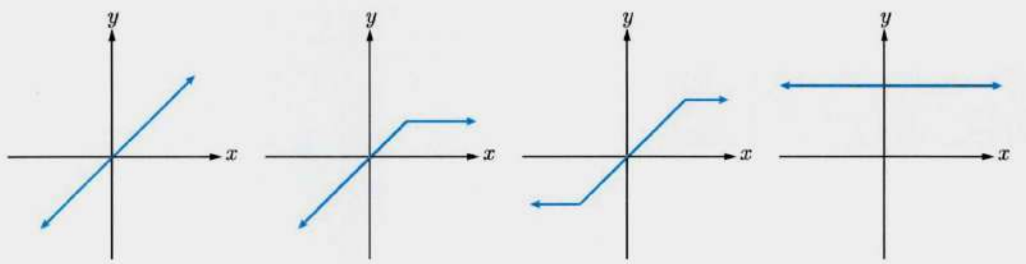
در ادامه و در بازه $[4,8]$، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع رو به پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[4,8]$ نزولی گفته می‌شود.



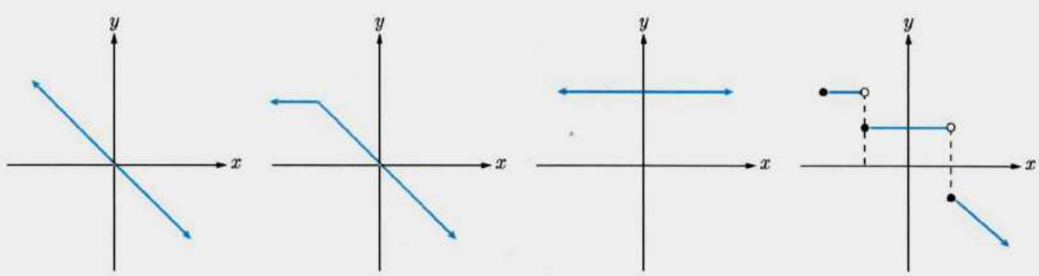
توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع f که $a < b$، داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت:

تابع f را در یک بازه، **صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \leq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



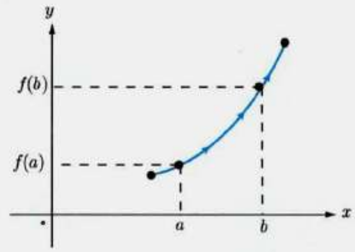
تابع f را در یک بازه، **نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \geq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.



به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

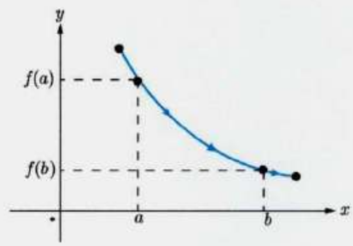
✤ تابع f را در یک بازه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک‌بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی



الف) تابع اکیداً صعودی

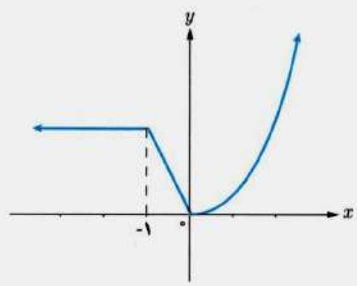
✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



ب) تابع اکیداً نزولی

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به پایین خواهیم رفت. (شکل ب)

به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.



✤ **مثال :** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1,0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

کار در کلاس

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه [۱-,∞-) اکیداً نزولی و در بازه (∞+,۱-] اکیداً صعودی است.

$$f(x) = x^2 + 2x \quad , \quad g(x) = 2^{-x} \quad , \quad h(x) = |x+2|$$

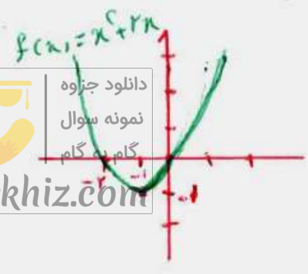
تابع g در بازه (∞+,∞-) = IR اکیداً نزولی است.

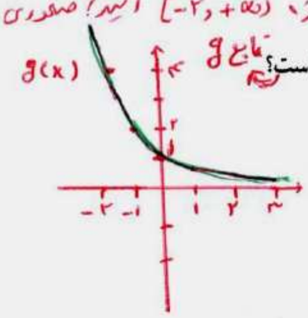
$f(x) = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$

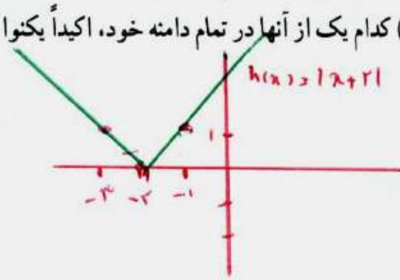
الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

تابع h در بازه [۲-,∞-) اکیداً نزولی و در بازه (∞+,۲-] اکیداً صعودی می‌باشد.

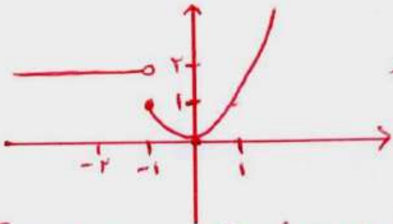
ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟ تابع g







۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge -1\\ 2 & x<-1\end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



تابع f در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $[0,+\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty,0]$ نزولی است.

جواب ۳: الف) بله، چون اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد آنگاه برای هر a و b در آن فاصله که $a<b$ آنگاه: $f(a)<f(b)$ واضح است از $f(a)<f(b)$ می‌توان نتیجه گرفت $f(a)\le f(b)$ بنابراین تابع f صعودی است.

۳

الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید. خیر:

مثال نقض: $f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\ge 1\\ 1 & x<1\end{cases}$

طبق نمودار تابع f یک تابع صعودی روی دامنه خودش می‌باشد ولی اکیداً صعودی نیست.

۴

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\le b$.

ب) اگر $\log(x+1)\le\log(2x-3)$، حدود x را به‌دست آورید. (حل قسمت (ب) پایین صفحه)

الف) اثبات (برهان خلف): فرض $a\not\le b$ بنابراین $b<a$ و چون f روی فاصله مذکور اکیداً صعودی است پس طبق تعریف تابع اکیداً صعودی می‌توان نوشت: $f(b)<f(a)$ که این خلاف فرض صورت سؤال یعنی $f(a)\le f(b)$ می‌باشد بنابراین فرض برهان خلف باطل است و $a\le b$

تقسیم و بخش‌پذیری

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x)=x^3-3x^2+1$ و $p(x)=x^2-2$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x)=x-3$ و $r(x)=2x-5$.

ب) درستی تساوی $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ را بررسی کنید.

الف)

$$\begin{array}{l|l} \underbrace{x^3-3x^2+1}_{f(x)} & \underbrace{x^2-2}_{p(x)} \\ \cline{2-2} -x^3+2x & \underbrace{x-3}_{q(x)} \\ \hline -3x^2+2x+1 & \\ +3x^2-6 & \\ \hline \underbrace{2x-5}_{r(x)} & \end{array}$$

$q(x)=x-3$

$r(x)=2x-5$

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن $r(x)=0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

حل قسمت (ب) فعالیت: از طرف راست به طرف چپ می‌رسیم:

$p(x)\cdot q(x)+r(x)=(x^2-2)(x-3)+2x-5=x^3-3x^2+1=f(x)$

اگر $r(x)=0$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است.

حل قسمت (ب) کار در کلاس بالا: می‌دانیم تابع لگاریتم با پایه ۱۰ یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد بنابراین به کمک قسمت الف می‌توان نوشت:

$\log(x+1)\le\log(2x-3)\xrightarrow{\text{قسمت الف}} x+1\le 2x-3\Rightarrow -x\le -4\Rightarrow x\ge 4\rightarrow$ مجموعه جواب: $[4,+\infty)$

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^4 - 16$ و $p(x) = x+2$، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

$$f(x) = x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = \underbrace{(x^2+4)(x-2)}_{q(x)}\underbrace{(x+2)}_{p(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$$

چون $r(x)=0$ بنابراین x^4-16 بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^3+2$ بر $p(x) = 2x-1$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است. می دانیم در تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر چند جمله ای $p(x)$ درجه باقیمانده یعنی $r(x)$ از درجه مقسوم علیه $p(x)$ کمتر است و چون درجه $p(x)$ یک می باشد پس درجه $r(x)$ صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می‌توان نوشت:

$$f(x) = (2x-1)\ q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = 2x-1$ را به‌دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به‌طور کلی می‌توان گفت:

$p(x)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = (2(\frac{1}{2})-1)\cdot q(x) + r(x) = 0\times q(x) + r(x) = r(x)$

$\Rightarrow r(x) = f(\frac{1}{2})$

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

کار در کلاس

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+x-2 را بر $2x+1$ به‌دست آورید.

$r(x) = f(-\frac{b}{a}) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-21}{8}$

۲ اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

چون $f(x) = x^2+ax-2$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است بنابراین:

$r(x)=0 \Rightarrow f(a)=0 \Rightarrow a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2-2=0$

$2a^2=2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

$x^4-a^4 \mid x-a$

$x^3+ax^2+a^2x+a^3$

$-x^4 \pm ax^3$

ax^3-a^4

$-ax^3 \pm a^2x^2$

$a^2x^2-a^4$

$-a^2x^2 \pm a^3x$

a^3x-a^4

$-a^3x \mp a^4$

0

حل سوال ۱ فعالیت:

$\xrightarrow[\text{نتیجه می‌گیریم}]{\text{از تقسیم انجام شده}} x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ و $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

۱ از تقسیم x^4-a^4 بر $x-a$ نشان دهید که:

$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$

۲ آیا x^n-a^n ($n\in\mathbb{N}$) بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟ بله چون: اگر $f(x)=x^n-a^n$ باشد داریم: $r(x)=f(a)$

بنابراین: $r(x)=a^n-a^n=0$

جواب فعالیت ۳

۳ از تقسیم x^n-a^n بر $x-a$ نشان دهید که x^n-a^n به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$x^n-a^n \mid x-a$

$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-2}x+a^{n-1}$

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$-x^n \pm ax^{n-1}$

$ax^{n-1}-a^n$

$-ax^{n-1} \pm a^2x^{n-2}$

$a^2x^{n-2}-a^n$

$-a^2x^{n-2} \pm a^3x^{n-3}$

$a^3x^{n-3}-a^n$

$\vdots$

$a^{n-2}x^2-a^n$

$-a^{n-2}x^2 \pm a^{n-1}x$

$a^{n-1}x-a^n$

$-a^{n-1}x \pm a^n$

0

۴ چند جمله‌ای‌های x^5-1 و x^6-64 را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

$\xrightarrow[\text{نتیجه می‌گیریم}]{\text{از تقسیم}} x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

جواب فعالیت ۴

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^6-64=x^6-2^6=(x-2)(x^5+2x^4+2^2x^3+2^3x^2+2^4x+2^5)$

$=(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$

کار در کلاس

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots-a^{n-2}x+a^{n-1})$

اگر n فرد باشد در فعالیت بالا با تبدیل a به $-a$ داریم:

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای x^5+1 را تجزیه کنید.

$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+\dots+(-a)^{n-2}x+a^{n-1})$

$\xRightarrow{n \text{ فرد است}} x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots-a^{n-2}x+a^{n-1})$

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots+a^{n-2}x-a^{n-1})$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای x^4-16 را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

در فعالیت بالا اگر n زوج باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

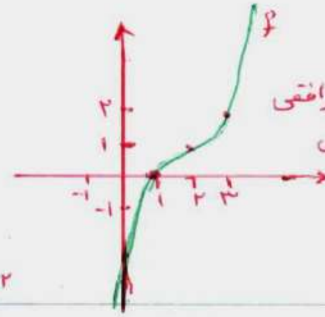
$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-1}+(-a)x^{n-2}+(-a)^2x^{n-3}+\dots+(-a)^{n-2}x+a^{n-1})$

$\xRightarrow{n \text{ زوج}} x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots+a^{n-2}x-a^{n-1})$

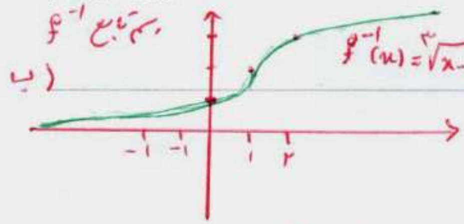
بنابراین: $x^4-16=x^4-2^4=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$

الف) حل تمرین ۱

رسم: دو واحد در راستای محور افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا



ب) رسم تابع f^{-1}



تمرین

۱ تابع $f(x)=(x-2)^3+1$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنید. بالا

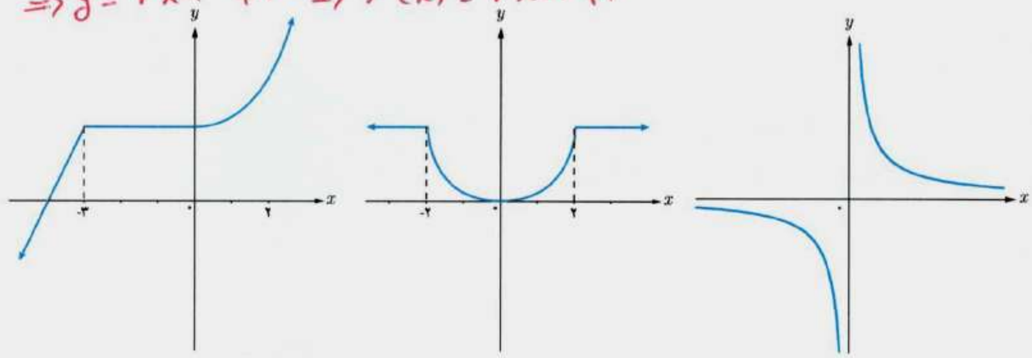
ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. تابع f یک تابع یک به یک است چون هر خط موازی محور xها (نمودار) آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

پ) ضابطه f^{-1} را به‌دست آورید.

پ) $y=(x-2)^3+1 \Rightarrow (x-2)^3=y-1 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+2$

$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$

۲ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y=f(x)$ $y=g(x)$ $y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟ تابع f در بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ صعودی است.

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟ تابع g در $[-2,0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[2,+\infty)$ و $(-\infty,0]$ نزولی است.

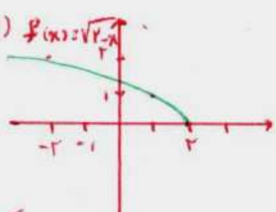
پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟ تابع h در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

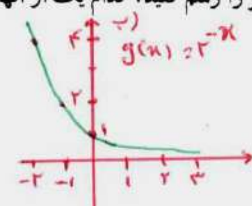
الف) $f(x)=\sqrt{2-x}$

ب) $g(x)=2^{-x}$

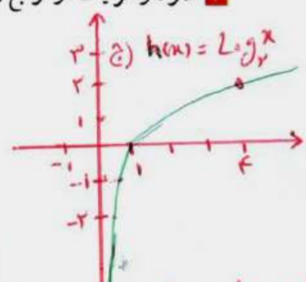
ج) $h(x)=\log_2 x$



تابع f در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع f در دامنه خود اکیداً یکنوا است.

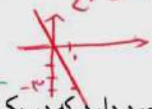


تابع g در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع g در دامنه خود اکیداً یکنوا است.



تابع h در دامنه خود اکیداً صعودی است بنابراین تابع h در دامنه خود اکیداً یکنوا است.

حل قسمت دوم سوال ۵: خیر: اگر f و g روی یک فاصله اکیداً صعودی باشند ; ادامه حل ۵
نمی‌توان گفت همواره $f-g$ نیز اکیداً روی آن فاصله صعودی است.
مثال نقض: توابع $f(x)=2x+4$ و $g(x)=5x+4$ روی دامنه خود اکیداً صعودی هستند ولی:
$(f-g)(x)=2x+4-(5x+4)=-3x$ که یک تابع اکیداً نزولی می‌باشد
رسم



۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟ بله. مثال تابع ثابت $f(x)=2$ در فاصله $[-2,3]$
هم صعودی است و هم نزولی

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟ حل قسمت دوم در بالا

حل قسمت اول سوال:
تابع f روی فاصله I اکیداً صعودی است $\Rightarrow \forall a,b\in I,\ a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$
تابع g روی فاصله I اکیداً صعودی است $\Rightarrow \forall a,b\in I,\ a<b \Rightarrow g(a)<g(b)$
$\xrightarrow{\text{جمع}} f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$
$\Rightarrow \forall a,b\in I,\ a<b \Rightarrow (f+g)(a)<(f+g)(b)$
بنابراین $f+g$ نیز اکیداً صعودی است (البته روی فاصله I)

$f(x)=x^3+kx^2+2$

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

$r(x)=6 \Rightarrow r(x)=f(2)=6 \Rightarrow 2^3+k(2)^2+2=6 \Rightarrow 4k=6-10=-4$
$\Rightarrow k=\frac{-4}{4} \Rightarrow \boxed{k=-1}$

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

اگر $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد:
f بر $x-2$ بخش‌پذیر است $\Rightarrow r(x)=f(2)=0 \Rightarrow 2^3+a(2)^2+b(2)+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9$
f بر $x+1$ بخش‌پذیر است $\Rightarrow r(x)=f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0 \Rightarrow a-b=0$
$\Rightarrow \begin{cases}4a+2b=-9\\ 2a-2b=0\end{cases}$ ، $6a=-9$
$\Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}$ ، $a-b=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}-b=0 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{3}{2}}$

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $x-1$
ب) x^6-1 با عامل $x+1$
پ) x^5+32 با عامل $x+2$

الف) $x^6-1=x^6-1^6=(x-1)(x^5+1\times x^4+1^2x^3+1^3x^2+1^4x+1^5)$
$=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
ب) $x^6-1=x^6-1^6=(x+1)(x^5-1\times x^4+1^2x^3-1^3x^2+1^4x-1^5)$
$=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$
پ) $x^5+32=(x^5+2^5)=(x+2)(x^4-2x^3+2^2x^2-2^3x+2^4)$
$=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$.

ب) اگر $(\frac{1}{2})^{3x-2}\le\frac{1}{64}$، حدود x را به‌دست آورید.

حل قسمت الف سوال: اثبات (برهان خلف): فرض $a\ngeq b$ بنابراین $a<b$ می‌باشد از طرفی چون f روی فاصله مذکور اکیداً نزولی است بنابراین برای دو عضو a و b از فاصله $a<b$ نتیجه می‌شود $f(a)>f(b)$ و این خلاف فرض $f(a)\le f(b)$ موجود در صورت سوال می‌باشد. از این تناقض فرض برهان خلف باطل است و $a\ge b$ می‌باشد.

حل قسمت ب سوال ۹: می‌دانیم در تابع نمایی $f(x)=a^x$ ، اگر $0<a<1$ تابع نمایی اکیداً نزولی است بنابراین طبق قسمت الف همین تمرین داریم:
$(\frac{1}{2})^{3x-2}\le\frac{1}{64} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{3x-2}\le(\frac{1}{2})^6 \xrightarrow{\text{تناقض}} 3x-2\ge 6 \Rightarrow x\ge\frac{8}{3} \Rightarrow$ مجموعه جواب $=[\frac{8}{3},+\infty)$

مثلثات

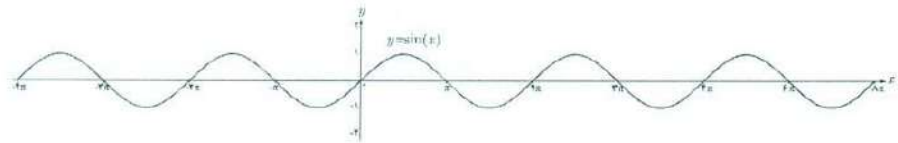
۲
فصل

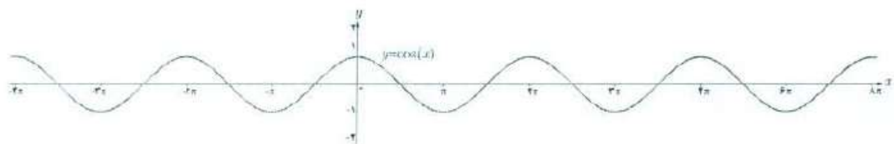
انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس ۱

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است ($\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.





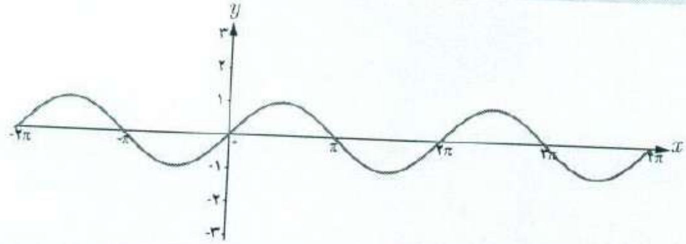
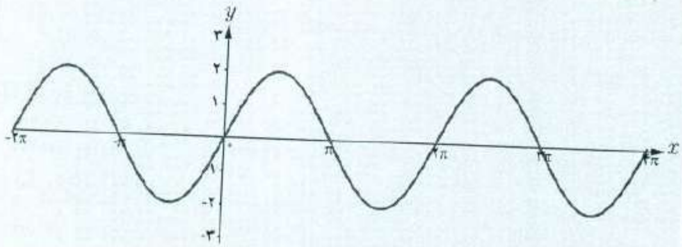
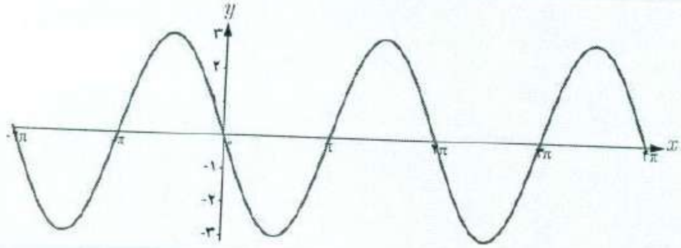
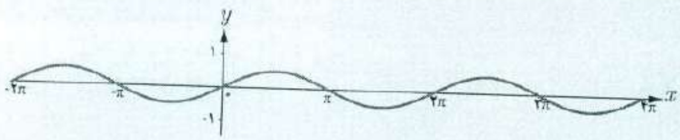
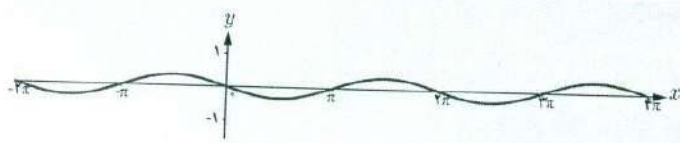
با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف :

تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ ($f(x) = \cos x$) برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	۱-	۲π
$y=2\sin x$		۲ ...	۲- ...	۲π ...
$y=-3\sin x$		۳	۳-	۲π
$y=\frac{1}{2}\sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۲π
$y=-\frac{1}{3}\sin x$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۲π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

اگر $a>0$ دوره تناوب ۲π و ماکزیمم a و مینیمم $-a$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است. با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$-1\leq \sin x\leq 1$

$-a\leq a\sin x\leq a$

$-a+c\leq a\sin x+c\leq a+c$

$-a+c\leq y\leq a+c$

$-1\leq \cos x\leq 1$

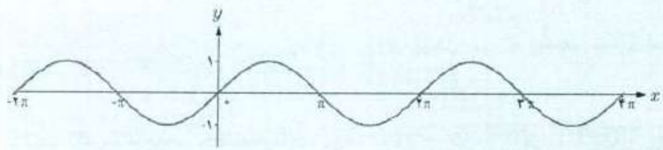
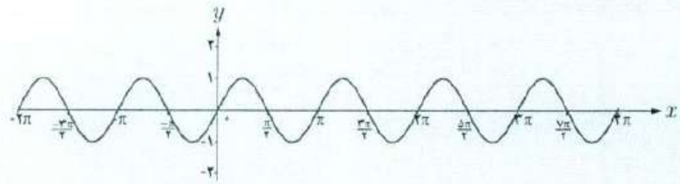
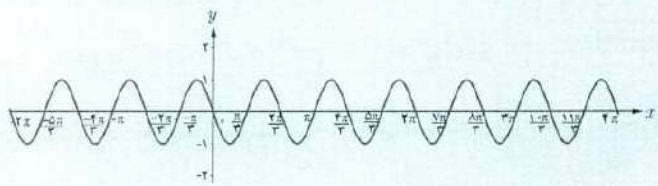
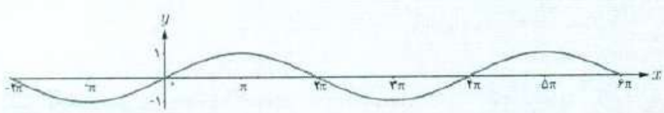
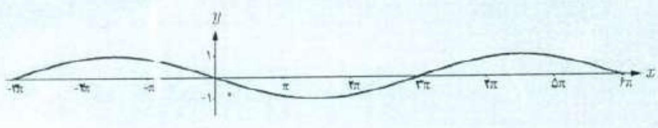
$-a\leq a\cos x\leq a$

$-a+c\leq a\cos x+c\leq a+c$

$-a+c\leq y\leq a+c$

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	-۱	۱		$y=\sin x$
π	-۱	۱		$y=\sin ۲x$
$\frac{۲\pi}{۳}$	-۱	۱		$y=\sin(-۳x)$
۴π	-۱	۱		$y=\sin\frac{x}{۲}$
۶π	-۱	۱		$y=\sin(-\frac{x}{۳})$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

$T=\frac{2\pi}{|b|}$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.

$-1\leqslant \sin bx \leqslant 1$

$-1+c \leqslant \sin bx+c \leqslant 1+c$

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

> توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

✤ **مثال :** دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y=3\sin(2x)-2$ ب) $y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)$

پ) $y=\pi\sin(-x)+1$ ت) $y=8\cos(\frac{x}{3})$

✤ **حل :**

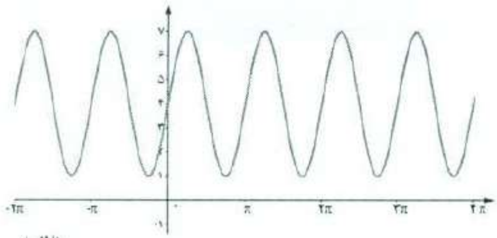
الف) $\max=|3|-2=1$ $\min=-|3|-2=-5$ $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

ب) $\max=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ $\min=-\left|-\frac{1}{4}\right|=-\frac{1}{4}$ $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

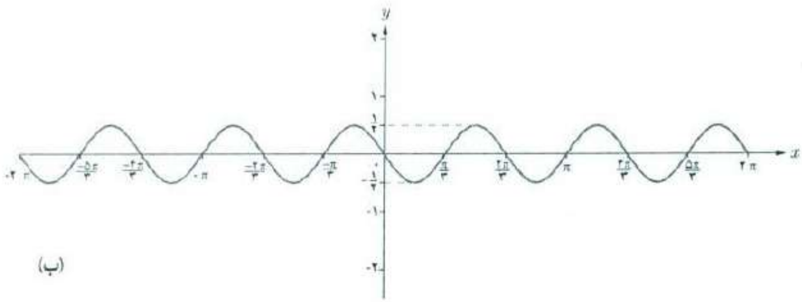
پ) $\max=|\pi|+1=\pi+1$ $\min=-|\pi|+1=1-\pi$ $T=\frac{2\pi}{|-1|}=2\pi$

ت) $\max=|8|=8$ $\min=-|8|=-8$ $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=6\pi$

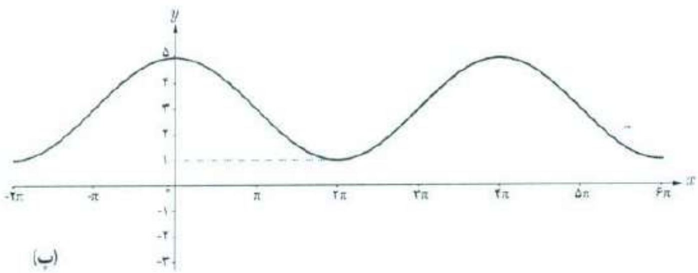
مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.



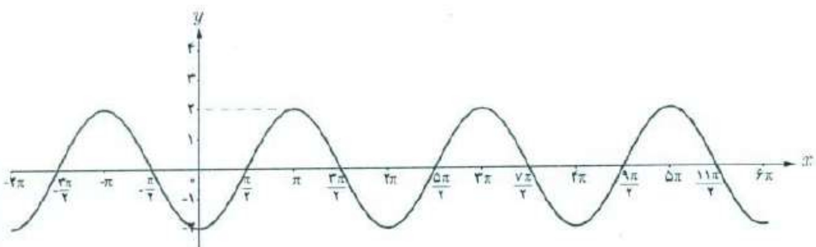
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

حل :

الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $c + |a|$ و $c - |a|$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y = ۳\sin(۲x)+۴$

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = ۰$ و $|a| = \frac{۱}{۲}$ و $|b| = ۳$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم : $y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

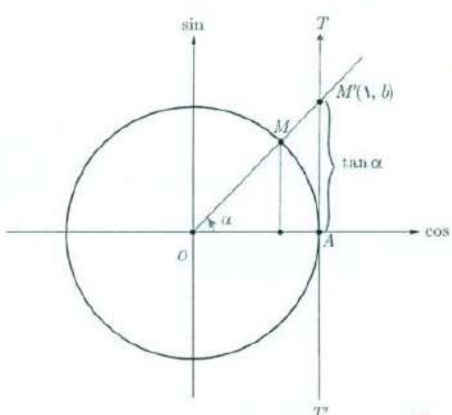
پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر ۴π است. بنابراین $c = ۳$ و $|b| = \frac{۱}{۲}$ و $|a| = ۲$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است.
لذا $a = ۲$ و $b = -\frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم $y = ۲\cos(-\frac{x}{۲}) + ۳$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم : $y = -۲\cos x$

تابع تانژانت

فعالیت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود.
بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

چون تانژانت زاویه هایی که در ربع اول و سوم هستند جهت بالای محور تانژانت یا سمت مثبت محور تانژانت را قطع می کنند ولی تانژانت زوایایی که در ربع دوم یا چهارم قرار دارند امتداد OM جهت منفی محور تانژانت ها را قطع می کند

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ خیر $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ خیر به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

چون برای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ خط OM موازی محور تانژانت ها می شود و آن را قطع نمی کند که بتوان نقطه مشخصی از اعداد حقیقی را به عنوان تانژانت آن ها در نظر گرفت

تغییرات تانژانت

فعالیت

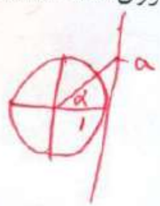
با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟ بی نهایت

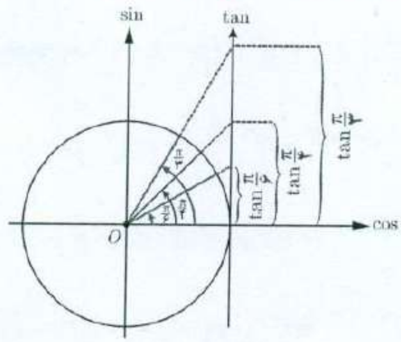
(توضیح در دستگاه اعداد حقیقی یا در ساختار اعداد حقیقی بی نهایت تعریف نشده است)

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

به اندازه a روی محور تانژانت ها جدا می کنیم و به مرکز O وصل می کنیم



$\tan\alpha = \frac{a}{1} = a$



کار در کلاس

افزایشی $-\infty$ تا $+\infty$

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

$-\infty$ تا ۰ افزایشی

۰ تا $+\infty$ افزایشی

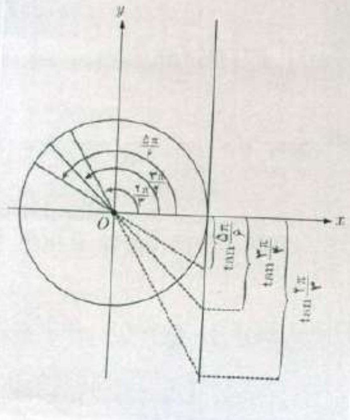
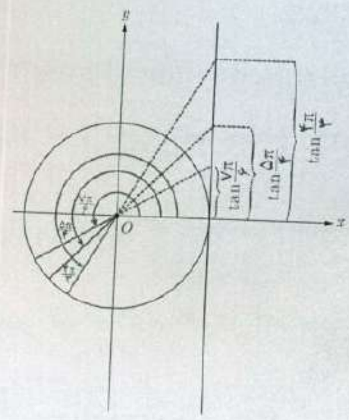
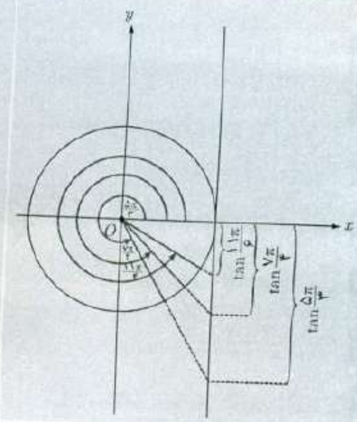
ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

در ربع اول تغییرات تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایشی

در ربع دوم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایشی

در ربع سوم تغییرات تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایشی

در ربع چهارم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایشی

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↙ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول				ربع دوم					ربع سوم				ربع چهارم			
۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
۰ ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$ ↗	$+\infty$	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$	$+\infty$ ↗	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	۰

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} , k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$\tan(\pi + x) = \tan x$

کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[0 , 2\pi]$ بررسی کنید.

دربازه $[0 , \frac{\pi}{2})$ صعودی

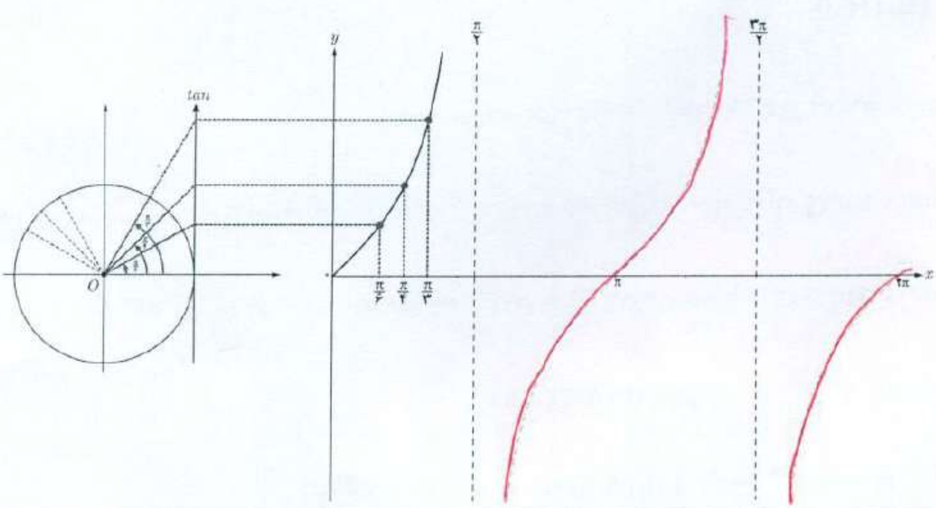
دربازه $(\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2})$ صعودی

دربازه $(\frac{3\pi}{2} , 2\pi]$ صعودی

رسم تابع $y = \tan\alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ـ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$ — $T = \frac{2\pi}{7}$ ماکزیمم: ۳ مینیمم: ۱-

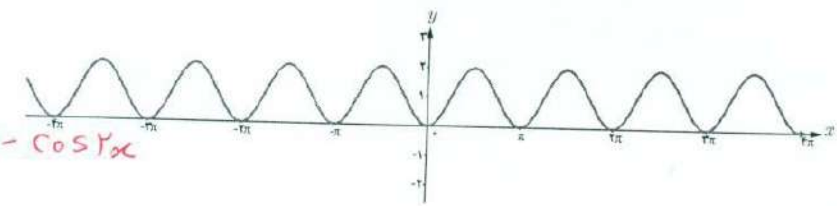
ب) $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$ — $T = 4$ ماکزیمم: $\sqrt{3}+1$ مینیمم: $\sqrt{3}-1$

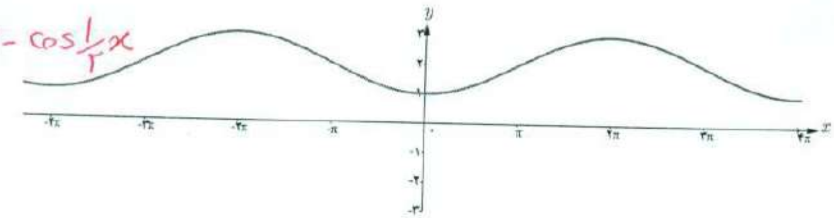
پ) $y = -\pi\sin\frac{1}{2}(x-2)$ — $T = 4\pi$ ماکزیمم: π مینیمم: $-\pi$

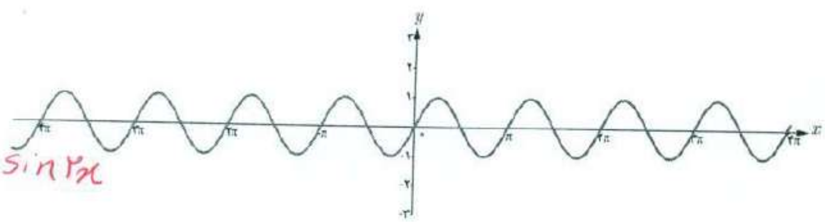
ت) $y = -\frac{3}{4}\cos 3x$ — $T = \frac{2\pi}{3}$ ماکزیمم: $\frac{3}{4}$ مینیمم: $-\frac{3}{4}$

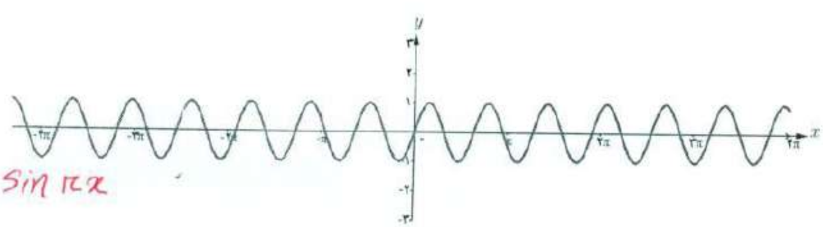
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = 2 - \cos\frac{1}{2}x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$

۱)

$y = 1 - \cos 2x$

۲)
$y = 2 - \cos\frac{1}{2}x$


۳)

$y = \sin 2x$

۴)

$y = \sin \pi x$

۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi$, $\max = ۳$, $\min = -۳$ $y=3\sin 2x$

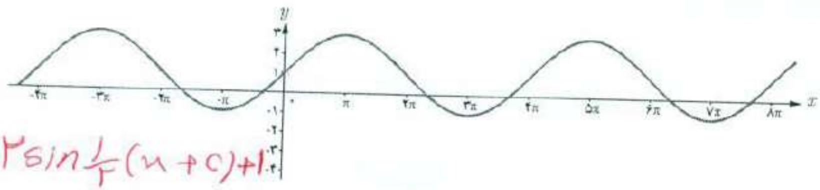
ب) $T=۳$, $\max = ۹$, $\min = ۳$ $y=-4\sin\frac{2\pi}{3}x+3$

پ) $T=۴\pi$, $\max = -۱$, $\min = -۷$ $y=-3\sin\frac{1}{2}x-4$

ت) $T=\frac{\pi}{۲}$, $\max = ۱$, $\min = -۱$ $y=\cos 4x$

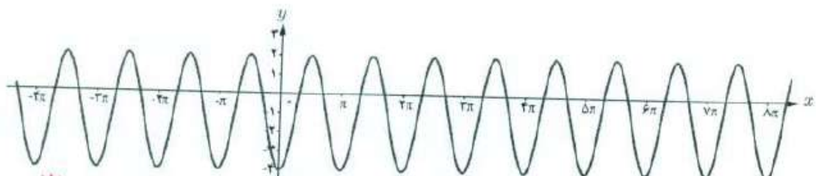
۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



$y=3\sin\frac{1}{4}(x+c)+1$

ب)



$y=-3\cos 2x-1$

۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. درست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	$+\infty$

$\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ در ربع اول هر دو صعودی هستند

ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	$-\infty$ ↗	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	0

$\tan\alpha$ و $\sin\alpha$ در ربع چهارم نیز هر دو صعودی هستند

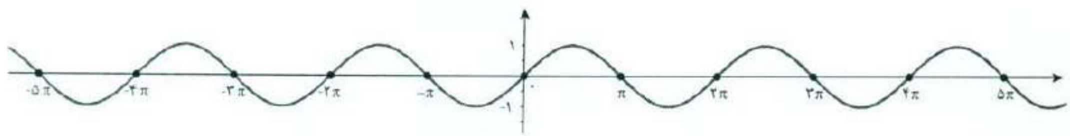
درس ۲

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

✤ **مثال :** تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.

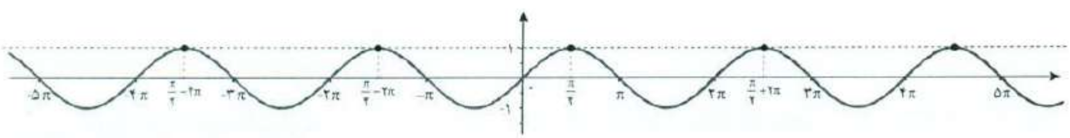


همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x=\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.

این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x=\cdots, \frac{\pi}{2}-4\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

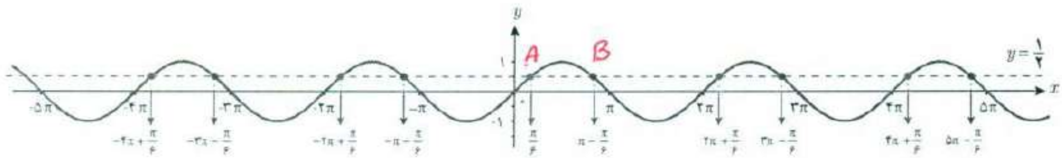
اکنون معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید. $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$

۲ خط $y=\frac{1}{2}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله

A , B



تمامی پاسخ های بدست شده به ازای آن ها ساده برقرار می باشد

۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y=\frac{1}{2}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ بله

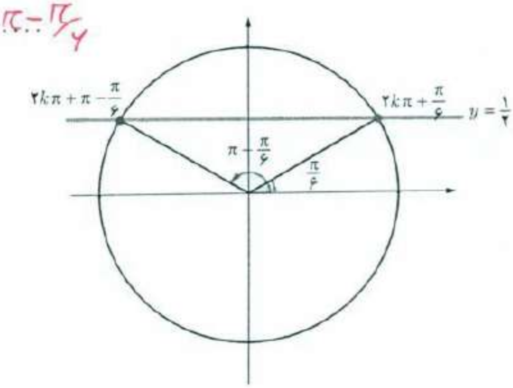
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin(-\frac{7\pi}{6})=\frac{1}{2}$

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y=\frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi-\frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi-\frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $-4\pi+\frac{\pi}{6}$ ... $-2\pi+\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $2\pi+\frac{\pi}{6}$, $4\pi+\frac{\pi}{6}$

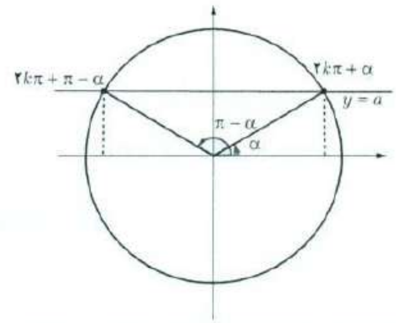
هم انتها با $\pi-\frac{\pi}{6}$: $-3\pi-\frac{\pi}{6}$ ... $-\pi-\frac{\pi}{6}$, $\pi-\frac{\pi}{6}$, $3\pi-\frac{\pi}{6}$, $5\pi-\frac{\pi}{6}$



برای عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ که $\sin x=a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=(۲k+۱)\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال: معادلهٔ $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

$$\sin x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

$۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

$\sin x=\frac{\sqrt{۸}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin x=\sin\frac{\pi}{۴}$

$\begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & k\in Z \\ x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} & k\in Z \end{cases}$

$۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

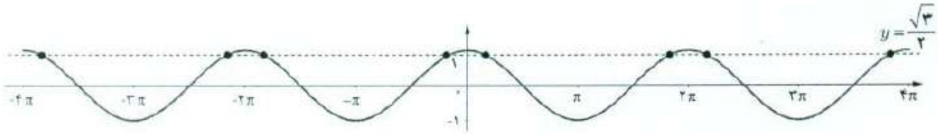
$\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

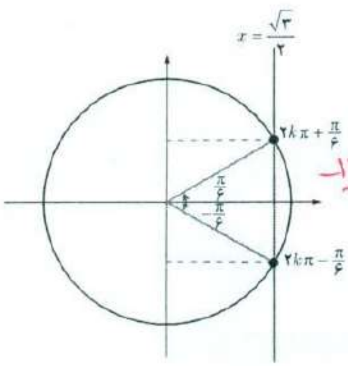
$\sin x=\sin ۶۰^\circ$

$\begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} & k\in Z \\ x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} & k\in Z \end{cases}$

فعالیت

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.





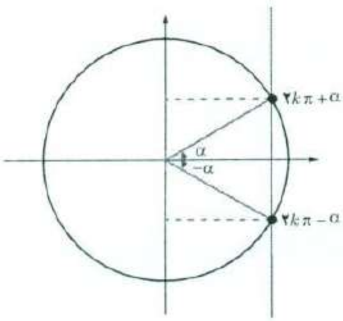
الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید. $\frac{\pi}{۶}$ و $-\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $-\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $\frac{۲۳\pi}{۶}$ و $-\frac{۲۳\pi}{۶}$ ، $\frac{۱۳\pi}{۶}$ و $-\frac{۱۳\pi}{۶}$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید. $\frac{\pi}{۶}$ و

$۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶}$

$۲\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۶}$

برای هر عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=۲k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

✤ مثال: جواب‌های معادله $\cos x=\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-۲\pi-\frac{\pi}{۳},-۲\pi+\frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

✤ مثال: معادله $\sin ۲x=\sin ۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+۳x\Rightarrow x=۲k\pi & ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=(۲k+۱)\pi-۳x\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۵} & ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

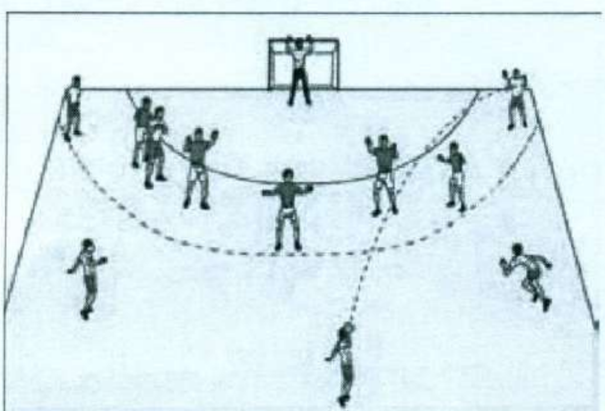
✤ مثال: معادله $۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$$
$$۲\sin ۳x=\sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \sin ۳x=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲} & ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۳x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)}{۳}\pi-\frac{\pi}{۱۲} & ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

✤ مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{v^۲\sin ۲\theta}{۱۰}$$



از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & ,k\in\mathbb{Z} \\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta=\frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

✤ **مثال :** جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x=۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶} & ,k\in\mathbb{Z} \\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} & ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

✤ **مثال :** معادله $\cos x\,(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^۲-۹t-۵=۰$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=۵$ و $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ k=\mathbb{Z}$$

✤ **مثال :** معادله $\sin x+\cos x=۱$ را در بازه $۰\le x\le ۲\pi$ حل کنید.

$\sin x+\cos x=۱$

$\sin x=۱-\cos x$

$\sin^۲ x=(۱-\cos x)^۲$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$\sin^۲ x=۱-۲\cos x+\cos^۲ x$ استفاده از رابطه $\sin^۲=۱-\cos^۲ x$

$1-\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x-2\cos x=0$

$2\cos x(\cos x-1)=0 \Rightarrow 2\cos x=0$ یا $\cos x-1=0$

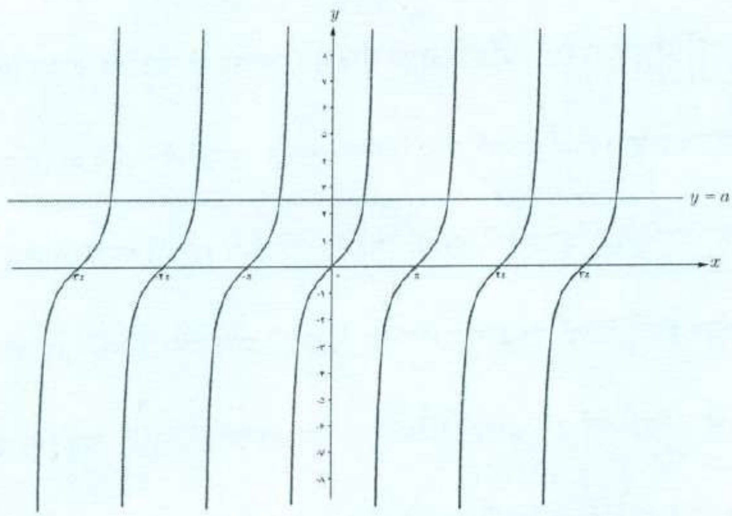
اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $0\le x\le 2\pi$ می‌یابیم :

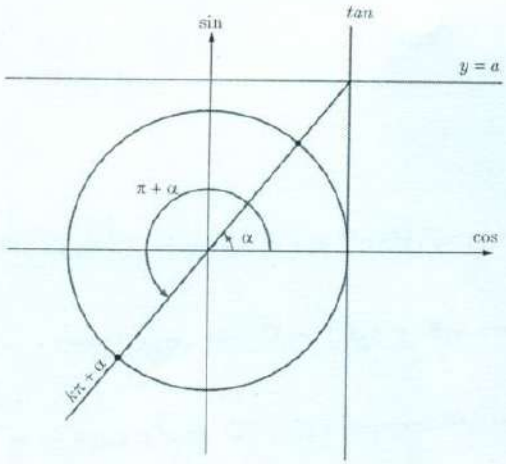
$$2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$
$$\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=0\ , 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x=\frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x=0, \frac{\pi}{2}$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

پس از به توان رساندن ممکن است به جواب های ما تعدادی جواب فرعی اضافه شده باشد که با چک کردن آن ها حذف می شود

در شکل زیر نمودار تابع $y=\tan x$ و خط $y=a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x=a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a، که $\tan x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan\alpha=a$. بنابراین معادله $\tan x=a$ به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x=\tan\alpha$ باید رابطه بین زوایای x و α را بیابیم.





از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ که k یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a=1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{4} \quad (k\in z)$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال : معادله $\tan x=\tan 5x$ را حل کنید.

حل :

$$x = k\pi+5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{4} \ (k\in\mathbb{Z})$$

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

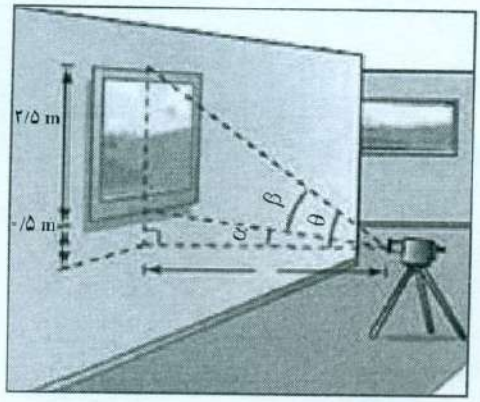
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال: نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به‌صورت زیر است.

$$\tan\beta=\frac{۲/۵\,x}{x^{۲}+\frac{۳}{۲}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به‌دست آورید.

حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم‌الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan\alpha=\frac{۰/۵}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

$$\tan\theta=\frac{۳}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به‌دست می‌آید:

$$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{۱+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{۳}{x}-\frac{۰/۵}{x}}{۱+\frac{۳}{x}\times\frac{۰/۵}{x}}=\frac{\frac{۲/۵}{x}}{\frac{x^{۲}+\frac{۳}{۲}}{x^{۲}}}=\frac{۲/۵x}{x^{۲}+\frac{۳}{۲}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x=۱\rightarrow\tan\beta=\frac{۲/۵\times۱}{۱^{۲}+\frac{۳}{۲}}=\frac{۲/۵}{۲/۵}=۱$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan\frac{\pi}{۴}=۱$ پس جواب‌های معادله $\tan\beta=۱$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\beta=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=۰$ که مقدار $\beta=\frac{\pi}{۴}$ را به‌دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\times\frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$$\sin 22/5 = \sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22/5 = \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

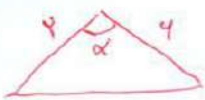
ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

چ) $\tan(2x-1) = 0$

ح) $\tan 3x = \tan \pi x$

در صفحه بعد

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\frac{1}{2}\times 2\times 6\times \sin\alpha = 3$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \pi/6 & k\in Z \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \pi/6 & k\in Z \end{cases}$$

$\alpha = \pi/6$ و $\alpha = 5\pi/6$ دو مثلث می‌توان ساخت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - \cancel{1} - \cos x + \cancel{1} = 0$

$2\cos^2 x - \cos x = 0 \longrightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

ج) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \longrightarrow -2\sin^2 x + 1 - \sin x = 0 \longrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

د) $\cos x = \cos 2x$

$x = 2k\pi \pm 2x$

$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \longrightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ه) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \longrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

و) $\sin x - \underbrace{\cos 2x}_{-2\sin^2 x + 1} = 0 \longrightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

ز) $\tan(2x - 1) = 0$

$2x - 1 = k\pi$

$x = \frac{k\pi + 1}{2}$

ح) $\tan 3x = \tan \pi x$

$3x = k\pi + \pi x$

$(3 - \pi)x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{3 - \pi}$

حدهای نامتناهی ــ حد در بی‌نهایت

فصل ۳

آذربایجان‌غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به‌وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به‌طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

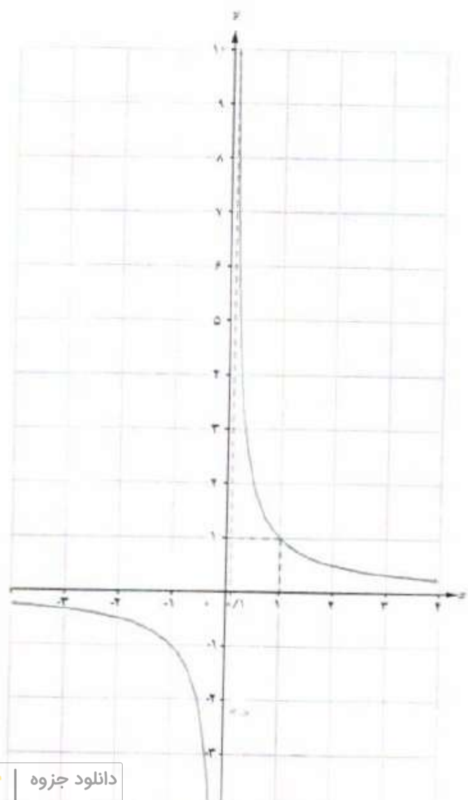
درس ۱

حدهای نامتناهی

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت

در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x=0$ بررسی کنیم.



۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	... ⟶	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	... ⟶	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟ یک میلیونیم (10^{-6})

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟ خیر
وقتی x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک میشود مقادیر $f(x)$ مرتباً بزرگ می‌شوند

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

✣ تذکر : این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

کار در کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	$-\frac{1}{2}$	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۰۱	... ⟶	۰
$f(x)$	−۲	−۵	−۱۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰	... ⟶	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از -10^6 کوچک‌تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟ باید $x < -10^{-6}$

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ مقادیر $f(x)$ مرتباً کوچک و کوچکتر می‌شود
اما به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود

ت) در مورد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

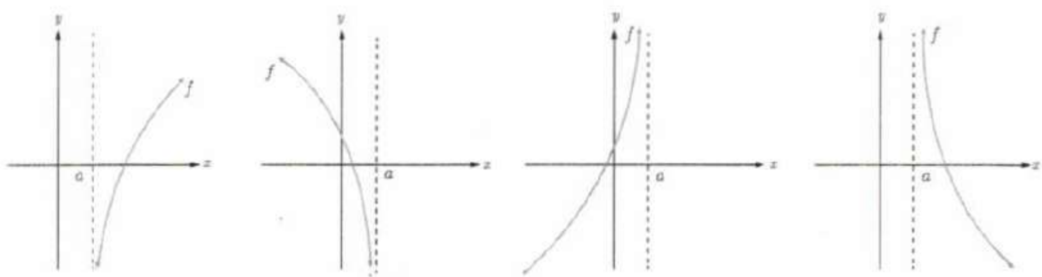
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

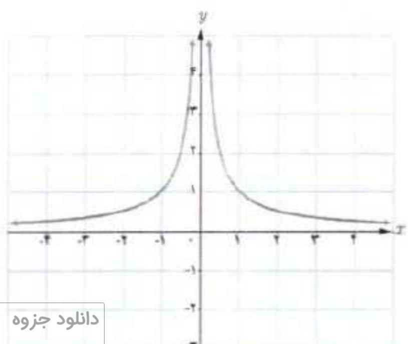
همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ بدین‌معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکر : تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثال : نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x=0$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید :



x	$-۰/۵$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\cdots \to$	۰	$\leftarrow \cdots$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵
$f(x)$	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\cdots \to$	تعریف نشده	$\leftarrow \cdots$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می‌توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی‌شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱}{|x|} = +\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حدّ در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و مقدار تابع خیلی کوچک‌تر می‌شود در زیر وجود دارد.

تعریف :

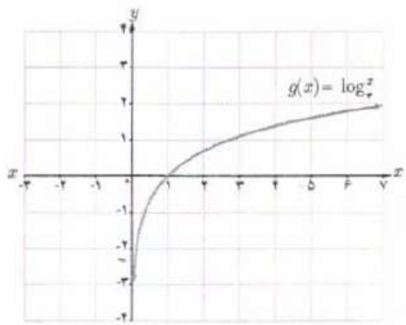
فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

✤ مثال : برای حدّ تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ در نقطه $x = ۰$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = -\infty$.

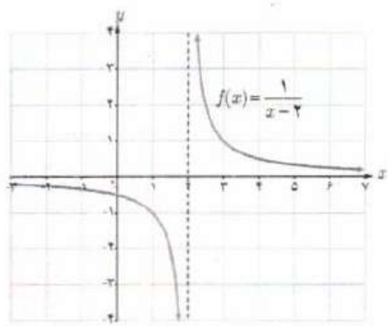
✤ مثال : در مورد حد تابع $f(x) = \frac{۱}{|x|}$ در نقطه $x = ۰$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{۱}{|x|} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{۱}{|x|} = +\infty$

کار در کلاس

نمودار توابع f، g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

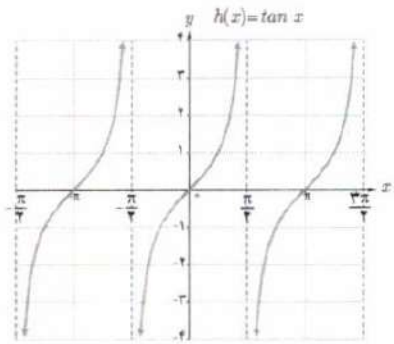


$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به‌کار می‌رود و نشانهٔ آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به‌صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x \to \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \to \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت[1]

✤ **قضیه ۱** : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{عددی زوج باشد،}\ n\\ -\infty & \text{عددی فرد باشد،}\ n\end{cases}$$

✤ **مثال** : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$$

✤ **قضیه ۲** : **الف)** اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

✤ **مثال** : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$

کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

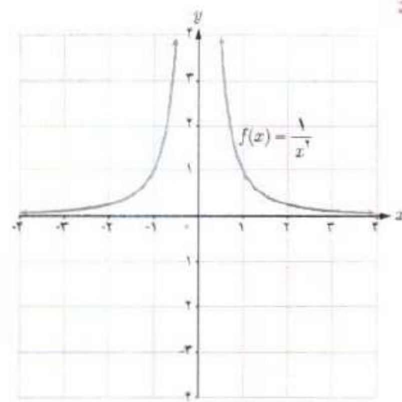
طبق قضیه ۱ $n=1$ (فرد است)

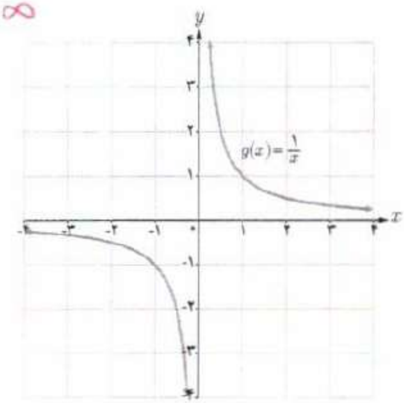
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ $=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$





۱ـ ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی‌کنیم.

✤ **قضیه ۳** : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

✤ **تذکر** : قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

✤ **مثال** : هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله تابعی، با ضابطه $f(x)=\dfrac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $[0\,,100)$ می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه ۶۳/۷۵ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95)=4845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با توجه به قضیه فوق داریم : $\lim\limits_{x\to 100^-}\dfrac{255x}{100-x}=+\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صددرصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.


سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکس: سیدمهدی حسینی)

✤ **مثال** : حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{4-x^2}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که $4-x^2=(2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to 2^-} x+1=3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{4-x^2}=+\infty$

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{\sin x}$ را به‌دست آورید.

حل :وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر ۱- و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{\sin x}=-\infty$

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به‌صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید و چون $x\neq -1$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد. داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=+\infty$$

کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1-x}{x+2}$ $=\dfrac{1+2}{-2+2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]-2}{x-2}$ $=\dfrac{[2^-]-2}{2-2}=\dfrac{1-2}{0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1+1}{1-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

✤ قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ (و یا $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$) آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

✤ تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس‌های قبل به‌صورت شهودی دیده شد که : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ از طرفی

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x+1)=\dfrac{\pi}{2}+1$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}=0$

فعالیت

۱ توابع $f(x)=\frac{1}{x^۲}$ و $g(x)=x+۱$ را در نظر بگیرید.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim g(x) = 0+1=1$

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ را به‌دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}((f+g)(x))$ را محاسبه کنید.

$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2}+(x+1) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+1}{x^2} = +\infty$

پ) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$

۲ تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ بیان کنید.

$(f\times g)(x) = \frac{1}{x^2}\times(x+1) = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad$ $\lim (f\times g)(x) = \lim \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آنگاه اگر $L>0$ باشد: $\lim (f.g)(x) = +\infty$ و اگر $L<0$ باشد $\lim (f.g)(x) = -\infty$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آن‌گاه:[1]

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = +\infty$

ب) اگر $L>۰$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = +\infty$

پ) اگر $L<۰$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = -\infty$

تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(۲x+۱+\frac{۱}{x^۲})$ از آنجا که $\lim\limits_{x\to ۰} ۲x+۱ = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x+\sin^۲ x}{x^۲}$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\frac{x+\sin^۲ x}{x^۲} = \frac{۱}{x}+\frac{\sin^۲ x}{x^۲}$ از طرفی $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{x^۲} = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x} = +\infty$ و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

---

[1] ــ این قضیه در حالت $L=۰$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $\infty-\infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=-\infty$

ب) اگر $L>0$ باشد $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=-\infty$

پ) اگر $L<0$ باشد $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=+\infty$

کار در کلاس

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1+1}{1-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$ ق ۳

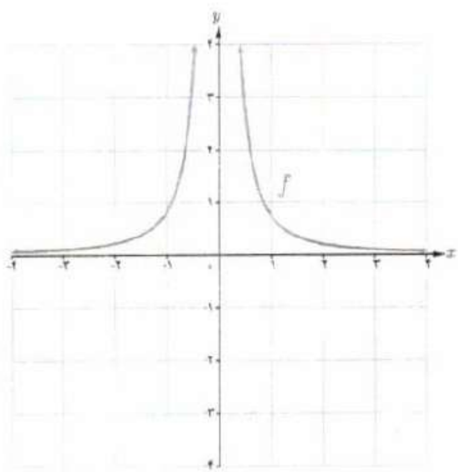
ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ ق ۵

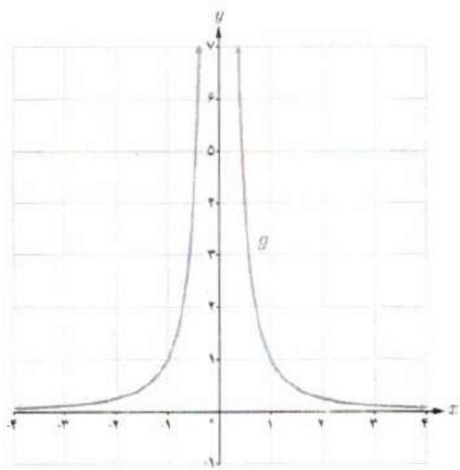
پ) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}=\lim\dfrac{x+2}{(x+2)^2}=\lim\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{-2+2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ ق ۳

ت) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-\cos 2x}{x}=\dfrac{2-\cos(0)}{0^-}=\dfrac{2-1}{0^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ ق ۳

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.





$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=-\infty$ خط $x=0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

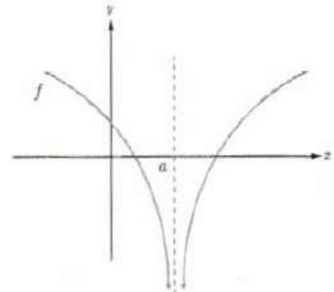
تعریف :

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$

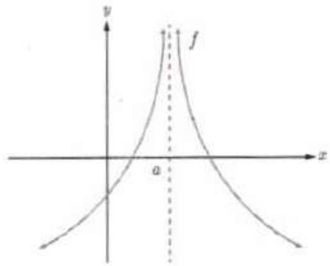
$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$

مثال : در هر یک از شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



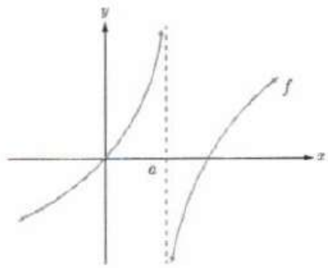
$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



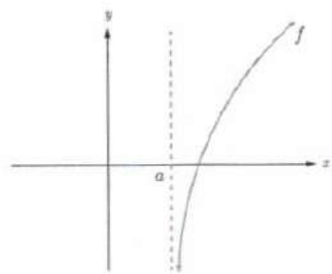
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

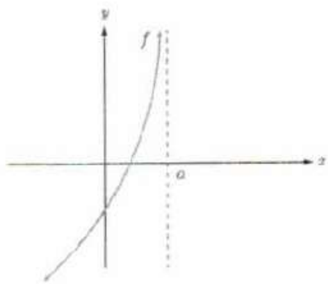


$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

مثال : کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می‌باشند؟

حل : شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=-\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ می‌توانستیم بگوییم $x=-1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

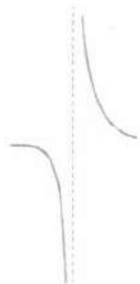
خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به‌صورت $x=-1$ دارد.

مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

حل :

$$f(x)=\frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$



پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.

کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

$x^2-x-6=0 \longrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$

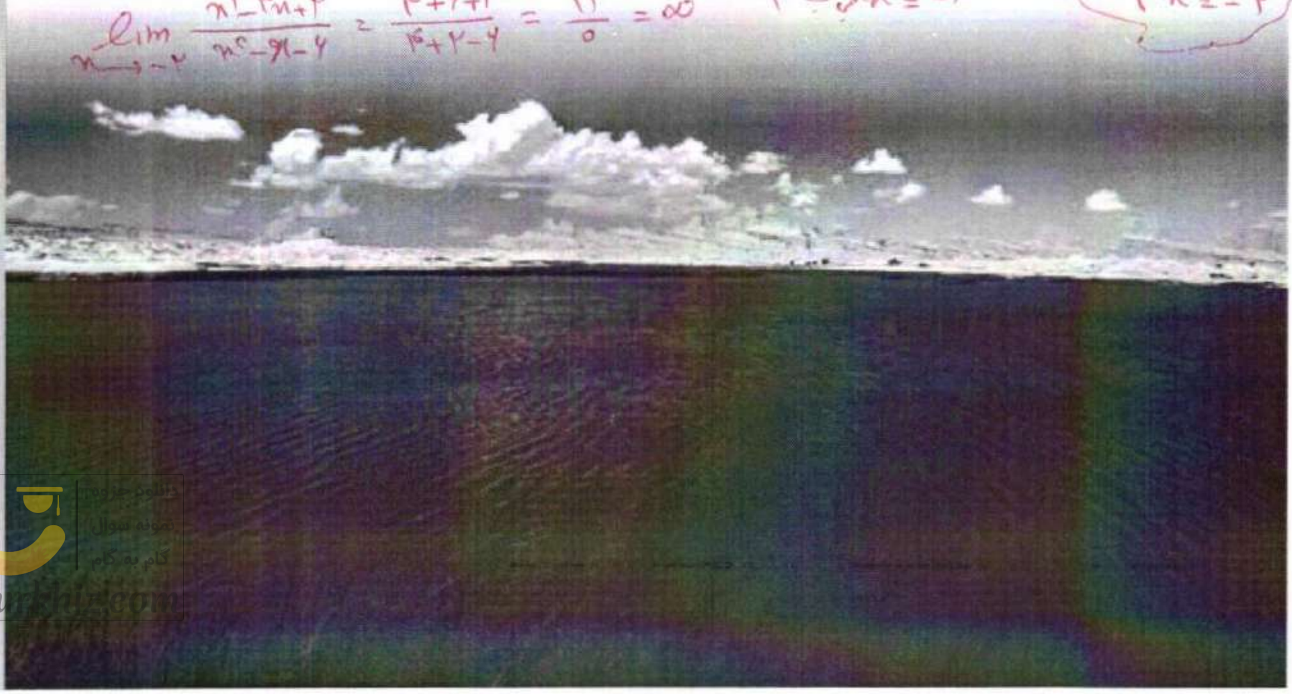
$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{9-9+2}{9-3-6} = \frac{2}{0} = \infty$

$x=3$ مجانب قائم است

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{4+6+2}{4+2-6} = \frac{12}{0} = \infty$

$x=-2$ مجانب قائم است

مجانب‌های قائم $\begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$



الف) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{۳+x^۲}=\sqrt{۳}$
$\lim\limits_{x\to 0}x^۲=0^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۲}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{|۵-x|}{|۲+x|}$

$\lim\limits_{x\to(-۲)}|۵-x|=۷$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}$ $\lim\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-۲)}|۲+x|=0^+$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to ۲}(۱)=۱$
$\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۴=0^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}$ $\lim\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

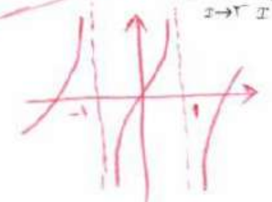
۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{۲x}{x^۲-۴}=\dfrac{۴}{۴-۴}=\dfrac{۴}{0^-}=-\infty$

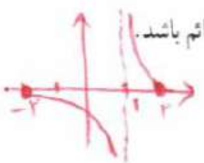
ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}=\dfrac{۹+۶-۱}{۹+۳-۱۲}=\dfrac{۱۴}{0^-}=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{۹-x^۲}=\dfrac{۳+۱}{۹-۹}=\dfrac{۴}{0^-}=-\infty$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-۲,۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

$x^۲-x=0 \begin{cases} x=0 \to \text{مجانب قائم نیست} \\ \boxed{x=۱} \to \text{مجانب قائم است}\end{cases}$

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x}$

$x=۳ \to \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲x-۱}{۳-x}=\infty$

$\boxed{x=۳ \text{ مجانب قائم است}}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}$

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}=\dfrac{۲}{0}=\infty$

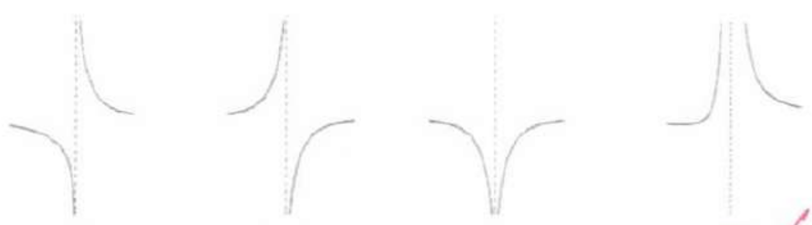
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}=\dfrac{۱}{-۱}=-۱$

۶ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$D_f=(-\infty,0)$

$x=0$ مجانب قائم

۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}$ را در همسایگی $x=۱$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



(ت) (پ) (ب) (الف) ✓

$\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}=\lim\dfrac{x}{(x-۱)^۲}=\dfrac{۱}{0^+}=+\infty$

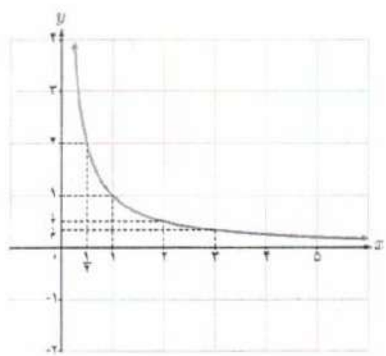
درس ۲

حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.

در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	10^3	10^5	10^6
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	۰/۱	۰/۰۱	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟ ۵

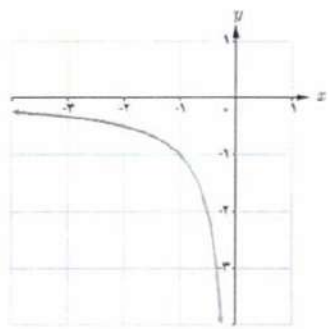
۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰

۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچک‌تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰۰

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور xها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ بله با انتخاب xهای بزرگ

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $(-\infty\,,\,۰)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰	$-۱۰^{۳}$	$-۱۰^{۴}$	...
$f(x)$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۱۰^{-۳}$	$-۱۰^{-۴}$	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{۱}{۳}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ -۳

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{۱}{۱۰^{۶}}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ $-۱۰^{۶}$

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و جدول بالا می‌توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (یعنی از هر عدد منفی کوچک‌تر) شود آن‌گاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$

تذکر : منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ قبل به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

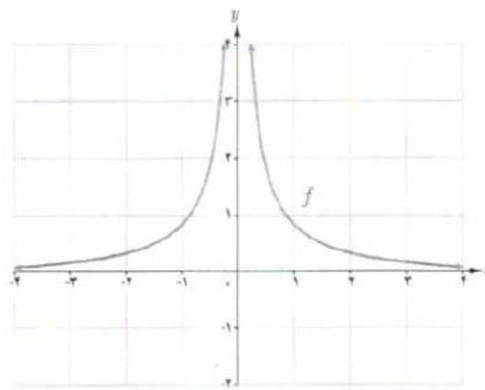
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty , a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

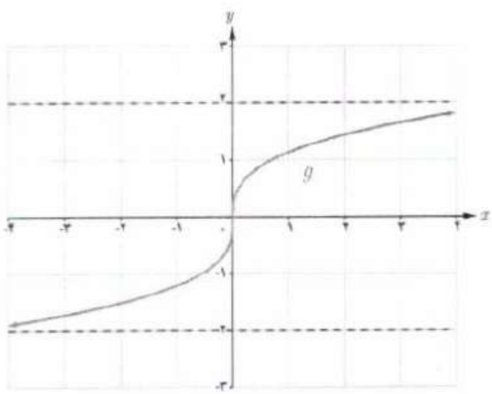
کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۰$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۰$



$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -۲$

✤ قضیه ۶ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n} = ۰$

✤ مثال : حاصل هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{۲}}{x^۲}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-۵}{۲x^۳}$ برابر صفر است.

✤ قضیه ۷ : اگر $L_۱$ و $L_۲$ اعداد حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۲$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۱ \pm L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f.g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) . \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_۱ L_۲$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲}$ (با فرض $L_۲ \neq ۰$)

✤ تذکر : قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند نیز برقرار است.

✤ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} (۳ + \frac{۵}{x^۳})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}$

حل :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

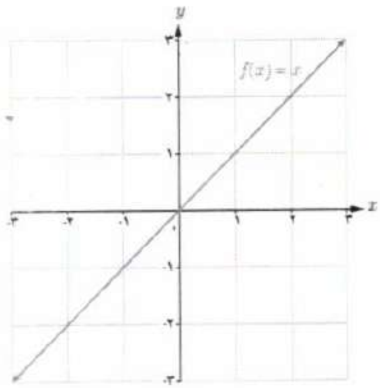
$$\lim_{x\to+\infty} (۳ + \frac{۵}{x^۳}) = \lim_{x\to+\infty} ۳ + \lim_{x\to+\infty} \frac{۵}{x^۳} = ۳ + ۰ = ۳$$

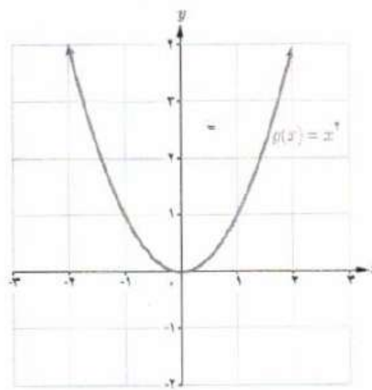
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} ۲ + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۵}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} ۴} = \frac{۲+۰}{۰+۴} = \frac{۱}{۲}$$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.



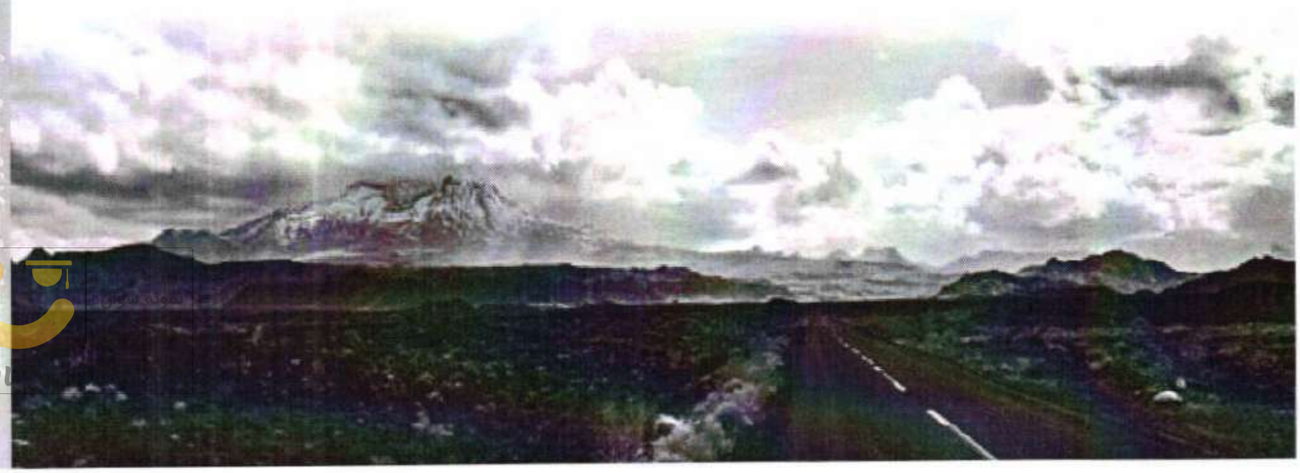


همچنین با کوچک شدن مقادیر x، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a , +\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ یعنی با کاهش مقادیر x مقادیر f(x) از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر می‌شود.

کار در کلاس

۱ مفاهیم $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.

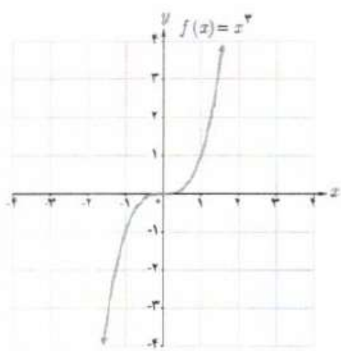
۲ با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

فعالیت

تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	-10^{18}	-10^9	-10^6	-1	1	1000	10^6	10^9	10^{18}	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ با افزایش (کاهش) x مقادیر f(x) افزایش (کاهش) می‌یابد.

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \to +\infty} x^3$ و $\lim_{x \to -\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

✤ قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$

ب) اگر n فرد باشد : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty\end{array}\right\}$

✤ قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x).\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد}\end{cases}$$

✤ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

✤ قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x).\lim_{x\to-\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد}\end{cases}$$

✤ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

✤ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳ + x - ۱) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^۳(-۲ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -۲x^۳ = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳ - ۲x - ۵x^۴) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴} - \frac{۲}{x^۳} - ۵) = \lim\limits_{x\to+\infty} -۵x^۴ = -\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$ اشکال تایپی

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ و $\boxed{g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0}$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{a_n}{b_n}x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{\lim\limits_{x\to\infty} b_mx^m+\dots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m>n$ و $m<n$ و $m=n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

اگر $m>n \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

و اگر $m=n \longrightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_m}$

و اگر $m<n \longrightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{2}x=\pm\infty$

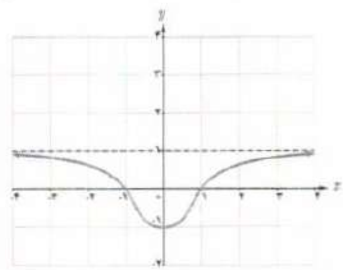
ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3}{6x^3}=-\frac{1}{2}$

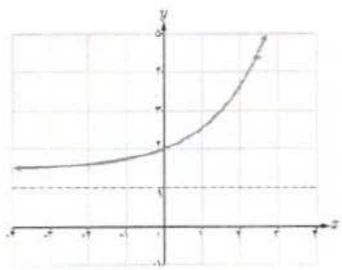
پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4x^3}=\lim\frac{1}{2x}=0$

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ برقرار باشد

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟





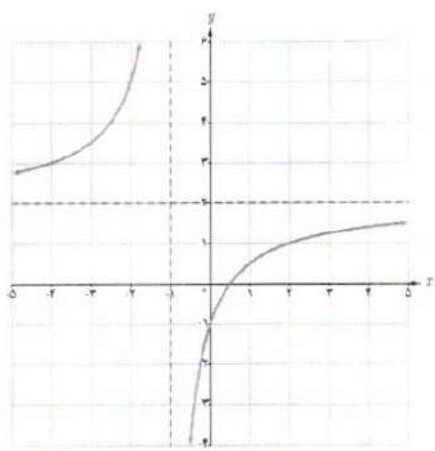
مثال : مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ را به‌دست آورید.

حل : برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$

پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

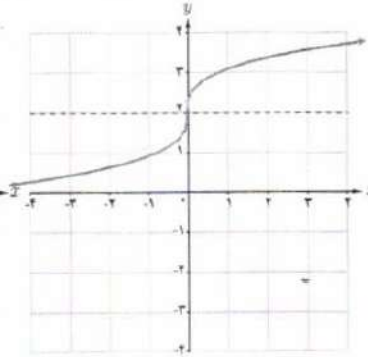
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا : $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty$

نمودار تابع به‌صورت زیر است.

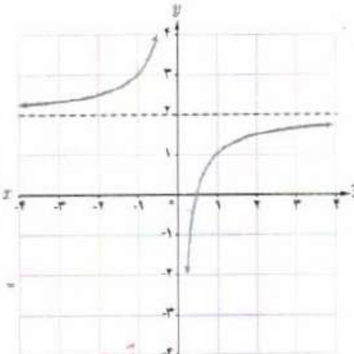


کار در کلاس

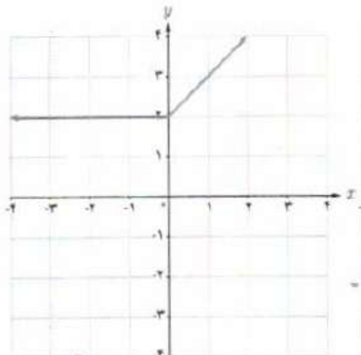
۱ کدام‌یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



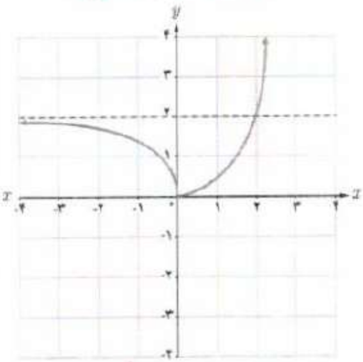
الف مجانب افقی ندارد



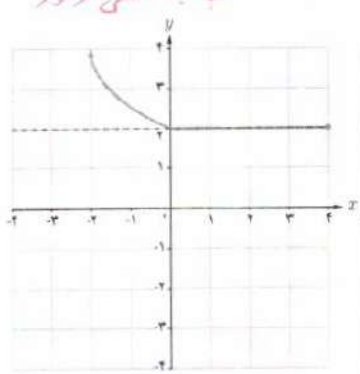
ب $y=2$ مجانب افقی



پ مجانب افقی ندارد



ت $y=2$ مجانب افقی



ث مجانب افقی ندارد

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ $\quad y=0$ مجانب افقی

ب) $g(x)=x^3$

$y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^3=\pm\infty$ $\quad$ مجانب افقی ندارد.

پ) $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

$y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x+1}=\pm\infty$ $\quad$ مجانب افقی ندارد

تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

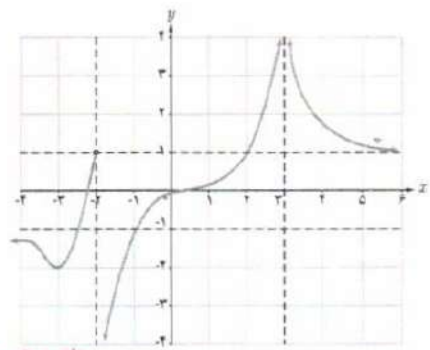
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$

هرچه مقادیر x بزرگتر شود مقادیر y به عدد ۲ نزدیک می‌شوند.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

هرچه مقادیر x کوچکتر شوند مقادیر y به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

پ) $\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-۲^+} f(x)=-\infty$

ج) مجانب‌های افقی و قائم
مجانب قائم $x=-2,\ x=3$
مجانب افقی $y=1,\ y=-1$

۳ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۵}{x-۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^2}{t^3}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{t}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱}=\lim\dfrac{-x^2}{4x}=\lim\dfrac{-x}{4}=\mp\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۳-۲x^۲)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$
$x=3$ مجانب قائم
$y=2$ مجانب افقی

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$
$x=2,\ x=-2$ مجانب قائم
$y=0$ مجانب افقی

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$
$x=1,\ x=-1$ مجانب قائم
$y=-2$ مجانب افقی

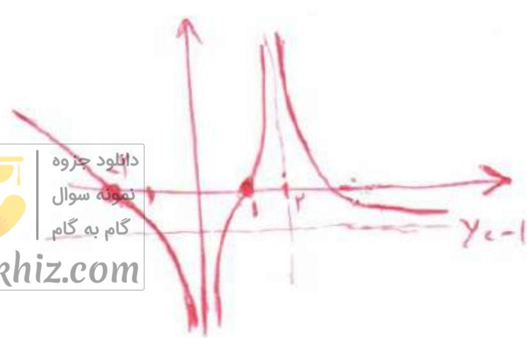
ت) $y=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$
مجانب قائم ندارد
$y=0$ مجانب افقی

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to۰} f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to۲^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.



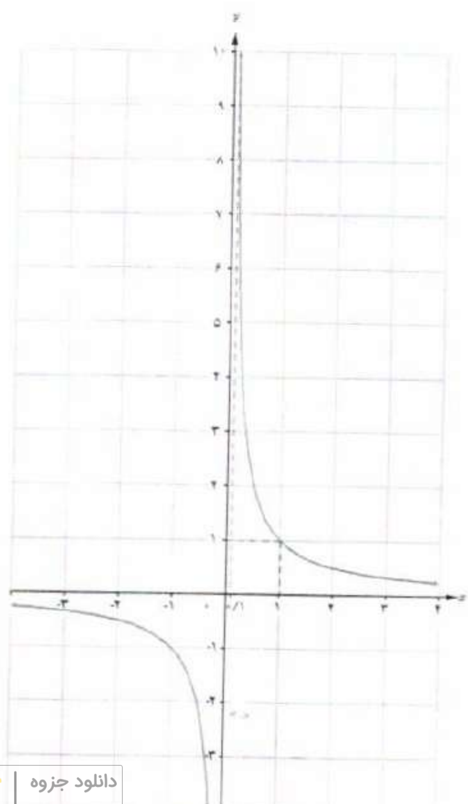
درس ۱

حدهای نامتناهی

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت

در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x=0$ بررسی کنیم.



۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	... ⟶	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	... ⟶	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟ یک میلیونیم $(۱۰^{-۶})$

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟ خیر
وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ مرتباً بزرگ می‌شوند

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

✤ تذکر : این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

کار در کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	$-\frac{۱}{۲}$	۰/۲-	۰/۱-	۰/۰۰۱-	۰/۰۰۰۱-	۰/۰۰۰۰۱-	... ⟶	۰
$f(x)$	۲-	۵-	۱۰-	۱۰۰۰-	۱۰۰۰۰-	۱۰۰۰۰۰-	... ⟶	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از $-۱۰^{۶}$ کوچک‌تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟ باید $x < -10^{-6}$

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ مقادیر $f(x)$ مرتباً کوچک و کوچکتر می‌شود
اما به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود

ت) در مورد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

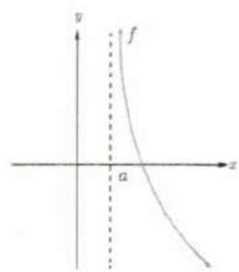
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

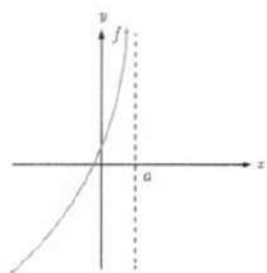
تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی

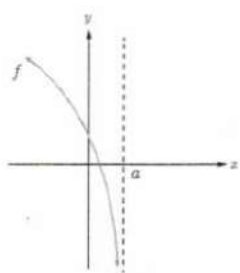
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

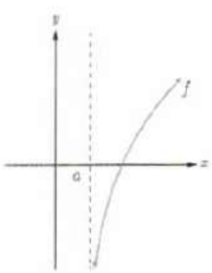
همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ بدین‌معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکر: تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.

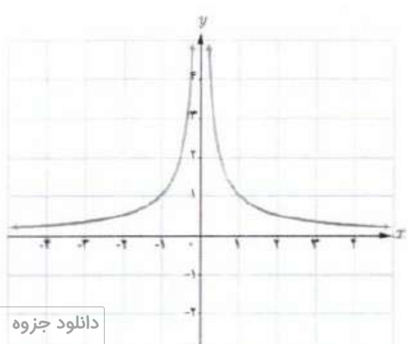

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x=0$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:



x	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	$\cdots \to$	۰	$\leftarrow \cdots$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵
$f(x)$	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\cdots \to$	تعریف نشده	$\leftarrow \cdots$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲

مشاهده می‌شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می‌توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی‌شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$.

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حدّ در مورد تابع‌هایی که وقتی x به a نزدیک می‌شود و مقدار تابع خیلی کوچک‌تر می‌شود در زیر وجود دارد.

تعریف :

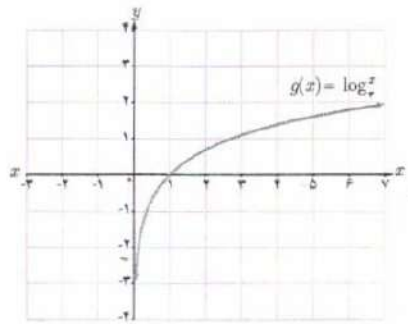
فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

✤ مثال : برای حدّ تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$.

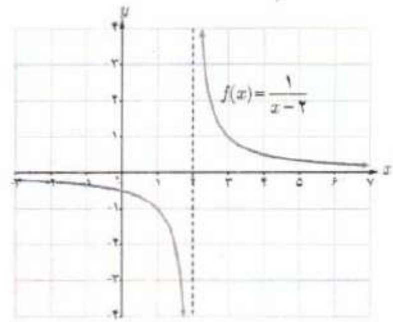
✤ مثال : در مورد حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در نقطه $x=0$ می‌توان گفت : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{|x|}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{|x|}=+\infty$

کار در کلاس

نمودار توابع f، g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

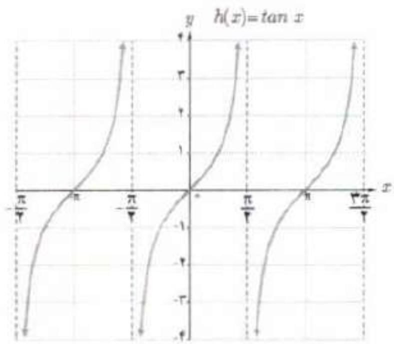


$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به‌کار می‌رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به‌صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x \to \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \to \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت[۱]

قضیه ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{عددی زوج باشد،} \ n\\ -\infty & \text{عددی فرد باشد،} \ n\end{cases}$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$$

قضیه ۲ : **الف)** اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ و برعکس.

مثال : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{|x-1|}=+\infty$

کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

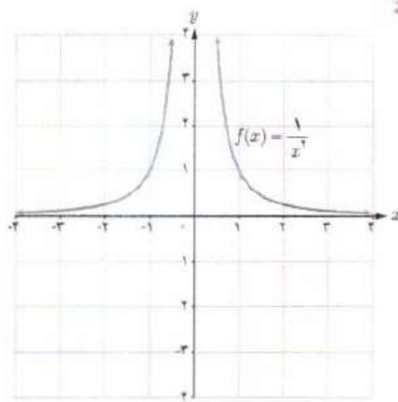
طبق قضیه ① $n=1$ (فرد است)

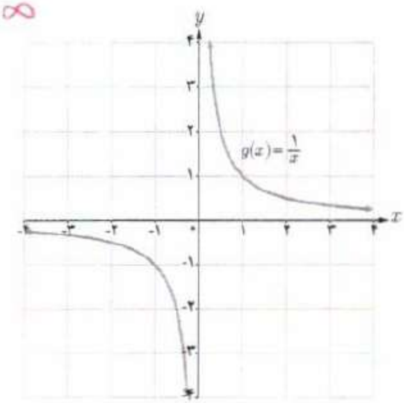
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ $=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$





۱ـ ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی‌کنیم.

✤ **قضیه ۳** : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

✤ **تذکر** : قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

✤ **مثال** : هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله تابعی، با ضابطه $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $[0\,,100)$ می‌باشد.

مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه ۶۳/۷۵ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95)=4845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با توجه به قضیه فوق داریم : $\lim\limits_{x\to 100^-}\frac{255x}{100-x}=+\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صددرصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.

سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکس: سیدمهدی حسینی)

✤ **مثال** : حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{4-x^2}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که $4-x^2=(2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to 2^-} x+1=3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{4-x^2}=+\infty$

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sin x}$ را به‌دست آورید.

حل :وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر ۱- و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sin x}=-\infty$

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به‌دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به‌صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید و چون $x\neq -1$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد. داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=+\infty$$

کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x+2}$ $=\frac{1+2}{-2+2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}$ $=\frac{[2^-]-2}{2-2}=\frac{1-2}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

✤ قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ (و یا $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$) آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

✤ تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس‌های قبل به‌صورت شهودی دیده شد که : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x+1)=\frac{\pi}{2}+1$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=0$

فعالیت

۱ توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیرید.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0+1=1$

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ را به‌دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left((f+g)(x)\right)$ را محاسبه کنید.

$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2}+(x+1) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+1}{x^2}=+\infty$

پ) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$

۲ تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ بیان کنید.

$(f\times g)(x) = \frac{1}{x^2}\times(x+1) = \frac{x+1}{x^2}$ $\lim(f\times g)(x) = \lim\frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه اگر $L>0$ باشد $\lim(f.g)(x)=+\infty$ و اگر $L<0$ باشد $\lim(f.g)(x)=-\infty$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

✤ قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه:[1]

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=-\infty$

✤ تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

✤ مثال : برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1+\frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

✤ مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\frac{x+\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱ــ این قضیه در حالت $L=0$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $\infty-\infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$

ب) اگر $L>0$ باشد $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = -\infty$

پ) اگر $L<0$ باشد $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$

کار در کلاس

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1+1}{1-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ ق ۳

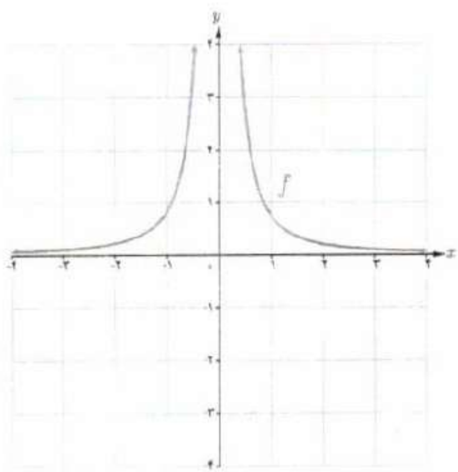
ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ ق ۵

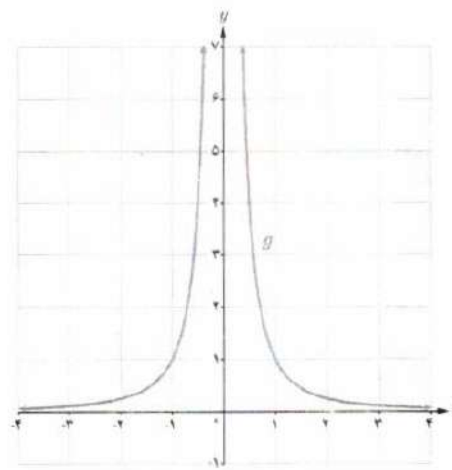
پ) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+2}{x^2+4x+4} = \lim \dfrac{x+2}{(x+2)^2} = \lim \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{-2+2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ ق ۳

ت) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-\cos 2x}{x} = \dfrac{2-\cos(0)}{0^-} = \dfrac{2-1}{0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ ق ۳

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.





$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x = 0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

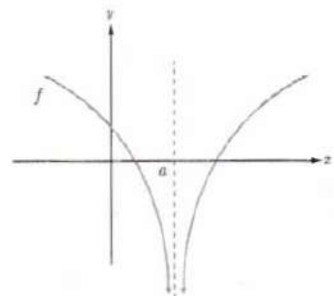
تعریف :

خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

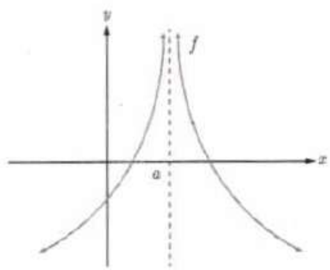
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

✤ مثال : در هر یک از شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



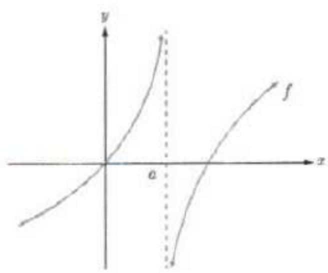
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



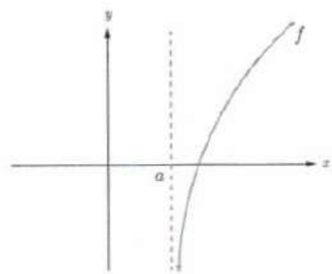
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

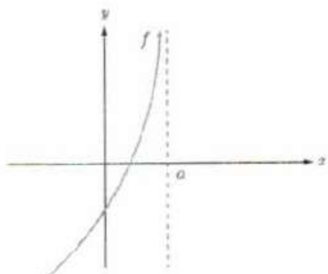


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

✤ مثال : کدام‌یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می‌باشند؟

حل : شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=-\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ می‌توانستیم بگوییم $x=-1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به‌صورت $x=-1$ دارد.

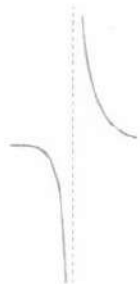
✤ **مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟**

حل :

$$f(x)=\frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.



کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

$x^2-x-6=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$

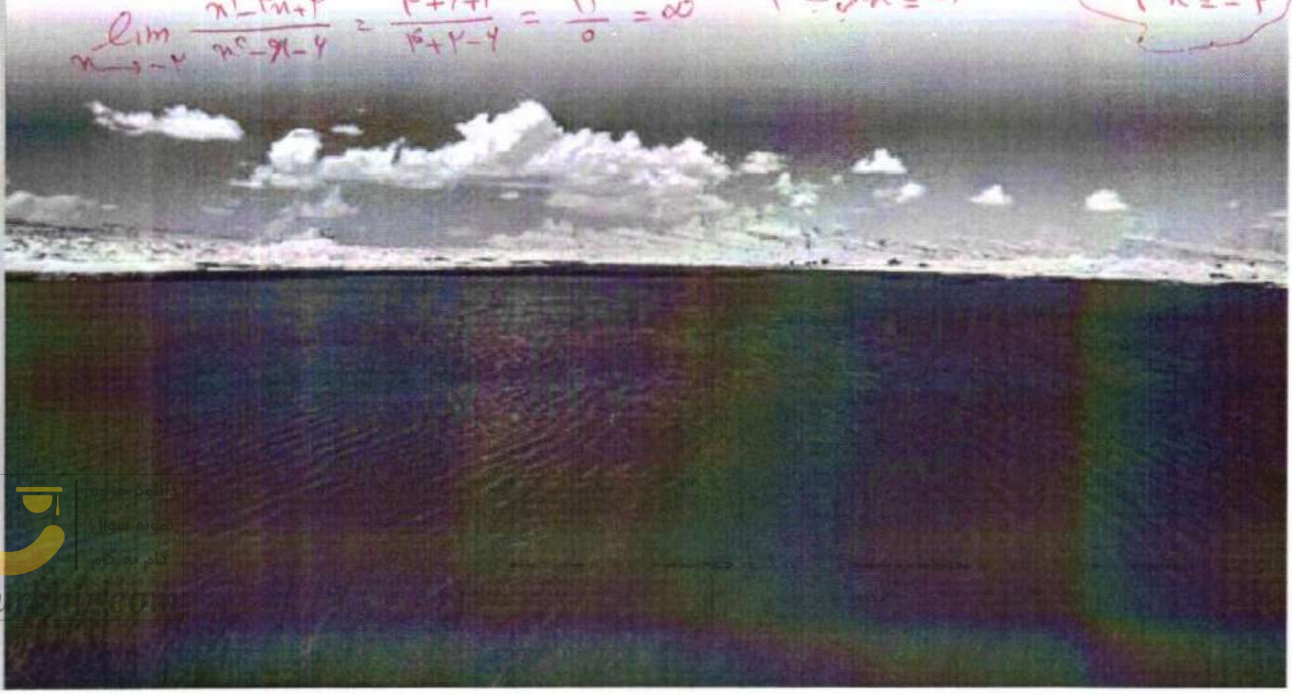
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{9-9+2}{9-3-6} = \dfrac{2}{0} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{4+6+2}{4+2-6} = \dfrac{12}{0} = \infty$

$x=3$ مجانب قائم

$x=-2$ مجانب قائم

مجانب‌های قائم $\begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$



الف) $\lim_{x\to 0}\sqrt{3+x^2}=\sqrt{3}$, $\lim_{x\to 0}x^2=0^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۲}}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}=+\infty$

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}=+\infty$

ب) $\lim_{x\to -2}\left|\frac{5-x}{2+x}\right|=+\infty$

$\lim_{x\to -2}\frac{|5-x|}{|2+x|}$

$\lim_{x\to(-2)}|5-x|=7$, $\lim_{x\to(-2)}|2+x|=0^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}$ $\lim\left|\frac{5-x}{2+x}\right|=+\infty$

پ) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^4}=+\infty$

$\lim_{x\to 2}(1)=1$, $\lim_{x\to 2}(x-2)^4=0^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}$ $\lim\frac{1}{(x-2)^4}=+\infty$

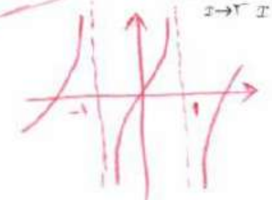
۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 2^-}\frac{2x}{x^2-4}=\frac{4}{4-4}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

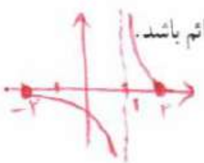
ب) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12}=\frac{9+6-1}{9+3-12}=\frac{14}{0^-}=-\infty$

پ) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{9-x^2}=\frac{3+1}{9-9}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-2,2]-\{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

$x^2-x=0\begin{cases}x=0 \to \text{مجانب نیست}\\ \boxed{x=1} \to \text{مجانب قائم است}\end{cases}$

الف) $f(x)=\frac{2x-1}{3-x}$

$x=3 \to \lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{3-x}=\infty$

$\boxed{x=3 \text{ مجانب قائم است}}$

ب) $g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{2}{0}=\infty$

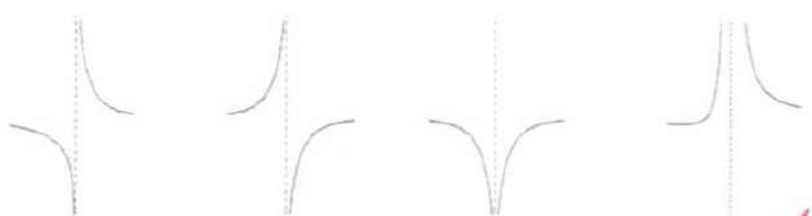
$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{1}{-1}=-1$

۶ نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$D_f=(-\infty,0)$

$x=0$ می‌باشد

۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



(الف) ✓   (ب)   (پ)   (ت)

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-2x+1}=\lim\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

درس ۲

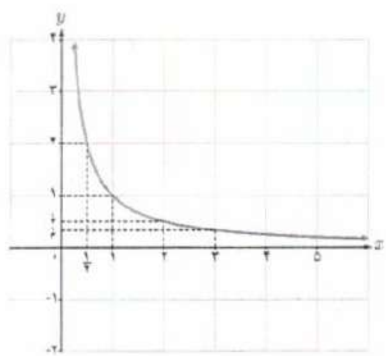
حد در بی‌نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.

در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	10^3	10^5	10^6
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	۰/۱	۰/۰۱	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟ ۵

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰

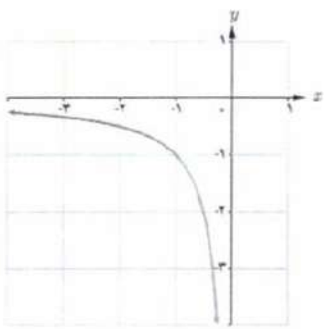
۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{100}$ کوچک‌تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰۰

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور xها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ بله با انتخاب x های بزرگ

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-1	-2	-5	-10	-100	-10^3	-10^4	...
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-0/1$	$-0/01$	-10^{-3}	-10^{-4}	...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور xها کمتر از $\frac{1}{3}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ -3

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از $\frac{1}{10^6}$ کمتر شود. x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟ -10^6

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و جدول بالا می‌توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (یعنی از هر عدد منفی کوچک‌تر) شود آن‌گاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

✤ تذکر : منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ قبل به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

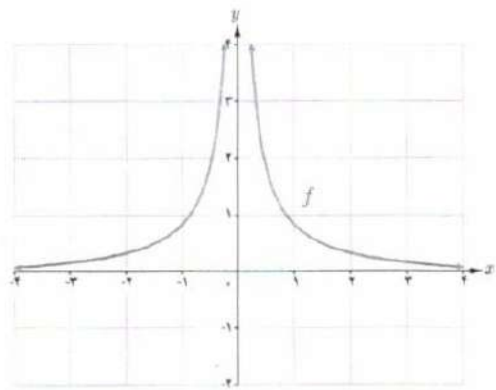
تعریف :

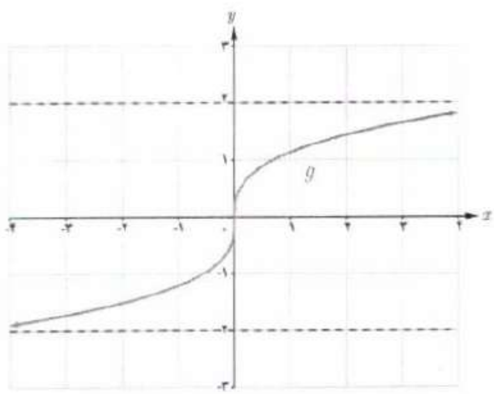
■ اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

■ اگر تابع f در بازه $(-\infty\,,\,a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به‌دست آورید.





$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$

✤ قضیه ۶ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a}{x^n}=0$

✤ مثال : حاصل هر یک از حدود $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-5}{2x^3}$ برابر صفر است.

✤ قضیه ۷ : اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_2$ آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_1\pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x).\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L_1L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ (با فرض $L_2\neq 0$)

✤ تذکر : قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند نیز برقرار است.

✤ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\dfrac{5}{x^3})$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{5}{x}+4}$

حل :

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

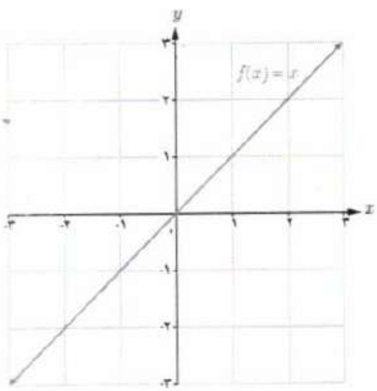
$$\lim_{x\to+\infty}(3+\frac{5}{x^3})=\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^3}=3+0=3$$

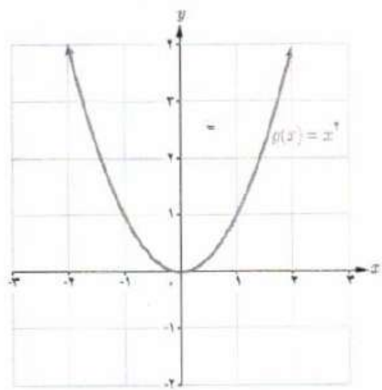
ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x}+4}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}4}=\frac{2+0}{0+4}=\frac{1}{2}$$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند. ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.



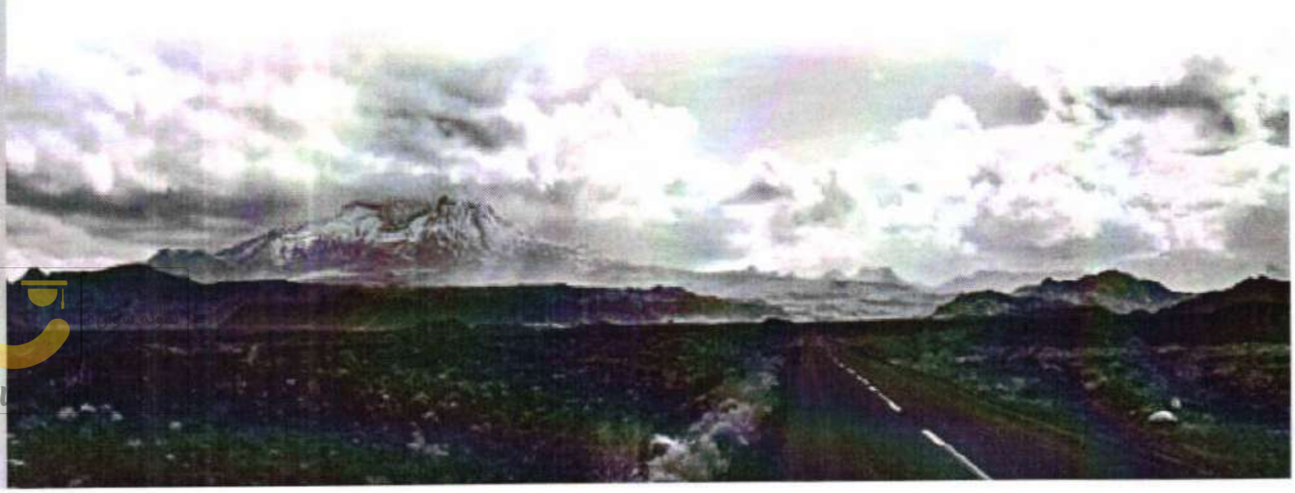


همچنین با کوچک شدن مقادیر x، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.

در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a\,,+\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به‌سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ یعنی با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر می‌شود.

کار در کلاس

۱ مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ را بیان کنید.

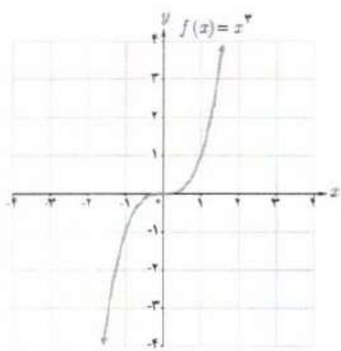
۲ با توجه به نمودار توابع $y=x$ و $y=x^2$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

فعالیت

تابع $f(x)=x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	...←	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6	→...
$f(x)$	...←	-10^{18}	-10^9	-10^6	-1	1	1000	10^6	10^9	10^{18}	→...

۲ با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ با افزایش (کاهش) x مقادیر $f(x)$ افزایش (کاهش) می‌یابد.

۳ در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

✤ قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$

ب) اگر n فرد باشد : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \end{array}\right\}$

✤ قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x).\lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

✤ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

✤ قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x \to -\infty} f(x).\lim_{x \to -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

✤ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

✤ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-۲x^۳ + x - ۱)$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (۳ - ۲x - ۵x^۴)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-۲x^۳ + x - ۱) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^۳(-۲ + \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x \to -\infty} -۲x^۳ = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (۳ - ۲x - ۵x^۴) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^۴(\frac{۳}{x^۴} - \frac{۲}{x^۳} - ۵) = \lim\limits_{x \to +\infty} -۵x^۴ = -\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ اشکال تایپی

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $\boxed{g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{\lim\limits_{x\to\infty} b_m x^m + \dots + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

اگر $m > n \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

اگر $m = n \longrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

اگر $m < n \longrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$

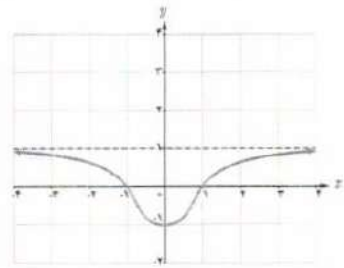
ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

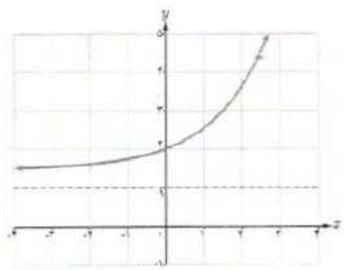
پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim \frac{1}{2x} = 0$

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟





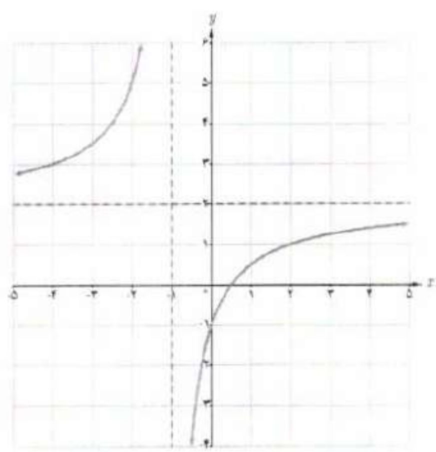
مثال : مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ را به‌دست آورید.

حل : برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$

پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

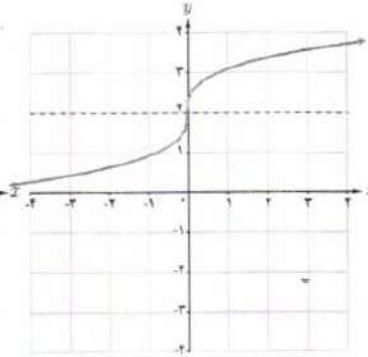
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا : $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty$

نمودار تابع به‌صورت زیر است.

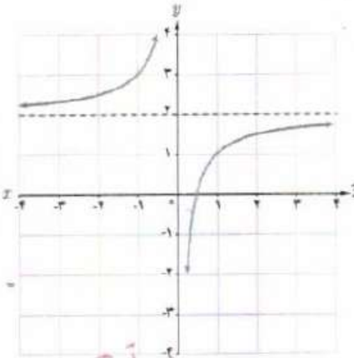


کار در کلاس

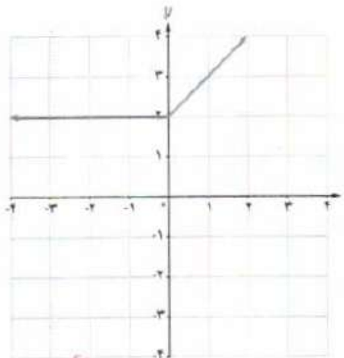
۱ کدام‌یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



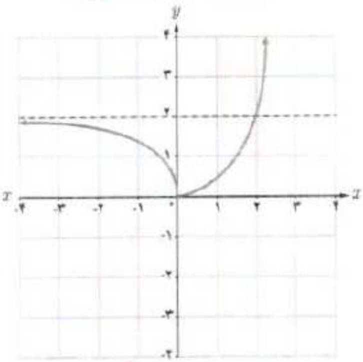
الف — مجانب افقی ندارد



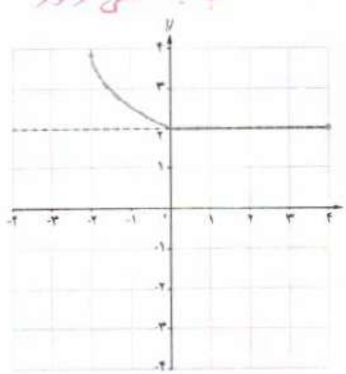
ب — $y=2$ مجانب افقی



ب — مجانب افقی ندارد



ت — $y=2$ مجانب افقی



ث — مجانب افقی ندارد

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

$y=0$ مجانب افقی

ب) $g(x)=x^3$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}x^3=\pm\infty$$

مجانب افقی ندارد.

پ) $h(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=\pm\infty$$

مجانب افقی ندارد

تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

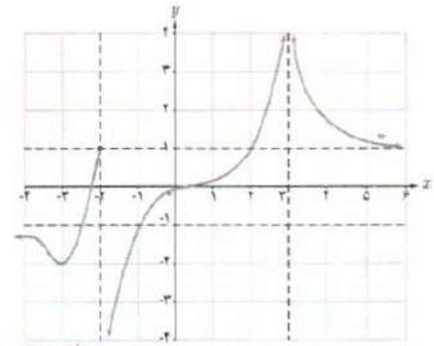
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$

هرچه مقادیر x بزرگتر شود مقادیر y به عدد ۲ نزدیک می‌شوند.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۴$

هرچه مقادیر x کوچکتر شوند مقادیر y به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید:



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

پ) $\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-۲^+} f(x)=-\infty$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

مجانب قائم $x=-2$, $x=3$

مجانب افقی $y=1$, $y=-1$

۳ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۳x+۵}{x-۲} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^۲+۱}{t^۳-۲t^۲+۱} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^2}{t^3} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{t} = 0$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^۲+۲x}{۴x+۱} = \lim \dfrac{-x^2}{4x} = \lim \dfrac{-x}{4} = \mp\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^۳-۲x^۲) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید:

الف) $y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

مجانب قائم $x=3$

مجانب افقی $y=2$

ب) $y=\dfrac{x}{x^۲-۴}$

مجانب قائم $x=2$, $x=-2$

مجانب افقی $y=0$

پ) $y=\dfrac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}$

مجانب قائم $x=1$, $x=-1$

مجانب افقی $y=-2$

ت) $y=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$

مجانب قائم ندارد

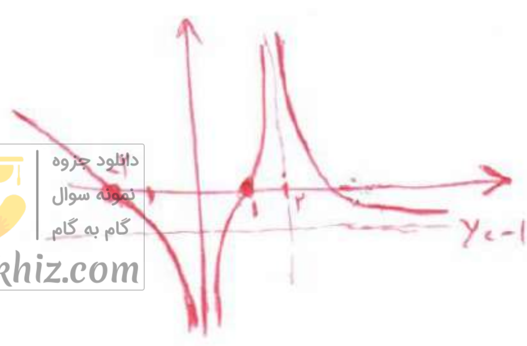
مجانب افقی $y=0$

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $f(۱)=f(-۲)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to۰} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to۲^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.



مشتق

فصل ۴

ماهواره‌بر سیمرغ پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

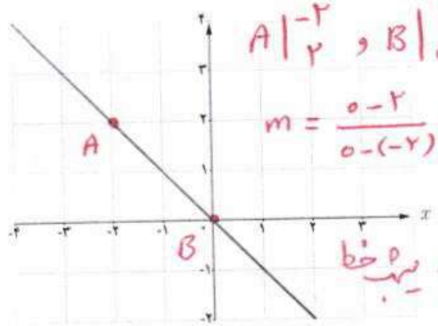
مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

درس ۱
آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

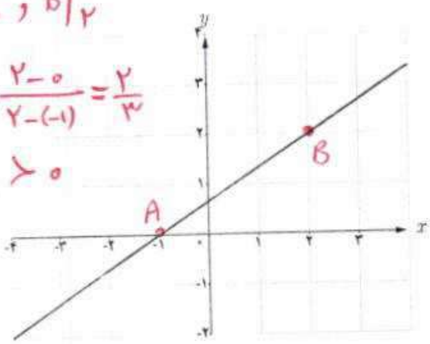
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



$A\big|^{-2}_{2}$ و $B\big|^{0}_{0}$

$m = \frac{0-2}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$

شیب خط < 0



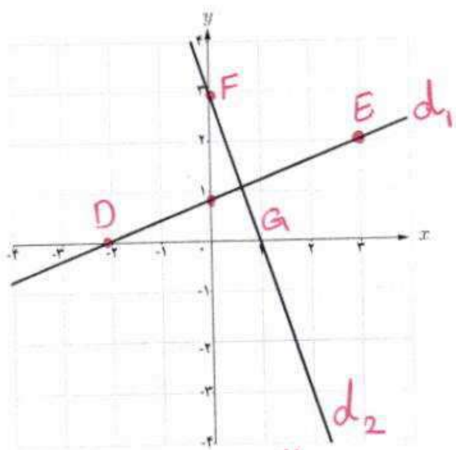
$A\big|^{-1}_{0}$, $B\big|^{2}_{2}$

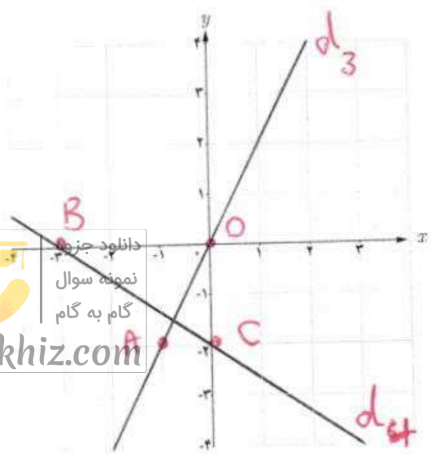
$m = \frac{2-0}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

شیب خط > 0

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

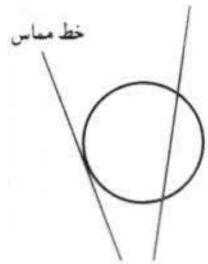
خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$





خط مماس بر یک منحنی

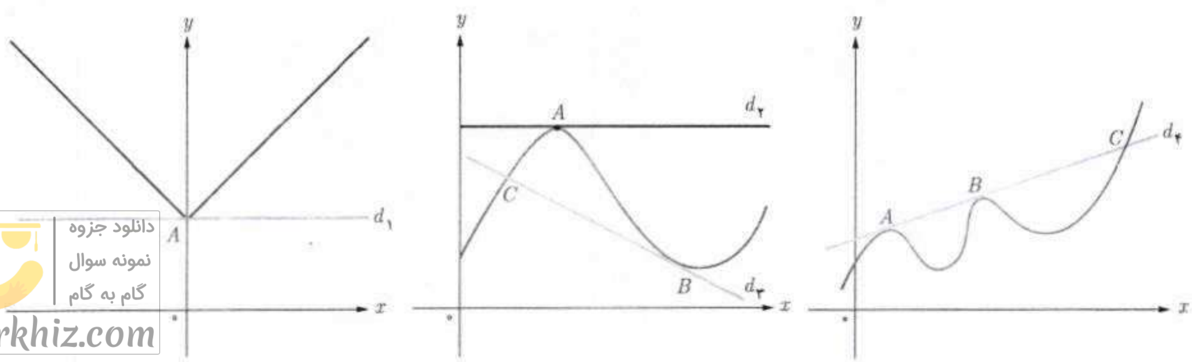
یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.



خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این‌رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایپ نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایپ نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.

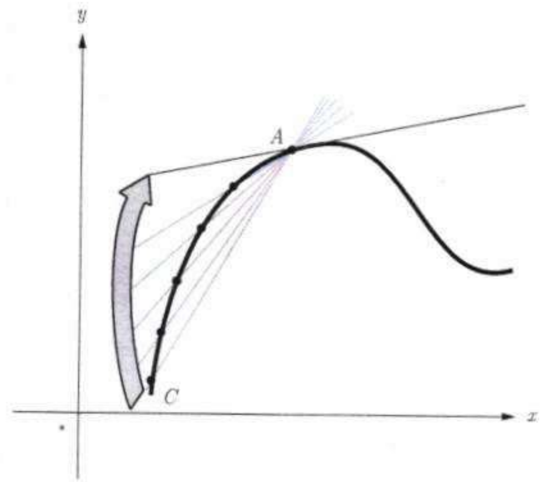


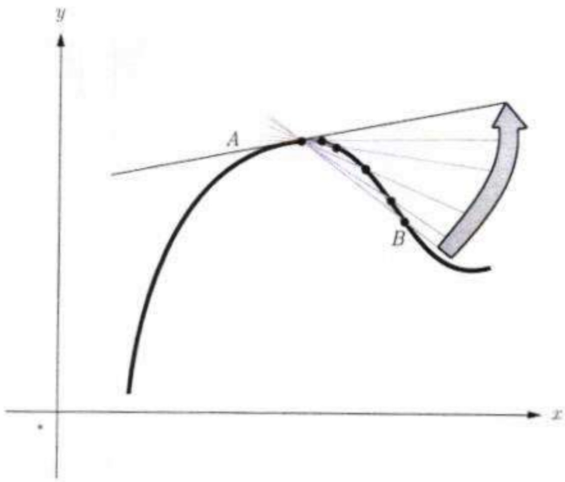
فعالیت

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ خط مماس

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به خط مماس نزدیک می‌شوند. به‌طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.





در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

الف) تابع $f(x)=-x^2+10x$ داده شده است. اگر $0 \le x \le 10$ نقاط $A(2,f(2))$، $B(6,f(6))$، $C(5,f(5))$، $D(4,f(4))$ و $E(3,f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید:

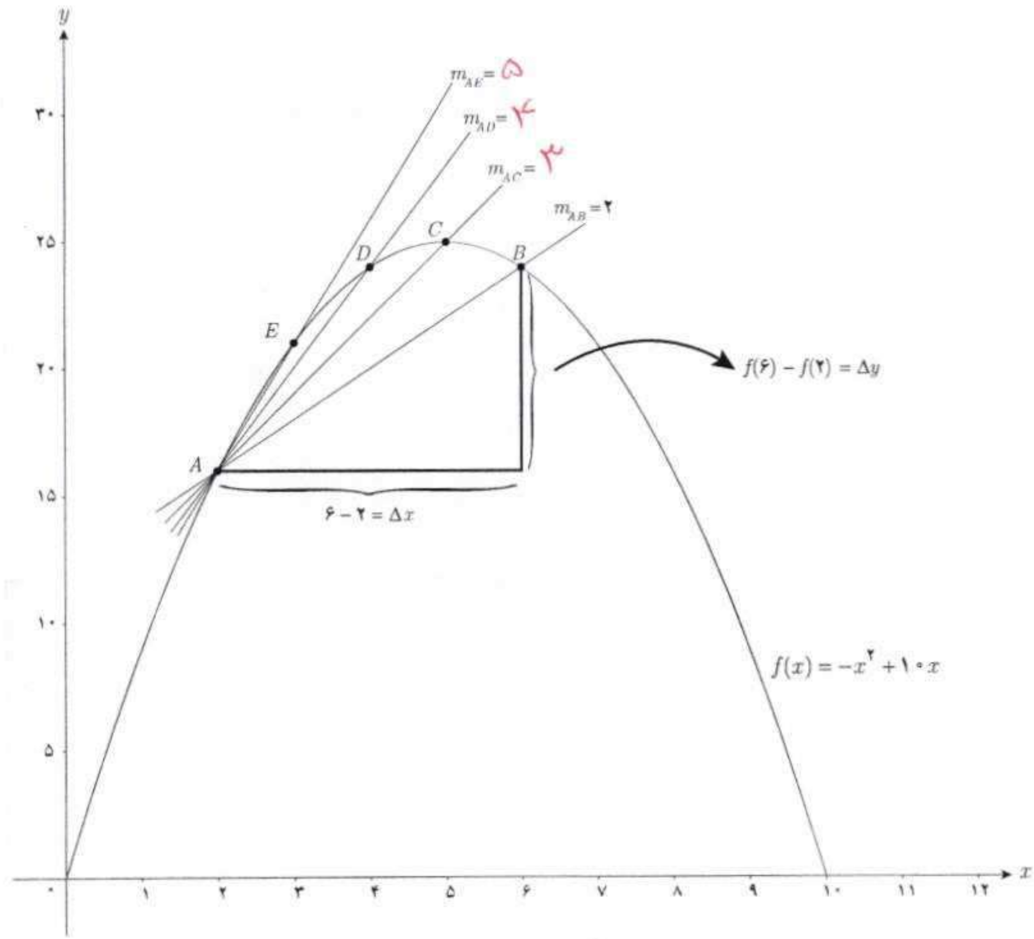
$A\big|_{16}^{2}$ ، $B\big|_{24}^{6}$ ، $C\big|_{25}^{5}$ ، $D\big|_{24}^{4}$ ، $E\big|_{21}^{3}$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{24-16}{4}=\frac{8}{4}=2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{25-16}{5-2}=3$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{\quad}=\frac{24-16}{\quad}=4$$



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

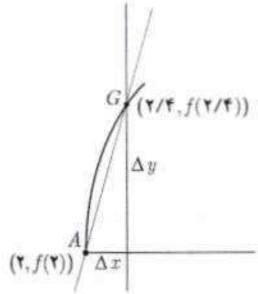
$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$ $\quad$ $\Delta x=۶-۲=۴$ $\quad$ ۶ ـــــــــــ ۲ $\quad$ $[۲,۶]$

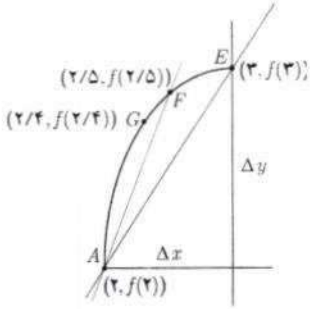
$\Delta y=۲۵-۱۶=۹$ $\quad$ $\Delta x=۵-۲=۳$ $\quad$ ۵ ـــــــ ۲ $\quad$ $[۲,۵]$

$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$ $\quad$ $\Delta x=۴-۲=۲$ $\quad$ ۴ ـــ ۲ $\quad$ $[۲,۴]$

$\Delta y=۲۱-۱۶=۵$ $\quad$ $\Delta x=۳-۲=۱$ $\quad$ ۳ ـ ۲ $\quad$ $[۲,۳]$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^۲+۱۰x$ در فاصله $[۲,۳]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[۲,۲/۴]$ رسم شده است.





$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۵-۱۶}{۲,۴-۲}=\frac{۲,۲۵}{۰/۴}=۵,۶۲۵$$

$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a\,,f(a))$ و $(b\,,f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$[۲,۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۵-۱۶}{۲,۴-۲}=\frac{۲,۲۵}{۰/۴}=۵/۶$
$[۲,۲/۳]$	$\frac{f(۲,۳)-f(۲)}{۲,۳-۲}=\frac{۱۷,۷۵-۱۶}{۲,۳-۲}=\frac{۱,۷۵}{۰/۳}=۵,۸۳$
$[۲,۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
$[۲,۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
$[۲,۲/۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
$[۲,۲/۰۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$
⋮	⋮ ⋮
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\longrightarrow ?$

مقدارهای به دست آمده به ۶ نزدیک می‌شوند.

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که : $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$
کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+10(2+h)-16}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(h^2+4h+4)+20+10h-16}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-4h-\cancel{4}+\cancel{4}+10h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+6)=6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5,2]$، $[1/6,2]$، $[1/7,2]$، $[1/8,2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ ، ۶/۳، ۶/۲، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم : $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

$f(۳) = -(۳)^۲ + ۱۰(۳) = -۹ + ۳۰ = ۲۱$

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(۲) = ۶$. در ادامه $f'(۳)$ برای $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ محاسبه شده است:

$$f'(۳) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-(۳+h)^۲+۱۰(۳+h)-۲۱}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-۹-۶h-h^۲+۳۰+۱۰h-۲۱}{h} = \cancel{\lim \frac{-h + ۴h}{}} = \lim(-$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲+۴h}{h} = \lim_{h\to ۰}(-h+۴) = ۴$$

✤ مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ را در نقطه $A(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

✤ حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد: $f'(۲) = ۶ =$ شیب خط مماس در نقطه A

$A(۲, f(۲)) = (۲, ۱۶)$

$y - ۱۶ = ۶(x-۲) \Rightarrow y = ۶x + ۴$

کار در کلاس

$f(-۲) = (-۲)^۲ + ۳ = ۷$

$f(-۲+h) = (-۲+h)^۲ + ۳ = ۴ - ۴h + h^۲ + ۳ = ۷ - ۴h + h^۲$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^۲ + ۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$f'(-۲) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{۷-۴h+h^۲-۷}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{h(-۴+h)}{h} = \lim_{h\to ۰}(-۴+h) = -۴$$

✤ تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

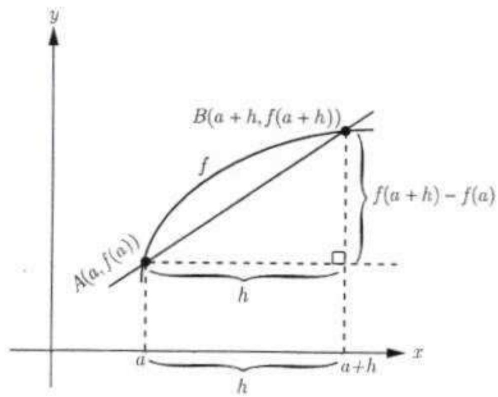
✤ مثال: اگر $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا به‌دست آورید:

$$f'(۲) = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^۲+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x} =$$

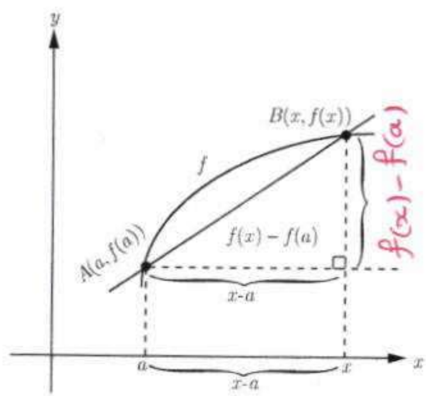
$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^۲-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^۲+۶\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(-\Delta x+۶)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰}(-\Delta x+۶) = ۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به‌صورت: $f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



(الف)



(ب)

با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB\ \text{شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A\ \text{شیب خط مماس بر منحنی در} = \lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB\ \text{شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

✤ مثال : اگر $f(x)=x^۲$ ، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

✤ حل :

روش اول :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^۲-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۶)=۶$$

روش دوم :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

$f(5)=-(5)^2+10(5)=25$ $\quad f'(5)=\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{\dots}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=0$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(راهنمایی: تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید. توجه کنید وقتی که $h\to 0$ آنگاه $x\to a$)

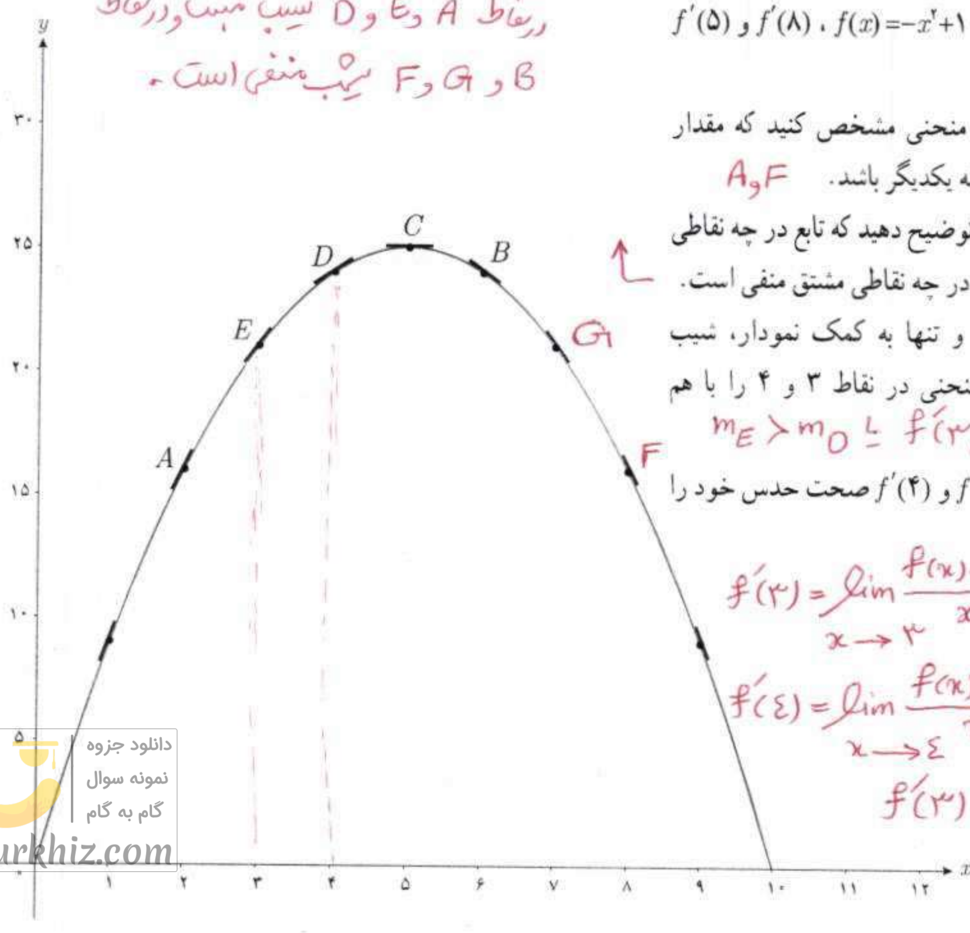
اگر قرار دهیم $a+h=x$ نتیجه می‌گیریم $h=x-a$

حال اگر $h\to 0$ پس $x-a\to 0$ یعنی $x\to a$ لذا

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

کار در کلاس

در نقاط A و E و D شیب مثبت و در نقاط B و G و F شیب منفی است.



بالا

الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. A, F

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. $m_E > m_D$ یا $f'(3)>f'(4)$

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\dots=4$$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\dots=2$$

لذا $f'(3)>f'(4)$

$= \lim (۳x+٤) = ۱۰$

$y - ۹ = ۱۰(x - ۴)$

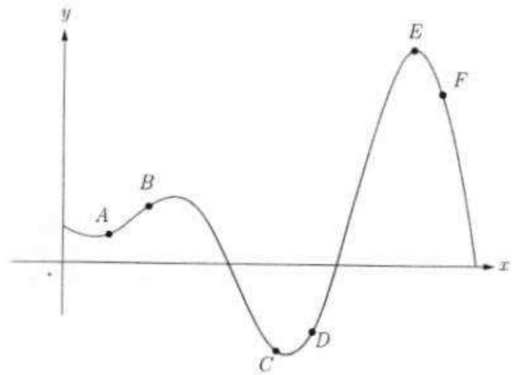
$y - ۹ = ۱۰x - ۲۰ \rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$

معادله خط مماس

تمرین

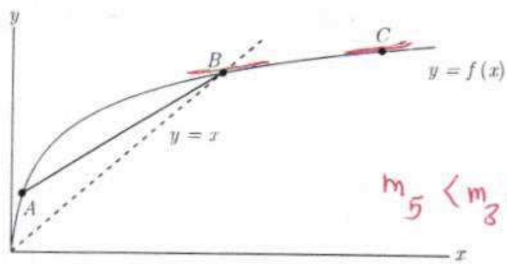
۱ اگر $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱$ ، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
E	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A — m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B — m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C — m_3

ت) شیب خط AB — m_4

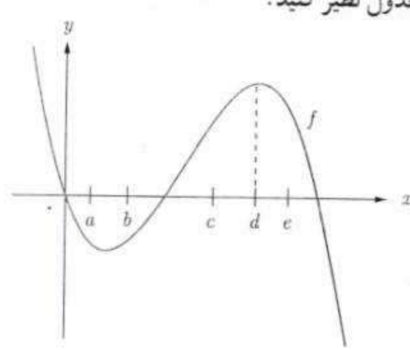
ث) شیب خط $y=۲$ — $m_5 = ۰$

ج) شیب خط $y = x$ — $m_6 = ۱$

$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_۱$ ، $m_۲$ ، ... و $m_۶$ در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	$-۰/۵$
e	-۲

۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

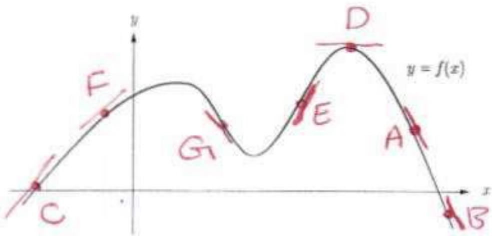
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x)=0$ و $f'(x)>0$

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x)=0$

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1)=f'(x_2)$

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است. $f(x)>0$ و $f'(x)<0$



۶ اگر $f(x)=x^3-2$، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$f(-1)=-3$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست مثلاً در نقطه F شیب منفی است.

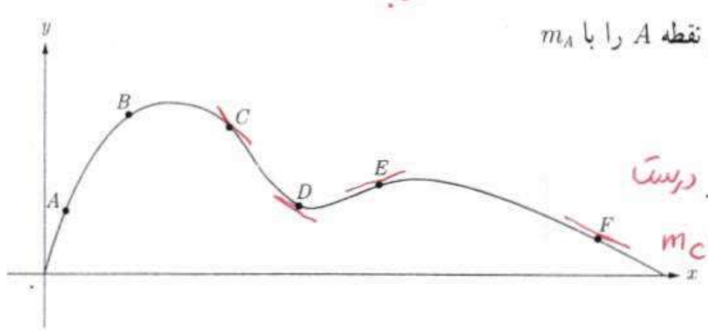
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست

پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ نادرست $m_C<m_D<m_F$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست

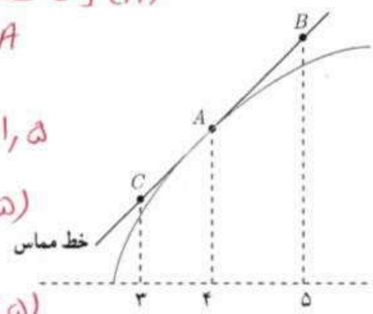


۸ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.

$$\text{شیب} = \frac{f(B)-f(A)}{x_B-x_A} = \frac{f(C)-f(A)}{x_C-x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B)-۲۵}{۱} = \frac{f(C)-۲۵}{-۱} = ۱/۵$$

$$\begin{cases} f(B)=۲۶/۵ \rightarrow B(۵, ۲۶/۵) \\ f(C)=۲۳/۵ \rightarrow C(۳, ۲۳/۵) \end{cases}$$



۹ در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $j-s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $s \cdot j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

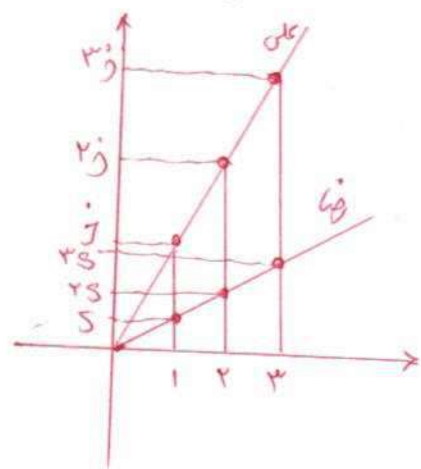
پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $s \cdot j$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ثانیه	۱	۲	۳	n
علی	j	۲j	۳j	nj
رضا	s	۲s	۳s	ns

از آنجا که $\frac{j}{s}$ ثابت است. پس می‌توان گفت که علی $\frac{j}{s}$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_\circ) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

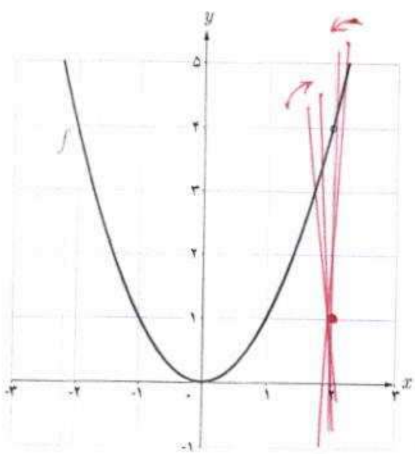
در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(۲)$ وجود ندارد؟

زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه‌ی $x=۲$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصربفردی میل نمی‌کند.

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x = ۲$ تعریف مشتق f در $x = ۲$ را به‌کار گیریم :

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۲} =$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \to 2$، داریم :

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

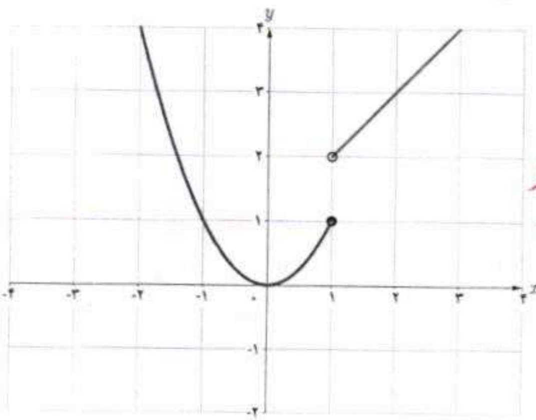
بنابراین $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.
بله

کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه‌ی $x=1$ می‌گذرند، به عدد حقیقی و منحصر بفردی میل نمی‌کند. همچنین



$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2 \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد.

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=۰.f'(a)=۰$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=۰$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

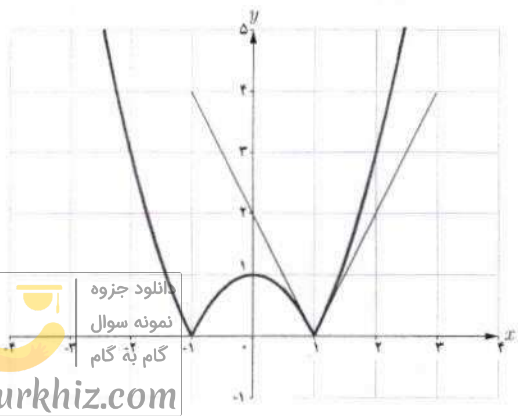
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}$$

برای محاسبه $f'(۱)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}=-۲$$



بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=۱$ می‌نامیم و با $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل f در $x=۱$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت:

شیب نیم‌مماس چپ $= f'_-(۱)$

شیب نیم مماس راست $= f'_+(۱)$

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

$y-۰=۲(x-۱)$ یا $y=۲x-۲$ ، $x\geq ۱$ نیم مماس راست

$y-۰=-۲(x-۱)$ یا $y=-۲x+۲$ ، $x\leq ۱$ نیم مماس چپ

می‌باشند.

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید. پاسخ صفحه

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{|x^۲-1|-f(-1)}{x+1} \begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$$

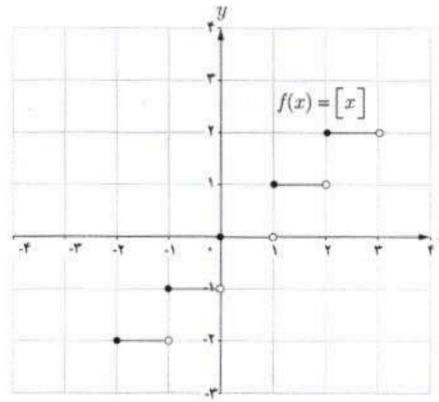
$$① \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x^۲+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}-(x-1)=۲ \Rightarrow f'_+(-1)=۲$$

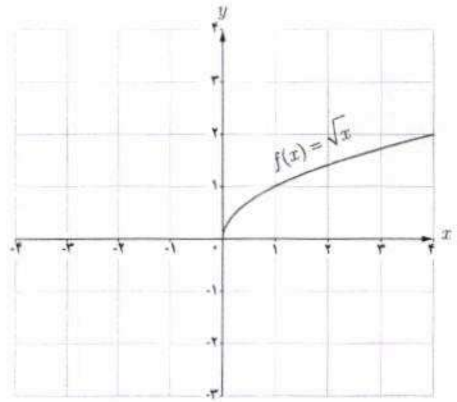
معادله نیم مماس راست

$$\to y-۰=۲(x+1)\to y=۲x+۲ \quad x>-1$$

$$② \lim \frac{x^۲-1}{\ldots}=\lim(x-1)=-۲ \Rightarrow f'(-1)=-۲$$

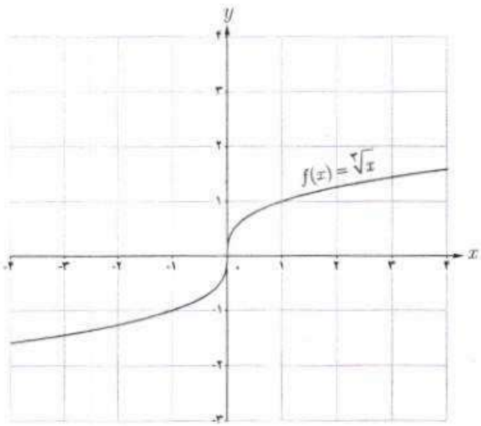
❖ مثال : توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(\circ)$ و $g'(\circ)$ موجود نیستند.





اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

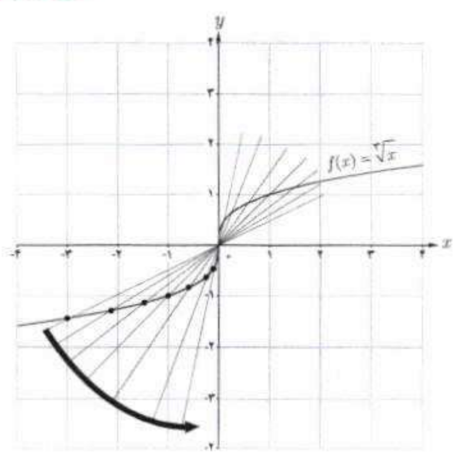
❖ مثال : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=\circ$ بررسی کنید.

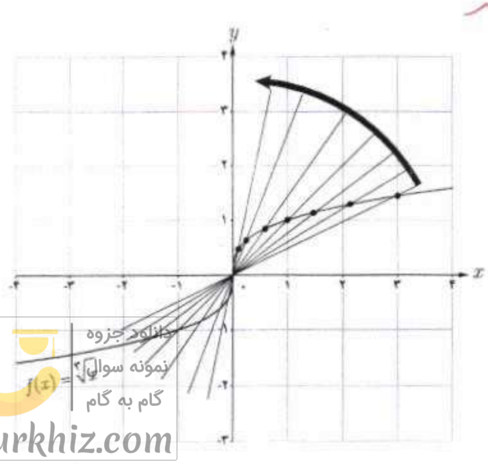


$$'(\,) = \lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}\;\;\circ}{x} = \lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to\circ}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=\circ$ نزدیک‌ می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=\circ$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.





اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1].

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

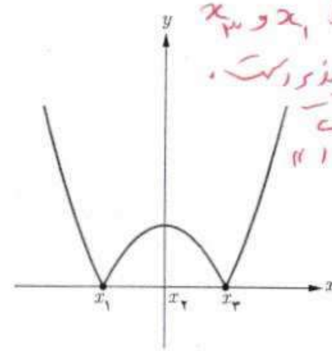
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

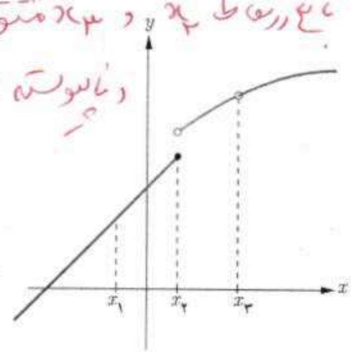
کار در کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

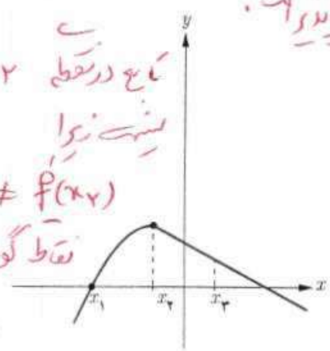
تابع در نقاط x_1 و x_3 مشتق ناپذیر است. (نقاط گوشه‌ای)



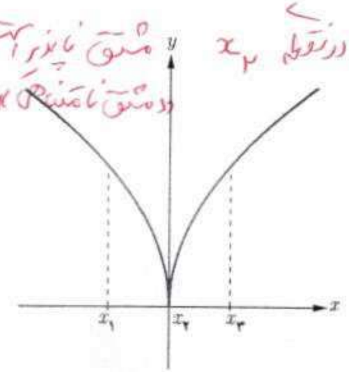
تابع در نقاط x_2 و x_3 مشتق ناپذیر است. (ناپیوسته)



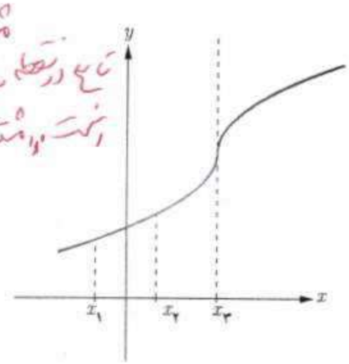
تابع در نقطه x_2 مشتق پذیر نیست زیرا $f'_+(x_2)\neq f'_-(x_2)$ نقاط گوشه‌ای



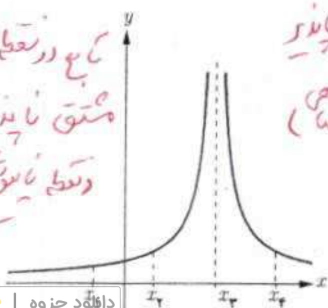
تابع در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (دو مشتق نامتناهی)



تابع در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است، (دو مشتق نامتناهی)



تابع در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است. (نقطه ناپیوستگی)

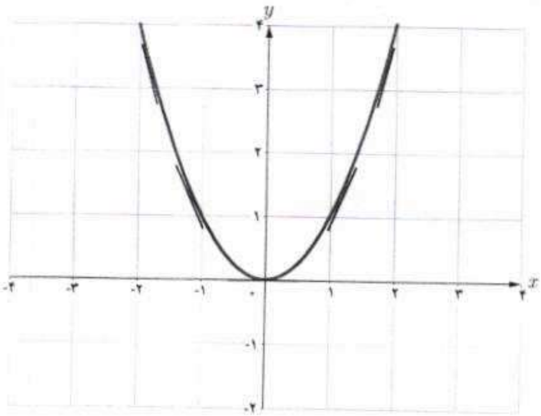


۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x) = x^{۲}$ را درنظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$	-۶	-۴	-۲	۰	۱	$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲) = \lim_{x\to -۲} \frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x^{۲}-۴}{x+۲} = \lim_{x\to -۲} (x-۲) = -۴$$

$$f'(\sqrt{۳}) = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{f(x)-f(\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}} = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{x^{۲}-۳}{x-\sqrt{۳}} = \lim_{x\to \sqrt{۳}} \frac{(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x^{۲}}{x} = ۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^{۲}$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x) = x^۲$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(x+h)^۲ - x^۲}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{x^۲ + ۲hx + h^۲ - x^۲}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h(۲x+h)}{h} = \lim_{h \to ۰}(۲x+h) = ۲x$$

بنابراین $f'(x) = ۲x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^۲$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

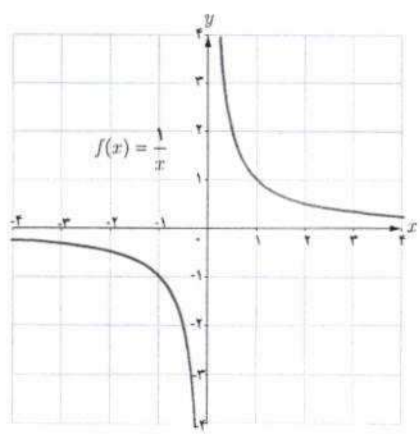
$$f'(-\frac{۱}{۵}) = -\frac{۲}{۵} \;,\; f'(\sqrt{۷}) = ۲\sqrt{۷} \quad \text{و} \quad f'(۵۰) = ۱۰۰$$

مثال : اگر $f(x) = \frac{۱}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(۳)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x = ۳$.

حل : $f'(۰)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{۰\}$ است. اگر $x \neq ۰$ داریم :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\frac{۱}{x+h} - \frac{۱}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to ۰} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to ۰} \frac{-۱}{x(x+h)} = -\frac{۱}{x^۲}$$



با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(۳)=\frac{-۱}{۹}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر $(x\neq ۰)$ را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{۵})=\frac{-۱}{۵}$ و $f'(-۲)=-\frac{۱}{۴}$ ، $f'(۳)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳-x}{۳x}}{\frac{x-۳}{۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{۳x\cancel{(x-۳)}}=-\frac{۱}{۹}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

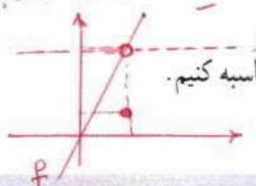
کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ دامنهٔ f و دامنهٔ f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 1\}\cup\{1\}=\mathbb{R}$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته نیست. لذا $f'(1)$ وجود ندارد. $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=\begin{cases}۵ & x\neq 1\\ \text{تعریف نشده} & x=1\end{cases}$



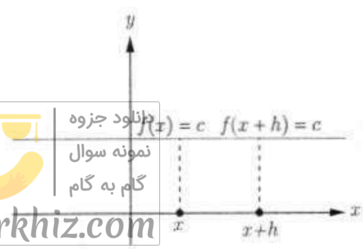
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

به‌طور مثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.



۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه: $f'(x)=nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x)=x^2$، آن‌گاه $f'(x)=2x$. همچنین اگر $f(x)=x^3$، به‌کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x)=3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x)=x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)=x^3$ داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^2+x(x+h)+x^2\right]=x^2+x^2+x^2=3x^2$$

اکنون اگر $f(x)=x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\ \text{بار}}=nx^{n-1}$$

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه: $f'(x)=nx^{n-1}$.

مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم:
$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

۴* اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\,(k\in\mathbb{R})$ ، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}\,(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

✤ **مثال** : مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$ پ) $h(x)=\frac{x}{۲x^۲+x-۱}$

$f'(x)=\frac{-1}{(x-4)^2}$ $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5)+\sqrt{x}(6x)$ $h'(x)=\frac{1(2x^2+x-1)-(4x+1)x}{(2x^2+x-1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

$(f\cdot g)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=5\times 8+(-6)\times 3=22$

$(\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\frac{5\times 8-(-6)\times 3}{(8)^2}=\frac{29}{32}$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم: $f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

✤ **اثبات:** با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(\sin x\frac{\cos h-۱}{h})+\lim_{h\to ۰}(\cos x\frac{\sin h}{h})=0+\cos x=\cos x$$

در حسابان (۱) دیدیم که: $\lim_{h\to ۰}\frac{\cos h-۱}{h}=۰\ ,\ \lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$

بنابراین: $f'(x)=(\sin x)(۰)+(\cos x)(۱)$ و در نتیجه $f'(x)=\cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x)=\cos x$ داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)-\sin x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{(\cos h-۱)}{h}-\lim_{h\to ۰}\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$
$$=(\cos x)(۰)-(\sin x)(۱)=-\sin x\ \Rightarrow\ g'(x)=-\sin x$$

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به‌دست آورد.

✤ **مثال :** مشتق $f(x)=\tan x$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin x\tan x$ ب) $g(x)=\dfrac{5\cos x}{1-\sin x}$

$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x(1+\tan^2 x)$ $g'(x)=\dfrac{-5\sin x(1-\sin x)-(-\cos x)(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

✤ **مثال :** اگر $h(x)=(x^2+3x+1)^7$، مطلوب است $h'(x)$.

✤ **حل :** اگر $f(x)=x^7$ و $g(x)=x^2+3x+1$. آن‌گاه : $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))=(2x+3)f'(g(x))$$

اگر $u=g(x)$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)=u^7\Rightarrow f'(u)=7u^6=7(g(x))^6=7(x^2+3x+1)^6$$

بنابراین :

$$h'(x)=(2x+3)(7)(x^2+3x+1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد،

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

✤ **مثال :** مشتق تابع $y=\sin^2 x$ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** با فرض $u=\sin x$ داریم : $y=u^2$ و از آنجا :

$$y'=u'\cdot 2u=(\cos x)(2)(\sin x)=2\sin x\cos x$$

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^۲+۱)^۳(۵x-۱)$

$f'(x) = ۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۵x-۱) + (x^۲+۱)^۳(۵)$

ب) $g(x) = \cos^۳ x$

پ) $h(x) = \sin(۳x^۲+۵)$

$g'(x) = -۳\sin x \cos^۲ x$

$h'(x) = ۶x \cos(۳x^۲+۵)$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

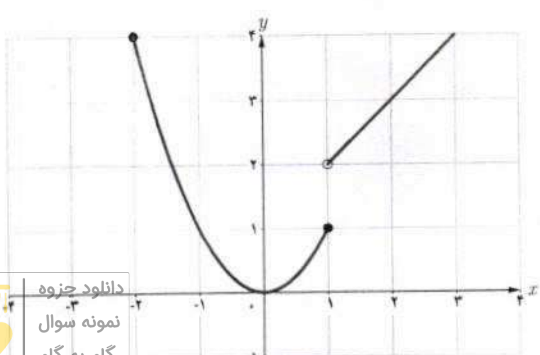
تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.
تابع f روی بازه $[a, b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه‌ی $(a و b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه $(a, b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه‌ی $(a و b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

✤ مثال : تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & -۲ \le x \le ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.



f روی بازه‌های $[-۲, ۱]$ و $(۱, \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[۱, ۲]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه‌ی (۱ و ۲) مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد، لذا

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-۱\,,۱]$، $(۲\,,۵)$ و $[-۲\,,۰]$ بررسی کنید.

$f'_+(-۱) = -۲$ و $f'_-(۱) = ۲$

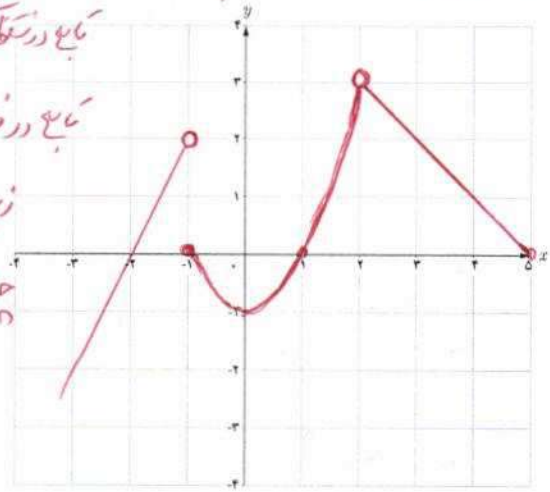
تابع در بازه $[-۱,۱]$ مشتق پذیر است.

تابع در بازه $(۲,۵)$ مشتق پذیر است.

تابع در فاصله $[-۲,۰]$ مشتق پذیر نیست

زیرا تابع در فاصله $[-۲,۰]$ پیوسته نیست.

چون تابع در $x=-۱$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.



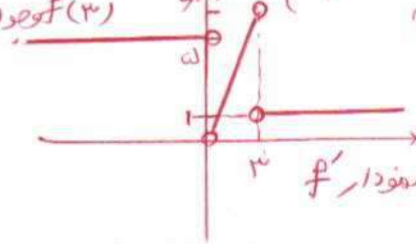
مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال : اگر $y = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱$ آن‌گاه :

$$y' = ۱۲x^۳ + ۴x \quad , \quad y'' = ۳۶x^۲ + ۴$$

$f_{+}(3)=1$, $f_{-}(3)=6$ → $f'(3)$ وجود ندارد　　$x>3$

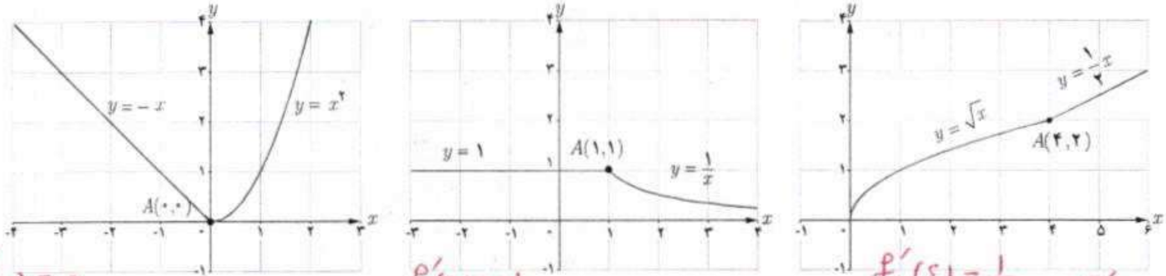


تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

$f(x)=|x-2|$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ x+2 & x\geq 2 \end{cases}$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.

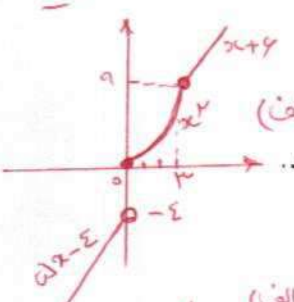


(الف)
$f'_{+}(0)=0$
$f'_{-}(0)=-1$ → $f'(0)$ وجود ندارد.

(ب)
$f'_{+}(1)=-1$
$f'_{-}(1)=0$ → $f'(1)$ وجود ندارد

(پ)
$f'_{+}(4)=\frac{1}{4}$
$f'_{-}(4)=\frac{1}{4}$ → $f'(4)$ وجود ندارد.

۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x\leq 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.



الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ← بالا

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند. ← بالا

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

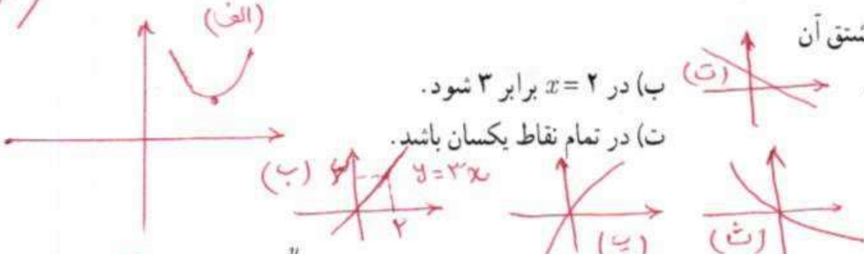
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

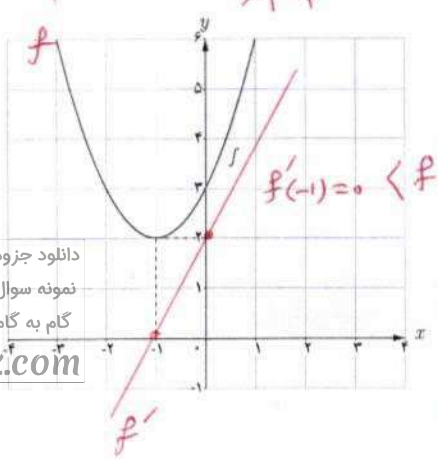
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.



۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

$f'(-1)=0 < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^2+2x+3$ بررسی کنید.

$f'(x)=2x+2$

$f'(2)=6$

$f'(-1)=0$, $f'(0)=2$, $f'(3)=8$

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=4$ ، $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است. پس در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$f(x)=3x$ ، $g(x)=3x+1$ ، $h(x)=3x-4$

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

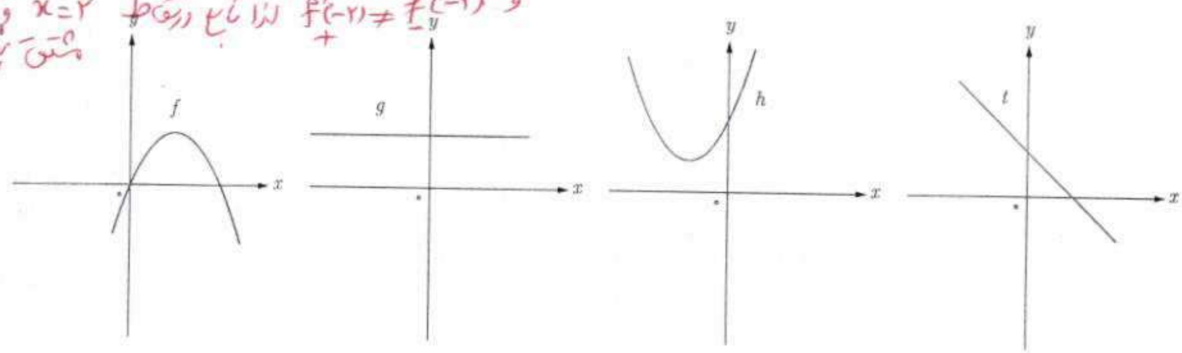
$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<-2 \\ -(x^2-4) & -2\leq x\leq 2 \\ x^2-4 & x>2 \end{cases}$

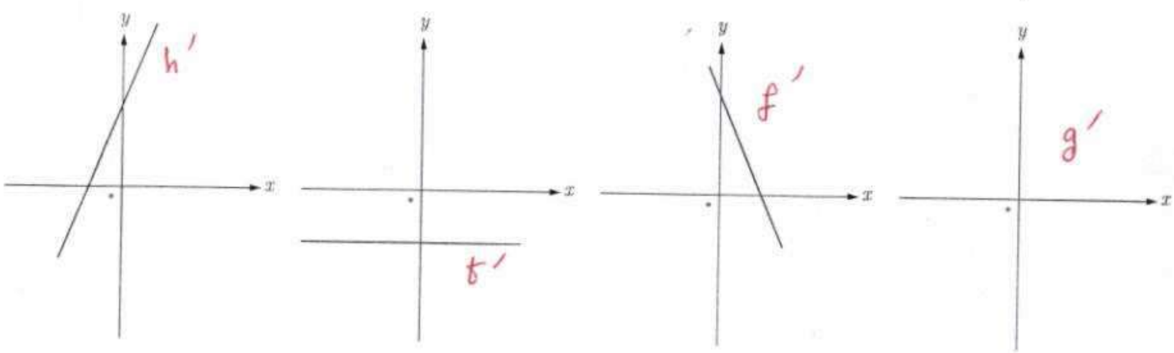
$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-2 \\ -2x & -2<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$

$f'_+(2)=4$, $f'_-(2)=-4$ و $f'_+(-2)=4$, $f'_-(-2)=-4$

چون $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ و $f'_+(-2)\neq f'_-(-2)$ لذا تابع در نقاط $x=-2$, $x=2$ مشتق پذیر نیست.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.

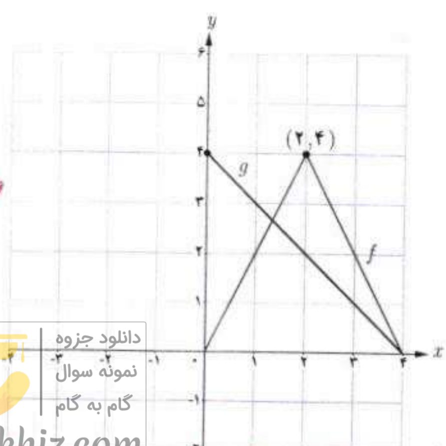




۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)\,.\,g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$



$f'(1)=2$
$g'(1)=-1$
$f'(2)=$ وجود ندارد
$g'(2)=1$
$f'(3)=-2$
$g'(3)=-1$

$k'(1)=\dfrac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{(g(1))^2}=\dfrac{2\times 3-(-1)2}{(3)^2}=\dfrac{8}{9}$

$k'(2)=$ وجود ندارد چون $f'(2)$ وجود ندارد.

$h'(1)=f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=2\times 3+(-1)\times 2=4$

$h'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=$ وجود ندارد چون

۱۱ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ ، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$ مطلوب است.

$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$

$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3\times 3+2\times 5=19$

۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1 \\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x-0}=0 \end{aligned}\right\} \to f'_+(0)\neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)=$$ وجود ندارد

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

$f'(x)=6x(2x-5)^3+3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

$f'(x)=\dfrac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

پ) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1)+3x^2\sqrt{3x+2}$

ت) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$f'(x)=\dfrac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$

$f'(x)=3\cos x\sin^2 x-2\sin x\cos x$

ب) $f(x)\ \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$?

$f'(x)=\dfrac{3\cos 3x\sin 2x-2\cos 2x\sin 3x}{\sin^2 2x}$

? $\tan^2 x$

پ) $f(x)=\mathrm{tg}^2 x-2\cos x$

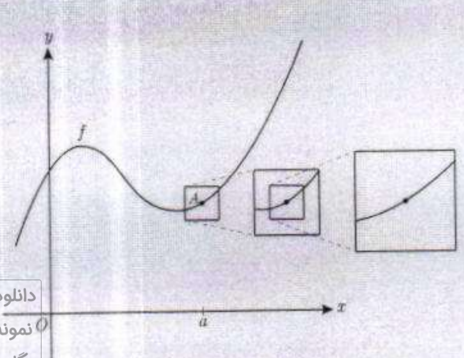
$f'(x)=2(1+\tan^2 x)\tan x+2\sin x$

ت) $f(x)=\sin x\cos 2x$

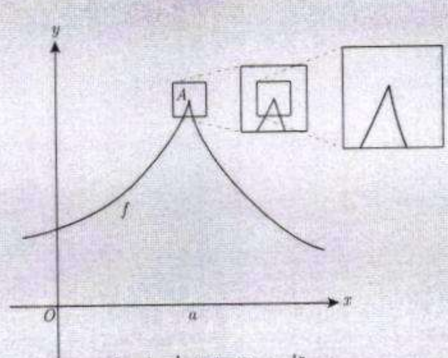
$f'(x)=\cos x\cos 2x-2\sin 2x\sin x$

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ $A(a\,,\,f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطهٔ A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر است.

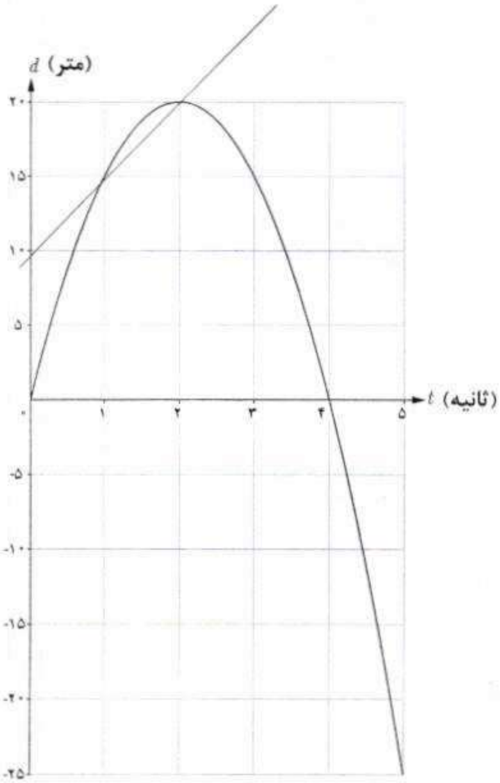


تابع در a مشتق‌پذیر نیست.

درس ۳
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $\frac{۲۸۰}{۴} = ۷۰$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



❖ مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t)=-۵t^۲+۲۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰\leq t\leq ۵$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان ـ زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=۱$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=۲$ و $t=۳$ چقدر است؟

❖ حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۲] = \frac{d(۲)-d(۱)}{۲-۱}=\frac{۲۰-۱۵}{۱}=۵\,\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۱/۵] = \frac{d(۱/۵)-d(۱)}{۱/۵-۱}=\frac{۱۸/۷۵-۱۵}{۰/۵}=\frac{۳/۷۵}{۰/۵}=۷/۵\,\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۱/۴] = \frac{d(۱/۴)-d(۱)}{۱/۴-۱}=\frac{۱۸/۲-۱۵}{۰/۴}=\frac{۳/۲}{۰/۴}=۸\,\frac{m}{s}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=۱$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-۱۰t+۲۰$ ، پس ، $d'(۱)=۱۰$

ت) $d'(۳)=-۱۰$ ، $d'(۲)=۰$

سرعت در لحظه $t=2$، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به‌جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h]$$

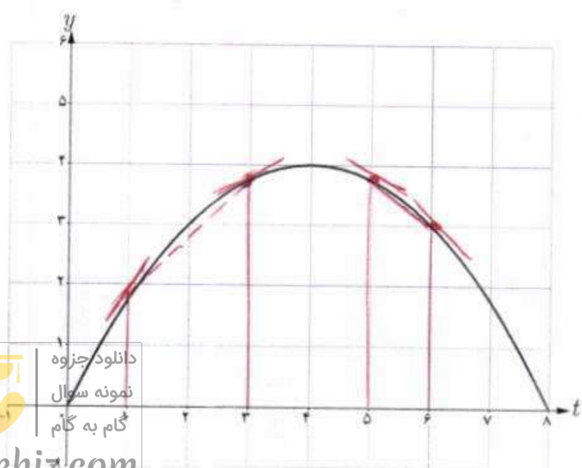
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظر اند.

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:
(محاسبهٔ عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

F<B<E<D<A<C

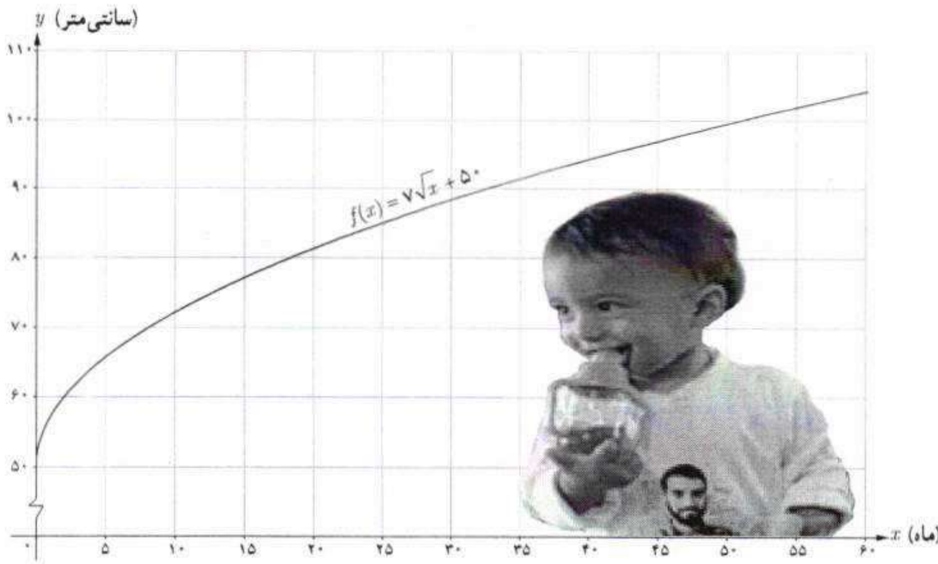
کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۶۰]$ چنین است :

$$\frac{f(۶۰)-f(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۷\sqrt{۶۰}+۵۰-۵۰}{۶۰}\approx ۰/۹\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۲۵]$ چقدر است؟

$\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵-۰}=\frac{۷\sqrt{۲۵}+۵۰-۵۰}{۲۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

$f'(x)=\frac{۷}{۲\sqrt{x}}$

$f'(۲۵)=\frac{۷}{۲\sqrt{۲۵}}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$ $\quad f'(۴۹)=\frac{۷}{۲\sqrt{۴۹}}=\frac{۷}{۱۴}=۰/۵\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$ $\quad f'(۲۵)>f'(۴۹)$

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

آهنگ متوسط $=\frac{f(۳۶)-f(۱۶)}{۳۶-۱۶}=\frac{۹۵-۸۰}{۲۰}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ سانتی‌متر

نرخ باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹ , ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹ , ۱۳۶۴] را به‌دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

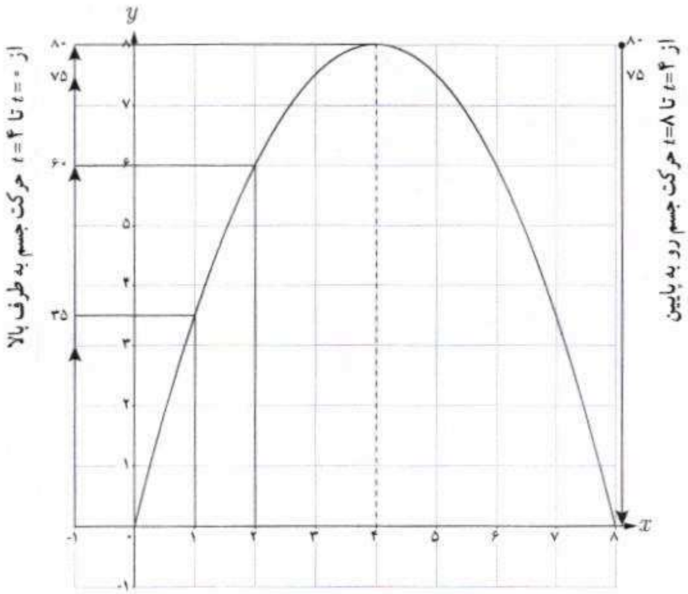
$$\frac{f(۱۳۷۹)-f(۱۳۶۴)}{۱۳۷۹-۱۳۶۴}=\frac{۲,۲-۶,۲}{۱۵}=\frac{-۴}{۱۵}=-۰/۲۷$$

میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



✤ **مثال :** جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی [۰,۲] , [۱,۲] , [۲,۳] و [۳,۴] را به ترتیب با $v_۱$, $v_۲$, $v_۳$ و $v_۴$ نمایش دهیم، داریم :

$$v_۱=\frac{h(۲)-h(۰)}{۲-۰}=\frac{۶۰}{۲}=۳۰\,\text{m/s} \qquad v_۲=\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=۲۵\,\text{m/s}$$

$$v_۳=\frac{h(۳)-h(۲)}{۳-۲}=\frac{۷۵-۶۰}{۱}=۱۵\,\text{m/s} \qquad v_۴=\frac{h(۴)-h(۳)}{۴-۳}=\frac{۸۰-۷۵}{۱}=۵\,\text{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ ، $t=۳$ و $t=۴$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$h(t)=-۵t^۲+۴۰t \Rightarrow h'(t)=-۱۰t+۴۰$$

$$h'(۱)=۳۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۲)=۲۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۳)=۱۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۴)=۰\,\text{m/s}$$

در $t=۴$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه [۴,۵] برابر $\frac{h(۵)-h(۴)}{۵-۴}=\frac{۷۵-۸۰}{۱}=-۵\,\text{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=۵$ برابر $h'(۵)=-۱۰\,\text{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

هنگام پرتاب $t=0 \Rightarrow h'(0)=40\ m/s$

هنگام برخورد به زمین $t=8 \Rightarrow h'(8)=-40\ m/s$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی [۵,۸] به‌دست آورید.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{h(8)-h(5)}{8-5} = \frac{0-75}{3} = -25\ m/s$$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵- m/s است.

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = h'(t) = -10t+40$$

$35 = -10t+40 \rightarrow t = 0.5\ s$

$-35 = -10t+40 \rightarrow t = 7.5\ s$

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

الف) $\frac{T(12)-T(8)}{12-8} = \frac{19-11}{4} = 2$ ب) $\frac{T(18)-T(12)}{18-12} = \frac{9-19}{6} = -\frac{5}{3}$

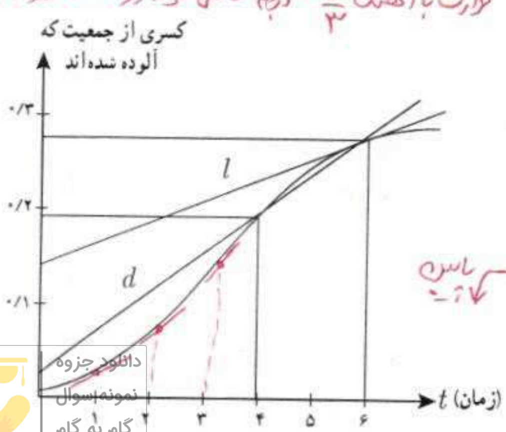
آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

پ) در بازه‌ی زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ ظهر، درجه حرارت با آهنگ ۲ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال افزایش است. اما در بازه‌ی زمانی ساعت ۱۲ ظهر تا ساعت ۱۸ درجه حرارت با آهنگ $\frac{5}{3}-$ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال کاهش است.



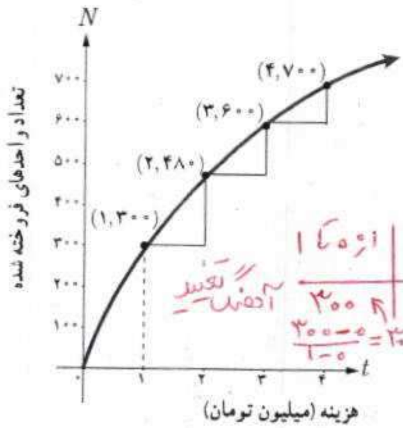
۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند. ← پاسخ پایین

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

الف) شیب خط l ، آهنگ تغییر لحظه‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه‌ی $t=6$ و شیب خط d آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله‌ی زمانی $t=4$ تا $t=6$ را نشان می‌دهد.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

از ۰ تا ۱	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۴
۳۰۰	۱۸۰	۱۲۰	۱۰۰

آهنگ تغییر

$\frac{300-0}{1-0}=300$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟ زیرا با افزایش هزینه، تعداد کالاهای فروخته شده کم می‌شود و رشد کمتری دارد. خریدارها کم می‌شوند.

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4$ سرعت لحظه‌ای $=2t-1$ $\quad 2t-1=4 \to t=2.5\,s$

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

$\frac{f(0.4)-f(0.3)}{0.1}=12\,m/s$

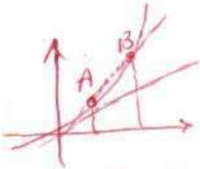
$\frac{f(0.5)-f(0.4)}{0.1}=11\,m/s$ $\quad f'(0.4)=11.5\,m/s$

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s ب) ۱۴/۹۱m/s ج) ۱۱/۵m/s ✓ د) ۱۶/۰۳m/s

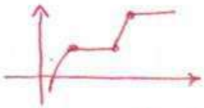
۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(0)\approx -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
$f'(x)$ مقدار تقریبی	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۴	×



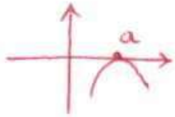
۷ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. نادرست



ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$ نادرست



$f(a)=f'(a)=0$

مثلاً $y=(x-1)^2$

$a=1$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

$\frac{m(4)-m(3)}{4-3}=\frac{130-\sqrt{3}-54}{1}\cong 74.3\,g$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \longrightarrow m'(3)\cong 54.3\,g$

۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

الف) $\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=39.204-40=-0.796$ لیتر

ب) $\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=-0.4$ آهنگ متوسط

آهنگ لحظه‌ای $V'(t)=-0.8(1-\frac{t}{100})$

$\rightarrow -0.8(1-\frac{t}{100})=-0.4$

$\rightarrow 1-\frac{t}{100}=\frac{1}{2}\rightarrow t=50\,s$

کاربردهای مشتق

فصل ۵

گردنه حیران (اردبیل)

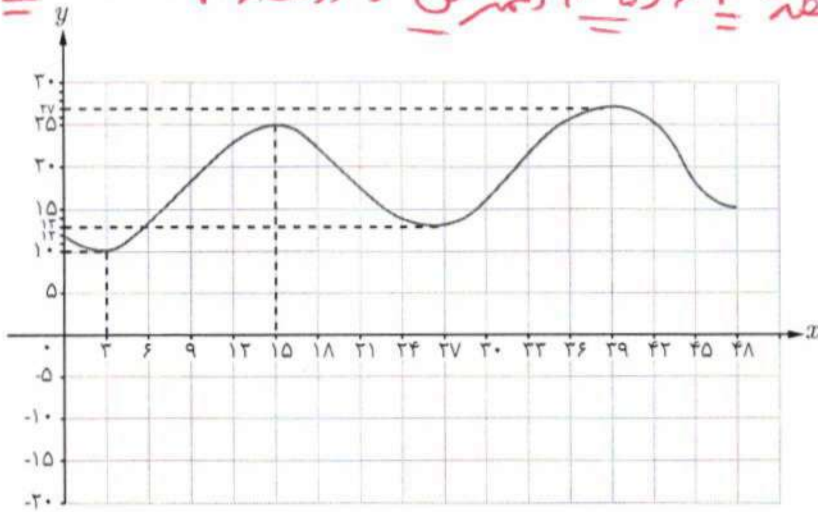
سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

درنقطه‌ی ۳ ، دما ۱۰ را کمترین و درنقطه‌ی ۳۹ ، دما ۲۷ و بیشترین



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.
نقاط به طول ۳ و ۲۷ به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت:

تعریف:
اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که
الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.
ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵ , ۱۵) و (۲۷ , ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۵$ و $x = ۳۹$ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۱۰ , ۳) و (۱۳ , ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۰$ و $x = ۱۳$ اتفاق افتاده‌اند.

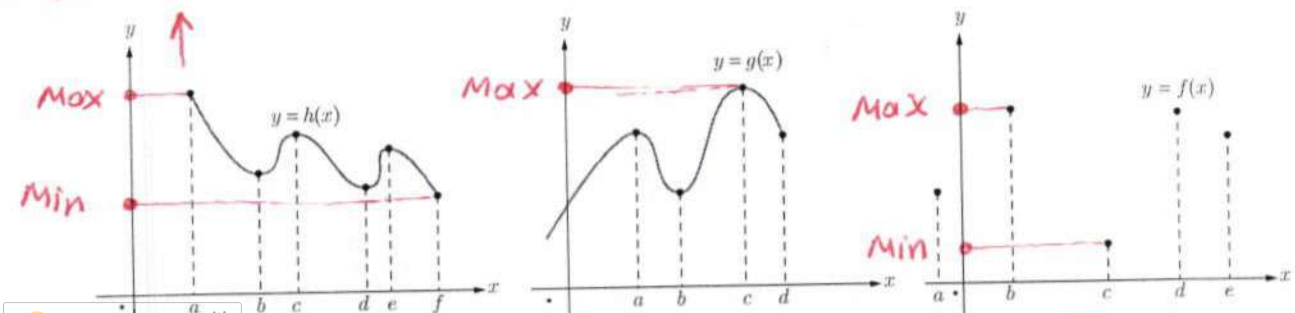
در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \le f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

✤ تذکر : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

x=a ماکزیمم مطلق



(پ) مینیمم مطلق x = f ←

(ب) مینیمم مطلق ندارد

x = c ، ماکزیمم مطلق

(الف) x = b ماکزیمم مطلق

x = c ⇐ مینیمم مطلق

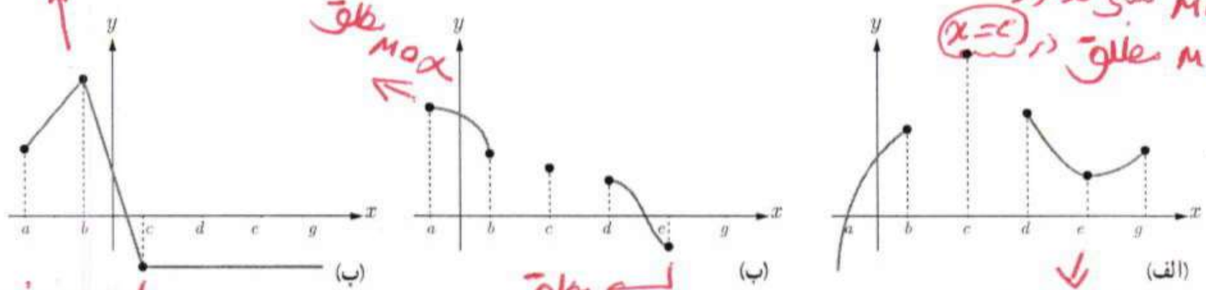
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

Max مطلق و نسبی

Max نسبی ندارد

Max مطلق در $x=c$

Max مطلق



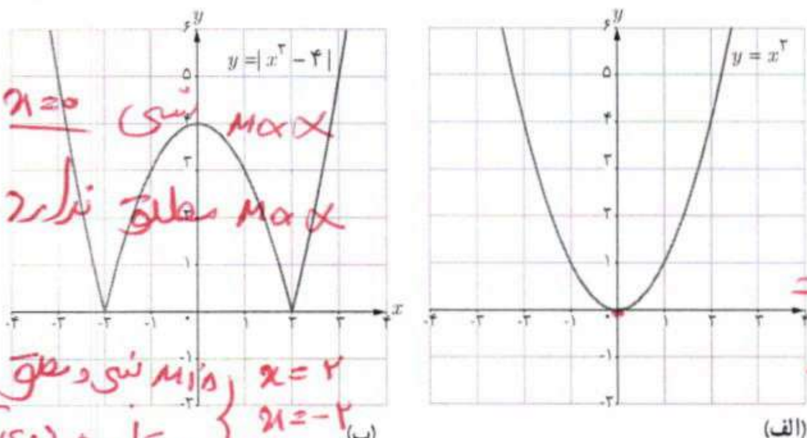
min مطلق و نسبی

Min مطلق

Min نسبی

Min مطلق ندارد

۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.



$x=0$ و برابر ۴

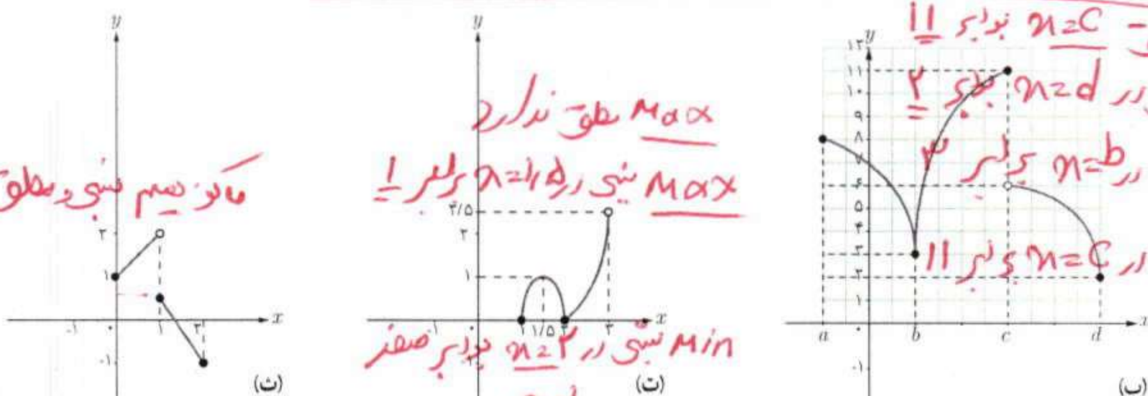
Max نسبی

Max مطلق ندارد

Min نسبی و مطلق $x=2$، $x=-2$ و مقدار هر دوی آنها صفر است

Min نسبی و Min مطلق $x=0$ و مقدار برابر صفر است

Max نسبی و مطلق ندارد



Max مطلق $x=c$ برابر ۱۱

Min مطلق در $x=d$ برابر ۲

Min نسبی در $x=b$ برابر ۳

Max نسبی در $x=c$ برابر ۱۱

Max مطلق ندارد

Max نسبی در $x=1/5$ برابر ۱

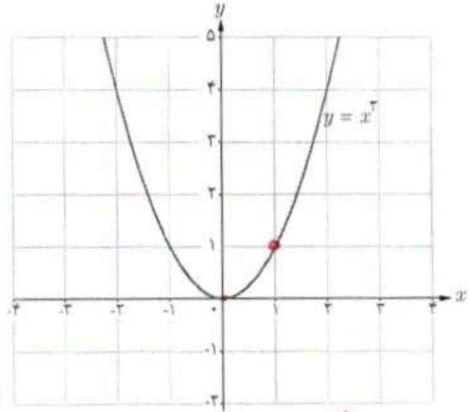
Min نسبی در $x=2$ برابر صفر

Min مطلق در $x=1$، $x=2$ برابر صفر

ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد

Min مطلق (۳,-۱) است

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۴ , ۲) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۱ , ۵) مینیمم نسبی دارد.



۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

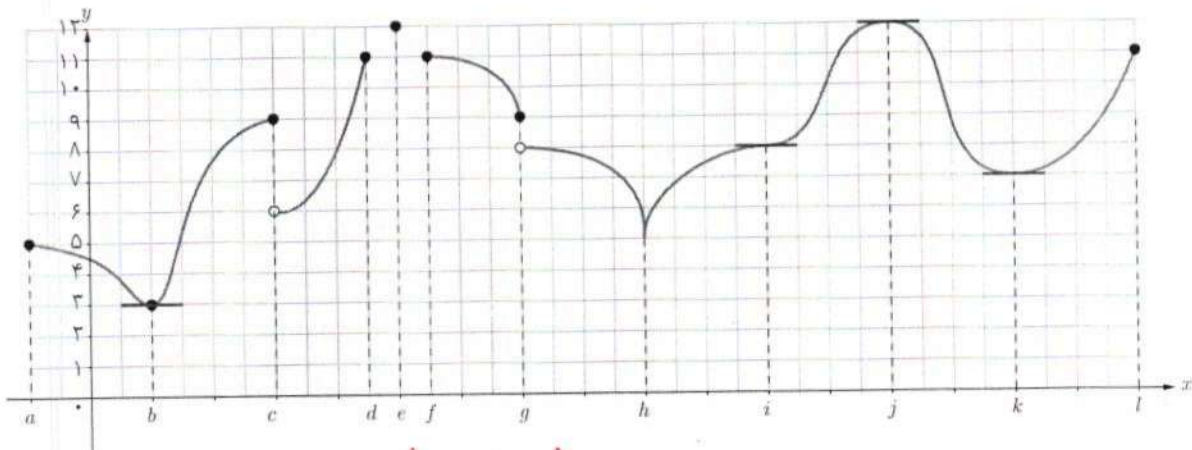
ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

الف) در $[0, 1]$، Min مطلق برای ۰ و Max مطلق برای ۱

اما در $(0, 1)$، Min و Max مطلق ندارد.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. c و g و j و b و h و k

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. a و c و d و e و f و g و h و L

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید. b و i و j و k

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ خیر

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ صفر

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ بله (نقطه‌ی i)

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟ بله

در نقطه‌ی e

f = ۰

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟ $f' = ۰$

۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

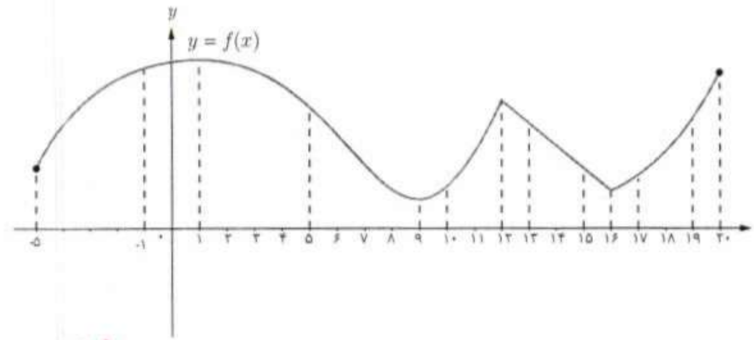
الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست. نادرست

ب) اگر $f'(c) = ۰$، آنگاه $x = c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است. نادرست

پ) اگر $x = c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = ۰$. درست

فعالیت

۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.



الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بستهٔ زیر بررسی کنید.

[−۱ , ۰] ، [۵ , ۱۰] ، [۱۳ , ۱۵] ، [۱۰ , ۱۳] ، [۱۶ , ۲۰]

Max مطلق و Min مطلق ، Max مطلق Min مطلق x=9 ، Max مطلق Min مطلق ، Max مطلق در x=12 Min مطلق ، Max مطلق Min مطلق

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

(−۱ , ۰) ، (۵ , ۱۰) ، (۱۳ , ۱۵) ، (۱۰ , ۱۳) ، (۱۶ , ۲۰)

وجود ندارد ، Min مطلق x=9 Max مطلق ندارد ، وجود ندارد ، Min مطلق ندارد Max مطلق x=12 ، وجود ندارد

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. درست

ب) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است. نادرست

قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

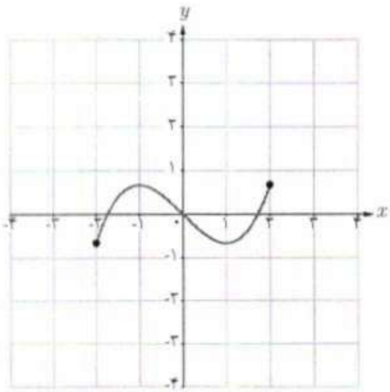
قضیه : اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a , b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترمم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.
۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.
۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مهم

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.



✤ مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ بیابید.

✤ حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و مقدار f' در $x=\pm ۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.

بنابراین $x=\pm ۱$ طول نقاط بحرانی و $x=\pm ۲$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳}\qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳}\qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳}\qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.

مثال : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را روی بازه $[-۲\,,\,۲]$ پیدا کنید.

حل : نقاط $x=\pm۲$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

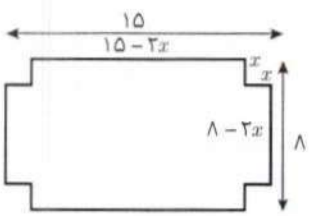
$$f(x)=|x^{۲}-۱|=\begin{cases}x^{۲}-۱ & x\le -۱ \text{ یا } ۱\le x\\ ۱-x^{۲} & -۱\le x\le ۱\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}۲x & x<-۱ \text{ یا } ۱<x\\ -۲x & -۱<x<۱\end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت :

$$f'_{+}(۱)=۲\quad,\quad f'_{-}(۱)=-۲\quad,\quad f'_{+}(-۱)=۲\quad,\quad f'_{-}(-۱)=-۲$$ و

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm۱$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=۰$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=۰$ و $x=\pm۱$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm۱$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm۲$ و مقدار آن برابر ۳ است.

در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می‌خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.



مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[۱] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\text{طول قوطی مورد نظر}=۱۵-۲x\qquad ۰\le x\le \frac{۱۵}{۲}$$
$$\text{عرض قوطی}=۸-۲x\qquad ۰\le x\le ۴$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^{۳}-۴۶x^{۲}+۱۲۰x\quad,\quad ۰\le x\le ۴$$

۱ــ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

چون V روی $[۰\,,\,۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

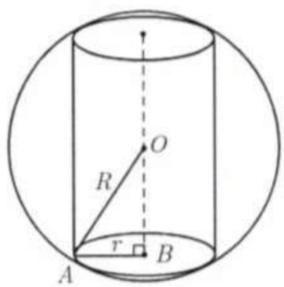
$$V'(x)=۱۲x^۲-۹۲x+۱۲۰=۰$$

$$(۳x-۵)(x-۶)=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x=۶$$

اما $x=۶$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x=\frac{۵}{۳}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(۰)=۰$ ، $V(\frac{۵}{۳})>۰$ و $V(۴)=۰$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x=\frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{۵}{۳}$ اینچ باشد.

✤ **مثال** : در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

✤ **حل** : فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB ، $OB=\frac{h}{۲}$ و داریم :



$$AB^۲+OB^۲=OA$$

بنابراین $r^۲+\frac{h^۲}{۴}=R^۲$.

حجم این استوانه برابر است با :

$$V=\pi r^۲h=\pi(R^۲-\frac{h^۲}{۴})h \;\Rightarrow\; V(h)=\pi R^۲h-\frac{\pi}{۴}h^۳ \quad ; \quad ۰\le \text{h} \le ۲\text{R}$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[۰\,,\,۲R]$، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم :

$$V'(h)=\pi R^۲-\frac{۳\pi}{۴}h^۲=۰ \;\Rightarrow\; h=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

از طرفی $V(۰)=۰$ و $V(۲R)=۰$

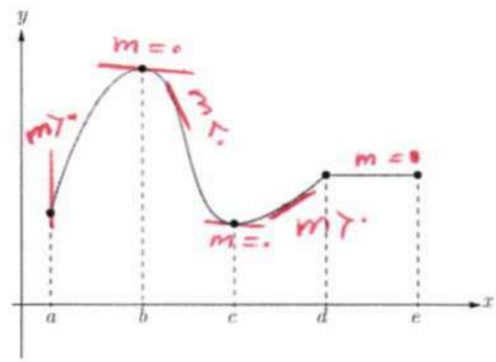
بنابراین تابع V به ازای $h=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ ، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^۲+\frac{h^۲}{۴}=R^۲$ ، مقدار r برابر با $r=\frac{\sqrt{۲}R}{\sqrt{۳}}$ می‌باشد.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

$m=0 \in \{b , c\}$

$m>0 \begin{cases}(a,b)\\(c,d)\end{cases}$ و در (b,c) شیب منفی

$m=0 \in (d,e)$ در بازه‌ی

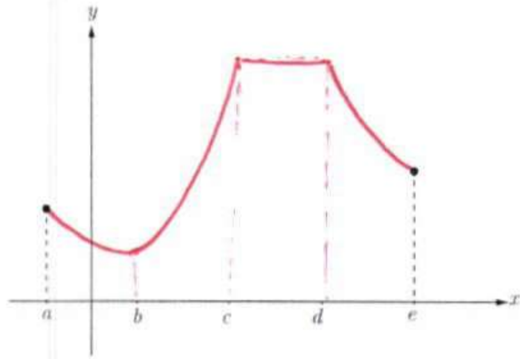
ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

در $\begin{cases}(a,b)\\(c,d)\end{cases} \in$ $f'>0$ و $\in (b,c)$ $f'<0$ و در نقاط $\{b,c\}$ و در بازه‌ی (d,e) $f'=0$

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.

در بازه‌های (a,b) و (c,d) اکیداً صعودی و در بازه‌ی (b,c) اکیداً نزولی

و در بازه‌ی (d,e) تابع ثابت



۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازهٔ $[a , e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد :

ـ تابع f در بازهٔ (a , e) مشتق‌پذیر باشد.

ـ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a , b) و (b , c) و (c , d) و (d , e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ـ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

در بازهٔ (b , c) صعودی و در بازه‌های (a , b) و (d , e) نزولی و در بازهٔ (c , d) تابع ثابت

با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

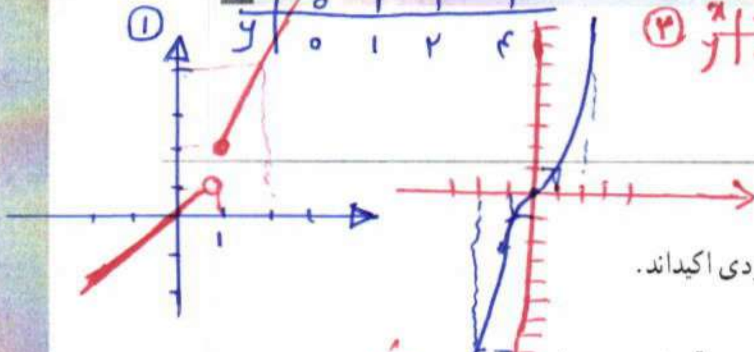
قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a , b]$ پیوسته و بر بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در (a , b)، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ یک تابع ثابت است.



x	۰	۱	۱	۲
y	۰	۱	۲	۴

②

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

کار در کلاس

۱ توابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 1\\ x & x<1\end{cases}$ و $g(x)=x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟ خیر

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟ بله

x	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	-۱	-۲	×	۲	۱	$\frac{1}{2}$

۲ تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

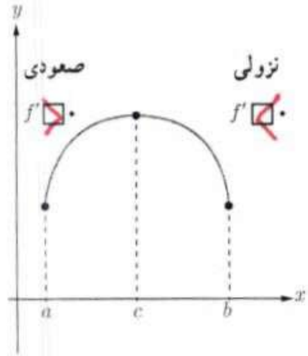
الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0 , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟ خیر

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

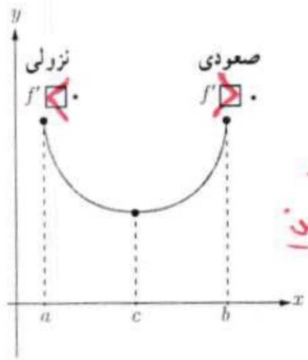
فعالیت

فرض کنیم $c \in (a\,,b) \subseteq D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و f بر $(a\,,b)$ پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.



۱ اگر تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,c)$ در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند $(c\,,b)$ در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c مشخص نمایید.



۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

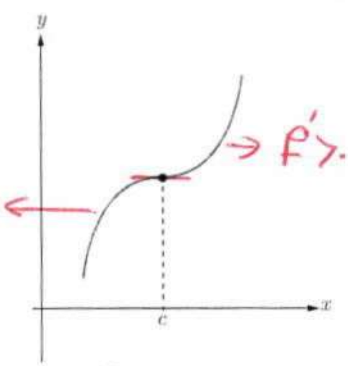
اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a,c) در سمت چپ آن نزولی و در بازه‌ای مانند (c,b) و در سمت راست آن صعودی باشد در این صورت $x=c$ یک نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است

۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c)=0$.

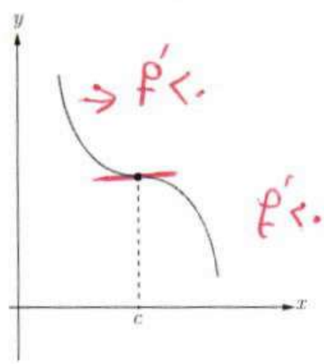
الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟

$f'>0$



(ب)



(الف)

نقاط اکسترمم ندارند زیرا علامت f' در شکل‌های (الف) و (ب) در دو طرف نقطه‌ی $x=c$ تغییر نمی‌کند

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)<0$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)<0$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)>0$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ را در بازهٔ $[-3, 4]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل : از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$ است و نقاط $x = -3$ و $x = 4$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم :

$$(-3, -27) \ , \ (-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}) \ , \ (2, -2) \ , \ (4, 22)$$

لذا $x = 4$ و $x = -3$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم :

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}\,,\,۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -۲ است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	-۳		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	-۲۷	$\nearrow$	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

کار در کلاس

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است. در بازه ها (s,a) و (b,t) تابع صعودی و در بازه (a,b)

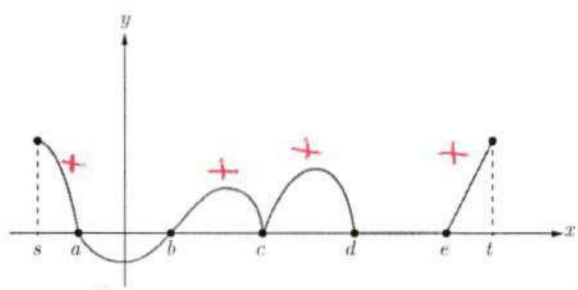
الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید. تابع نزولی و همچنین در بازه (d,e)

تابع نزولی می باشد

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

تابع ثابت می باشد

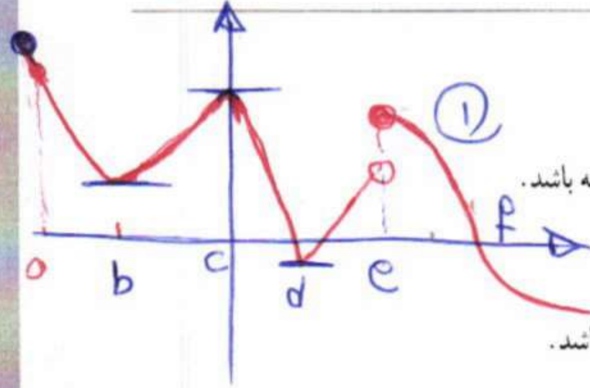
پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟ بله زیرا تابع در این باز



ب) در $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد و نقاط $x=a,b,c,d,e$ بحرانی هستند

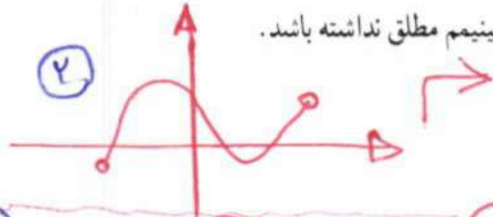
زیرا مشتق در این نقاط صفر می باشد

تمرین



۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

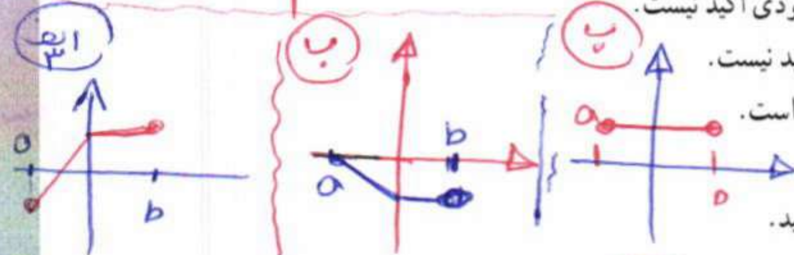
نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.
نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع نقطهٔ بحرانی نباشد.
نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

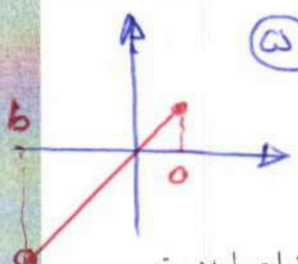
۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.
ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.
پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ هم صعودی و هم نزولی است.



۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.
ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.
پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.



۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

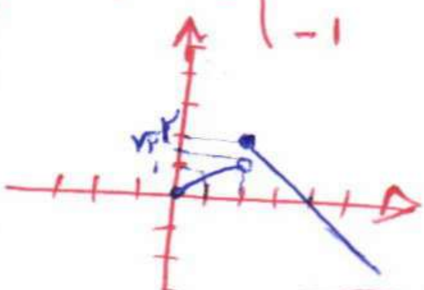
۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به‌دست آورید.

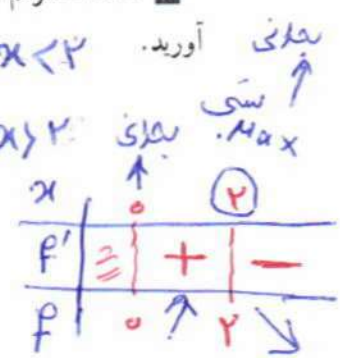
الف) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \qquad [-2 , 1]$

ب) $f(x) = x^3 - 3x \qquad [-1 , 2]$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 2 \\ 4 - x & x \ge 2 \end{cases}$

پ) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<2 \\ -1 & x>2 \end{cases}$





الف) $f'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

ب) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-1)=5 \quad , \quad f(4)=-2 \quad , \quad f(0)=0$$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy=100\,cm^2$ و $h=2\,cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$

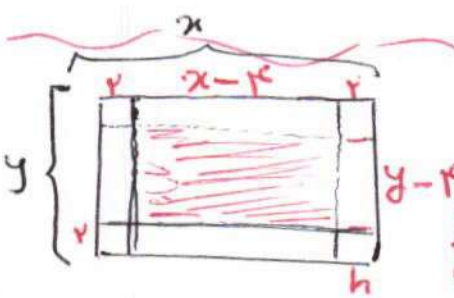
ب) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

۷

$(1,2) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1+a+b=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1} \Rightarrow -3+b=1 \Rightarrow b=4$

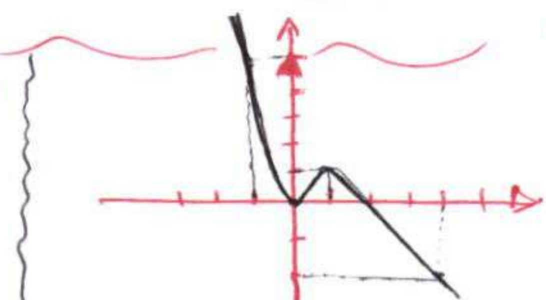
$f'(x)=3x^2+a \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3+a=0 \Rightarrow a=-3$

۹



$\begin{cases} xy=100 \\ y=\dfrac{100}{x} \end{cases}$

۸



$V=2(x-4)(y-4)=2xy-8x-8y+32$

$V(x)=232-8x-\dfrac{800}{x}$

$V(x)=\dfrac{232x-8x^2-800}{x}$

$\Rightarrow V'(x)=\dfrac{-8x^2+800}{x^2}=0$

$\Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=10$

$(232-16x)(x)-1(232x-8x^2-800)$

سوال ۱

۲) الف

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

x		0	
f''	$-$	0	$+$

تقعر به سمت پایین — تقعر به سمت بالا

ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$D = \mathbb{R} - \{1\}$ $\Rightarrow f''(x) = \frac{0 + 4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} > 0$

x		1	
	$-$ ∩		$+$ ∪

پ) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 3\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}\right)}{\left(3\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2}$

$D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

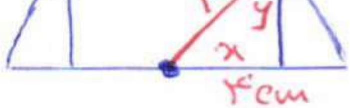
x		-1	
f''	$+$ ∪	ت.ن	$-$ ∩
f		0	

۴) $f(x) = ax^3 + bx^2 + C \xrightarrow{f(0)=1} 0 + 0 + C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 1}$

$\xrightarrow{f(1)=2} a + b + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$

عطف $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a(\frac{1}{2}) + 2b = 0$

$\Rightarrow 3a + 2b = 0$



$$\Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16-x^2}$$ ۱۰

$$S(x) = 2xy = 2x\sqrt{16-x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{16-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{2(16-x^2)-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{32-4x^2}{\sqrt{16-x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{8} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{8}$$

۱۱

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$

الف

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌ها $(-\infty,-1)$ و $(2,+\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-1,2)$ نزولی

ب

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad D = \mathbb{R} - \{2\}$$

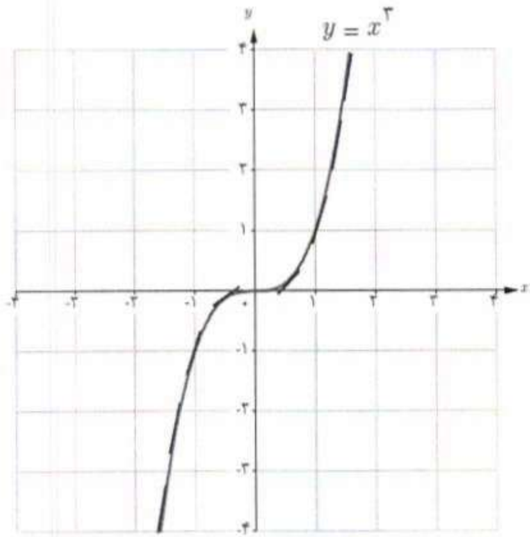
$$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(x)}{(x-2)^2}$$

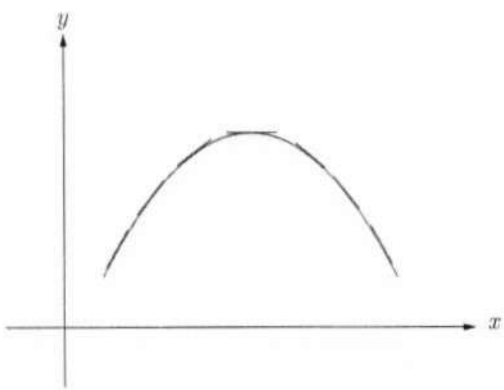
x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$	
f		نزولی	0	نزولی	

$R-\{2\}$ یعنی در تمام نقاط دامنه

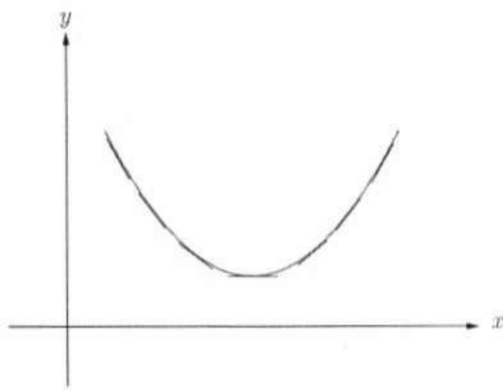
درس ۲
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.





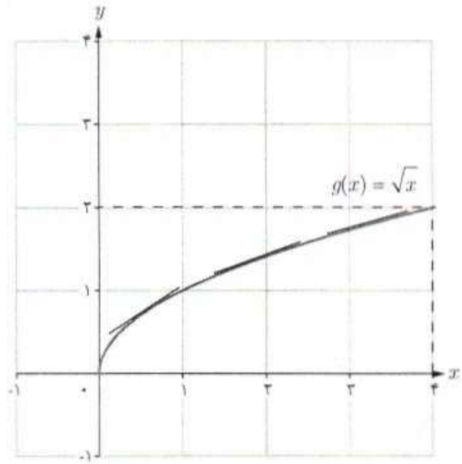
مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.



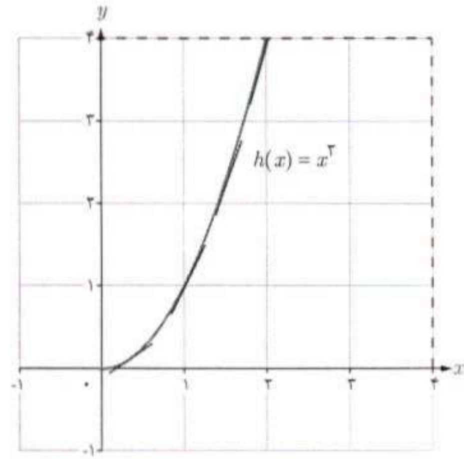
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.

فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۰\,,+\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(ب)



(الف)

۱ با حرکت از نقطهٔ $x=۰$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

در شکل الف شیب زیاد می‌شود اما در شکل (ب) شیب کم می‌شود در الف تقعر به سمت بالا در (ب) پایین

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

در این نمودارها اگر جهت تقعر به بالا باشد شیب افزایش و اگر تقعر به سمت پایین شیب کاهش

۳ تابع h' در بازهٔ $[۰\,,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ صعودی

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۴ تابع g' در بازهٔ $[۰\,,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ نزولی

۵ الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I صعودی است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I نزولی است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I صعودی است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I نزولی است.

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید :

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه ...صعودی... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ..افزایش.. می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ..بالا.... است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه ..نزولی.. است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ..کاهش.. می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ..پایین.. است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نیست.

قضیه :

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

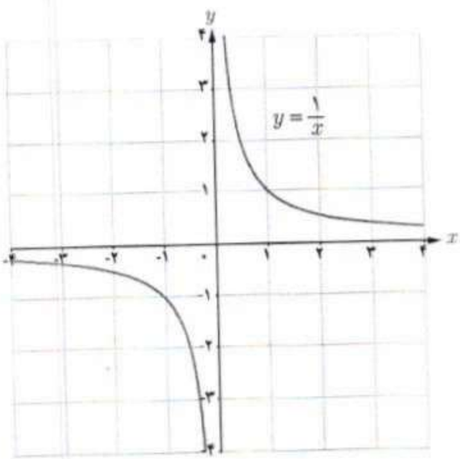
الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$



ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

حل : الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

بنابراین :

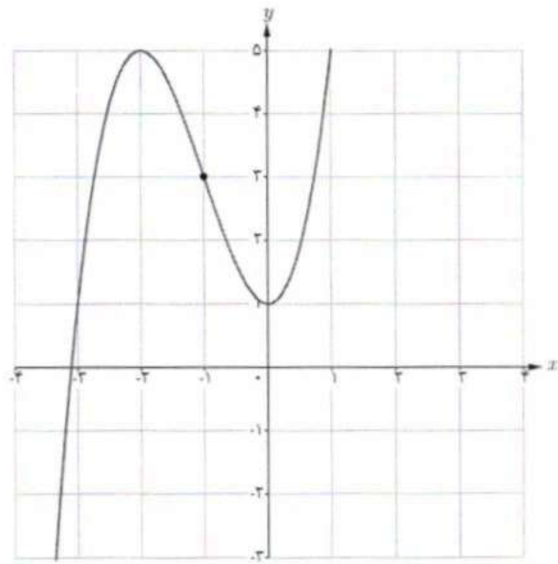
اگر $x > 0$، آنگاه $f''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(0\,, +\infty)$ رو به بالاست.

اگر $x < 0$، آنگاه $f''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty\,, 0)$ رو به پایین است.

ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x)=x^3+3x^2+1 \Rightarrow g'(x)=3x^2+6x \Rightarrow g''(x)=6x+6$$

$$g''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$



بنابراین :

اگر $x>-1$ آنگاه $g''(x)>0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-1\,,+\infty)$ به سمت بالاست.

اگر $x<-1$ آنگاه $g''(x)<0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty\,,-1)$ به سمت پایین است.

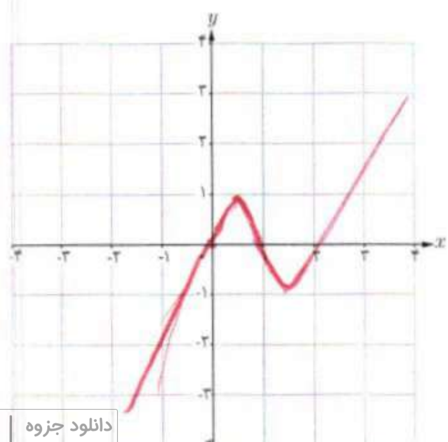
کار در کلاس

نمودار تابع $y=f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

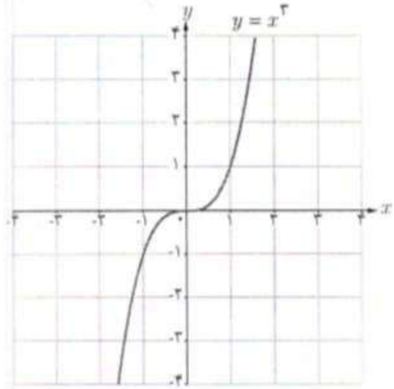
$f(0)=f(1)=f(2)=0$

و بر بازهٔ $(-\infty\,,1)$، $f''(x)<0$،

و بر بازهٔ $(1\,,\infty)$، $f''(x)>0$.



نقطهٔ عطف نمودار یک تابع



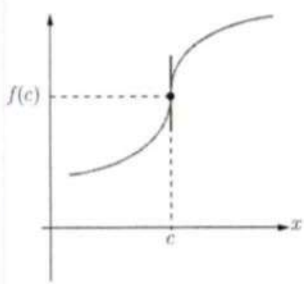
نمودار تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ رو به پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = 0$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = 0$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c , f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c , f(c))$ تغییر کند.



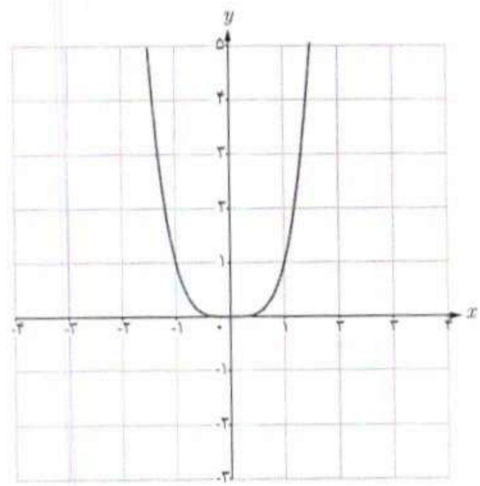
خط $x = c$ مماس قائم است.

از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.
از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(c , f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c , f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = 0$. با این حال شرط $f''(c) = 0$ برای نقطهٔ عطف بودن $x = c$

به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c)=0$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^4$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

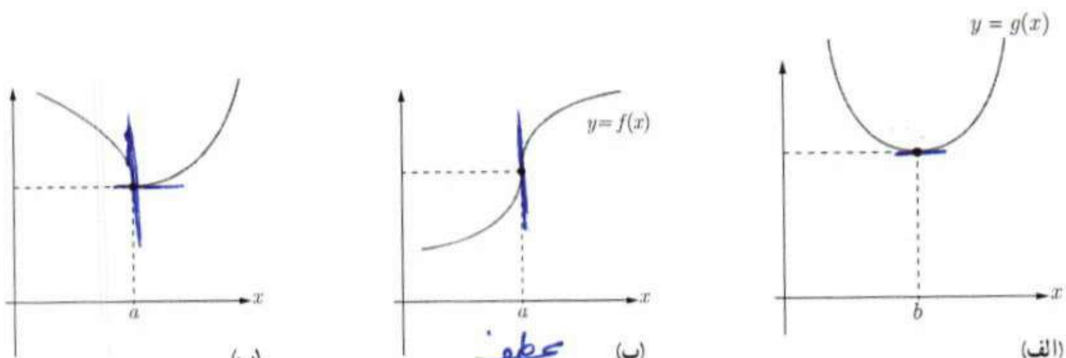
$$f'(x)=4x^3 \quad , \quad f''(x)=12x^2$$



با اینکه $f''(0)=0$ اما تابع f'' در دو طرف $x=0$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=0$ عوض نمی‌شود و لذا $x=0$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



(الف) (ب) عطف (پ)

۲ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند. ✓

ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است. ✗ مثال قسمت (پ)

پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. ✗

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. ✓

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. ✗ باشد مثال (ب) سؤال قبل

✤ مثال : جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۵$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

✤ حل :

الف) $f'(x) = ۳x^{۲} - ۱۲x$ و $f''(x) = ۶x - ۱۲$

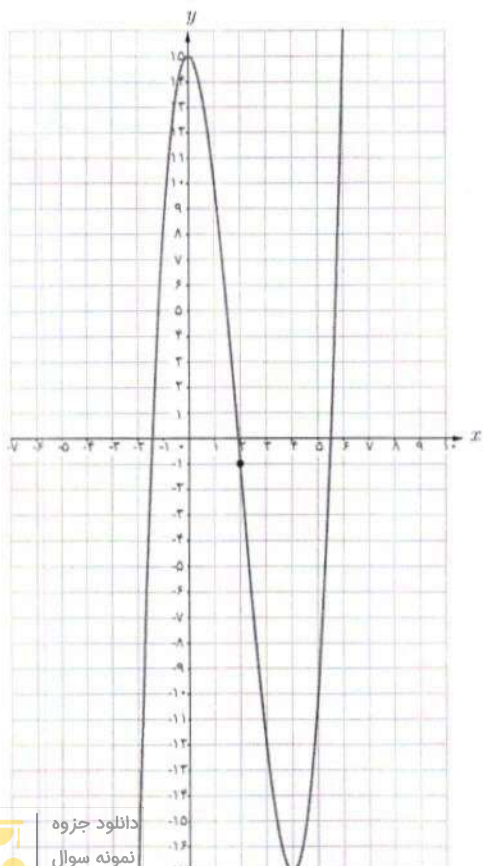
$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده است و تنها در $x = ۲$ برابر صفر می‌شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x = ۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x = ۲$ تغییر علامت دهد.

اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲- است. از طرفی داریم :



x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f		۱- نقطهٔ عطف	

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x} \to f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} \to f''(x)=\frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^{۵}}}$

از آنجا که مقدار $\sqrt[۳]{x^{۵}}$ به ازای xهای مثبت، مثبت و به ازای xهای منفی، منفی است.

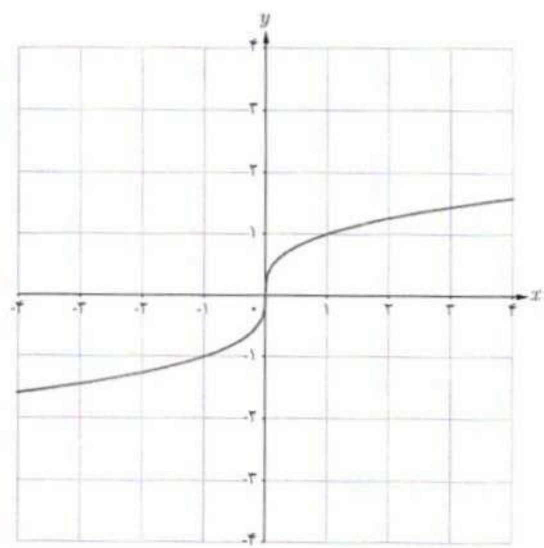
داریم :

اگر $x>۰$، آنگاه $f''(x)<۰$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

اگر $x<۰$، آنگاه $f''(x)>۰$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

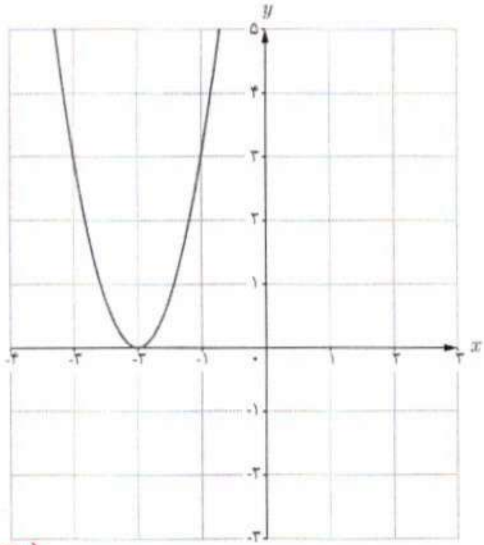
لذا جهت تقعر این تابع در $x=۰$ عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطهٔ $x=۰$ دارای مماس (مماس قائم) است.

بنابراین $x=۰$ نقطهٔ عطف این تابع است.



کار در کلاس

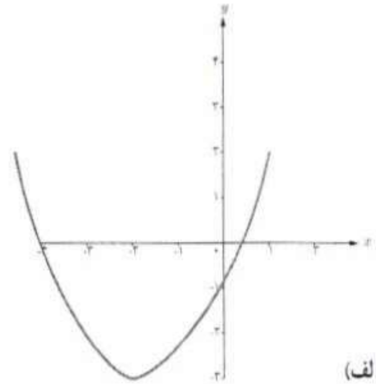
۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



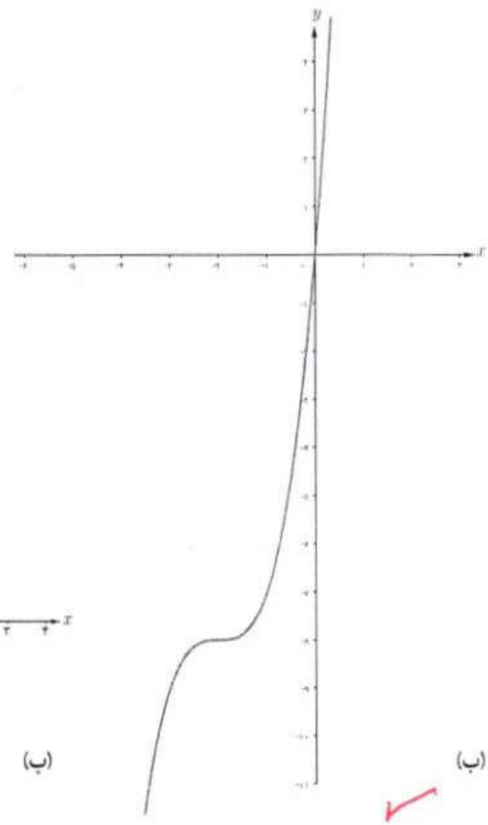
$a>0 \quad a>0$

$-\frac{b}{2a}<0 \Longrightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$

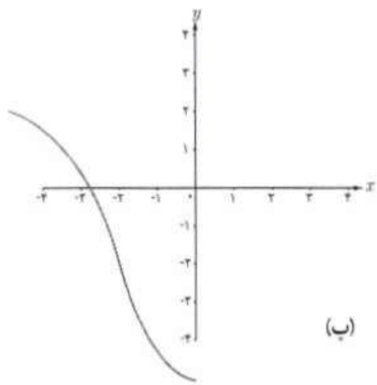
یعنی تابع صعودی و طول نقطهٔ عطف آن منفی می‌باشد



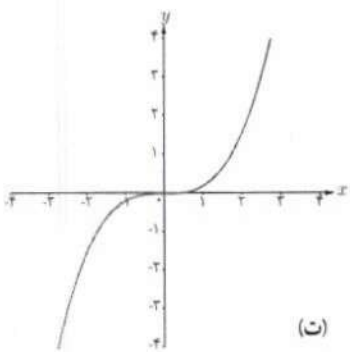
(الف)



(ب)

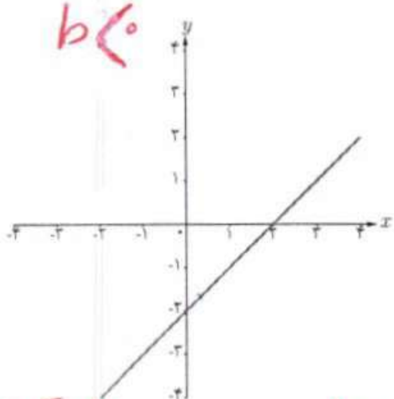


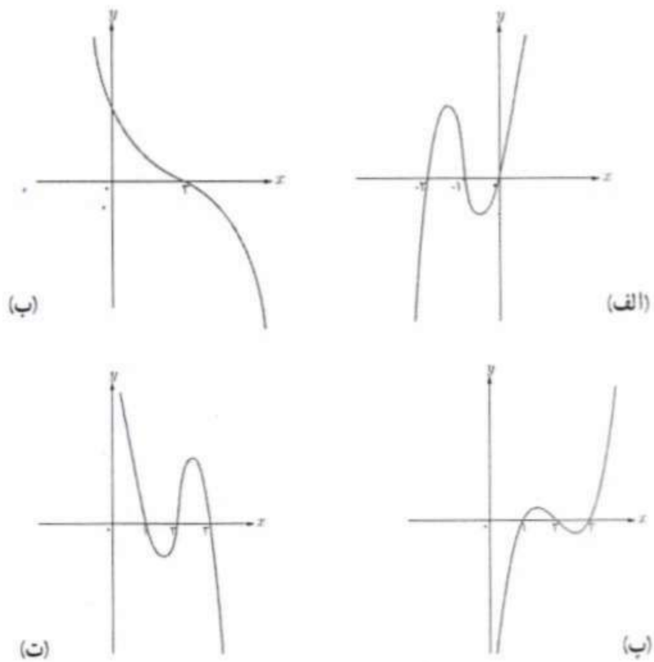
(پ)



(ت)

۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟





$a>0$

$b<0$

تابع صعودی طول نقطه‌ی عطف آن $x=-\frac{b}{3a}$ منفی باشد که گزینه‌ی پ درست است

تمرین

۱ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

۳ برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

الف) نقطهٔ $(0\,,0)$ ب) نقطهٔ $(0\,,1)$ پ) نقطهٔ $(1\,,0)$ ت) نقطهٔ $(2\,,2)$

$f(x)=y=x^3$ $f(x)=(x-1)^3$ $f(x)=x^3+1$ $f(x)=(x-2)^3+2$

۴ مقادیر a، b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

۵ اگر $(0\,,0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.

۵

$y'=3x^2+2ax+b$

$y''=6x+2a \Rightarrow 6(0)+2a=0 \Rightarrow a=0$

$(Min)\ x=2 \Rightarrow 3(2)^2+0+b=0 \Rightarrow b=-12$

تهیه کننده:

درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y = f(x)$ و زوج مرتب (x, y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط (x, y) به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

✤ مثال : اگر بدانید تابع $y = f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم :

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x = ۱$ و $x = ۰$ و $x = -۲$ است و f در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر باشد.

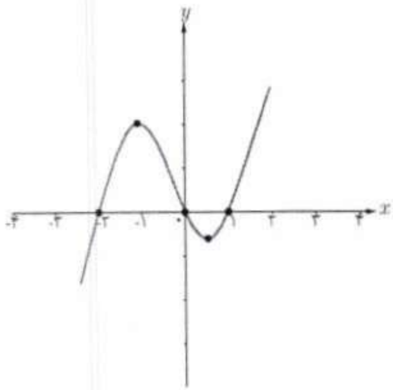
۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -\frac{۶}{۵}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{۱}{۲}) = -۰/۶$ و $f(\frac{-۶}{۵}) = ۲$.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x = -\frac{۱}{۳}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{۱}{۳}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{۱}{۳}) = ۰/۷$.

در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

✤ حل : از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -\frac{۶}{۵}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x = -\frac{۶}{۵}$ و $x = \frac{۱}{۲}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x = -\frac{۱}{۳}$ رو به پایین و در سمت راست $x = -\frac{۱}{۳}$ رو به بالاست و چون f' در $x = -\frac{۱}{۳}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x = -\frac{۱}{۳}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		$\frown$ (−)		$\frown$ (−)	۰	$\smile$ (+)		$\smile$ (+)	
f		$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰/۷	$\searrow$	−۰/۶	$\nearrow$	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

❖ مثال : نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

❖ حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

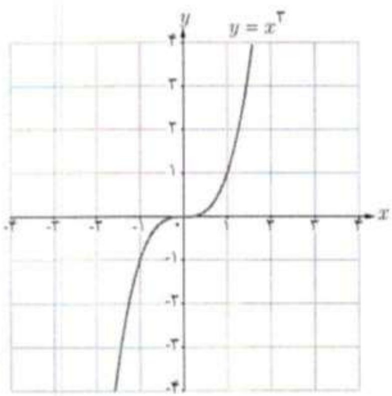
$f(x) = x^3 = ۰ \rightarrow x = ۰ \rightarrow$ (۰ , ۰) محل برخورد نمودار با محورهای مختصات

$f'(x) = ۳x^2 = ۰ \rightarrow x = ۰$

$f''(x) = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	+		+
f''	−		+
f	↗	۰	↗

نقطهٔ عطف



این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لذا دو شاخه انتهایی نمودار در ربع‌های اول و سوم قرار دارند.

می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط (۱ , ۱) و (۱− , ۱−) نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y = x^3$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.

❖ مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x-۱)^2(x+۳)$ را رسم کنید.

❖ حل :

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱$ یا $x = -۳$

بنابراین نقاط (۰ , ۱) و (۰ , ۳−) محل‌های برخورد با محور xها است

$x = ۰ \Rightarrow y = ۳$

بنابراین نقطهٔ (۳ , ۰) محل برخورد با محور yهاست

$f'(x) = ۲(x-۱)(x+۳) + (x-۱)^2 = (x-۱)(۳x+۵)$

$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱$ یا $x = -\frac{۵}{۳}$

لذا نقاط $(۰ , ۱)$ و $(-\frac{۵}{۳} , \frac{۲۵۶}{۲۷})$ نقاط بحرانی‌اند

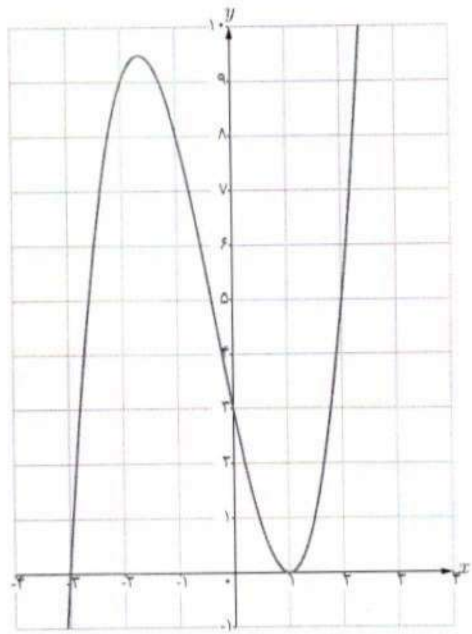
$$f''(x) = (۳x + ۵) + ۳(x - ۱) = ۶x + ۲$$

$$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x = -\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x = -\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳} , \frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است، از طرفی $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		$\frown$ −		$\frown$ −	۰	$\smile$ +		$\smile$ +	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۲۵۶}{۲۷}$	$\searrow$	$\frac{۱۲۸}{۲۷}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq 0$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=0$ و $d\neq 0$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq 0$ و $d\neq 0$ و $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

بنابراین $y=\dfrac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=+\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x=-\dfrac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

✤ مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.

✤ حل : دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ ، لذا خط $y=1$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ ، لذا $x=1$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(0\,,\,-2)$ و $(-2\,,\,0)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}\ ,\ x\neq 1$$

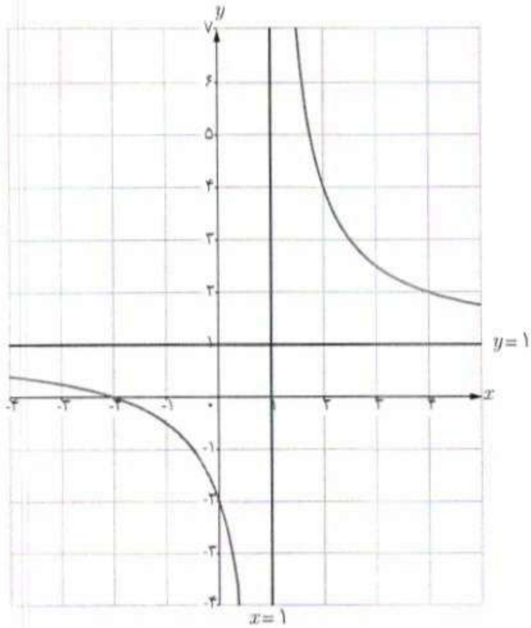
و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\,1)$ و $(1\,,\,+\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x)=\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}\ ,\ x\neq 1$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , 1)$ داریم $f''(x) < 0$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(1 , +\infty)$ داریم $f''(x) > 0$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y''		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$		$\smile$ $+$	
y		$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \; +\infty$	$\searrow$	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



✤ مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

✤ حل : دامنهٔ این تابع $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$، لذا $y = -\frac{3}{2}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$، لذا $x = \frac{1}{2}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(0 , 4)$ و $(-\frac{4}{3} , 0)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$f'(x) = \frac{11}{(-2x+1)^2} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

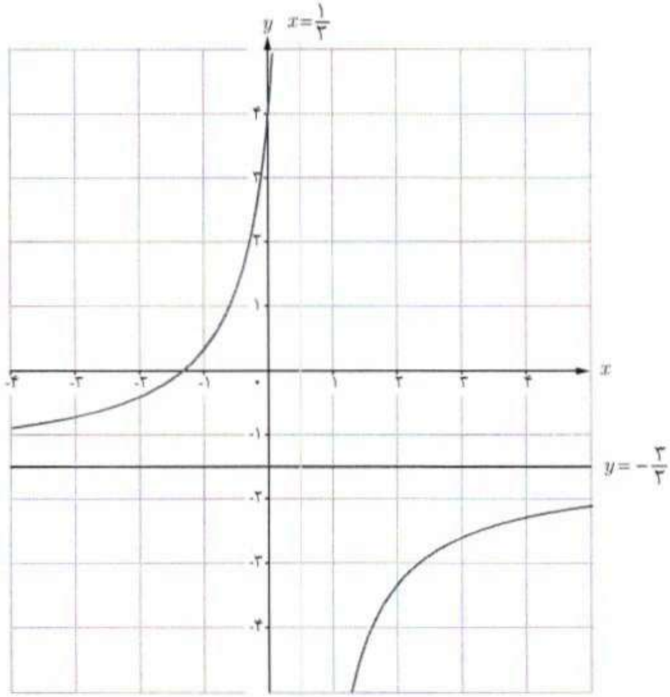
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty , \frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲} , +\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت :

$$f''(x) = \frac{۴۴}{(-۲x+۱)^۳} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , \frac{۱}{۲})$ داریم $f''>۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲} , +\infty)$ داریم $f''<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{۴}{۳}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$	
y''		$\cup\,+$		$\cup\,+$		$\cup\,+$		$\cap\,-$	
y	$-\frac{۳}{۲}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۴	$\nearrow$	$-\infty \; +\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۳}{۲}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



$(2,1) = (-\frac{d}{c} , \frac{a}{c}) \Rightarrow -\frac{d}{c} = 2 , \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c , d = -2c$ ۲

$(-1,0) \Rightarrow a(-1)+b=0 \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax+a}{ax-2a} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ث) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

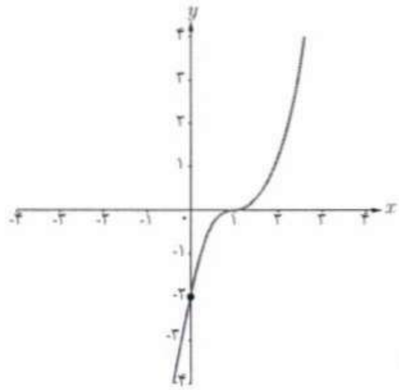
ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

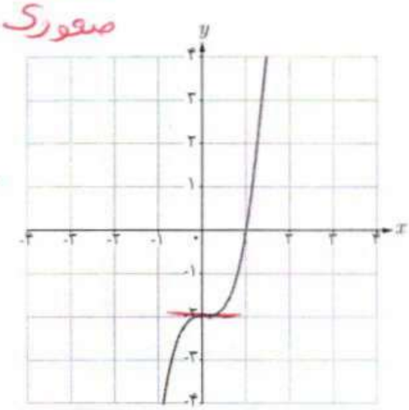
۲ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(1 , 2)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(-1 , 0)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید. حل بالای صفحه

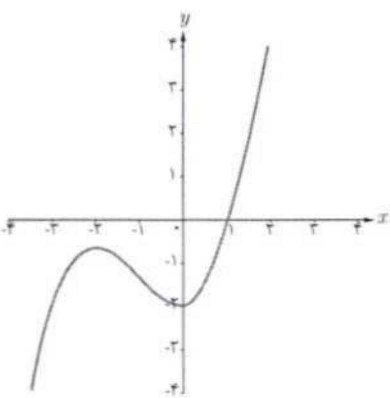
۳ کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.

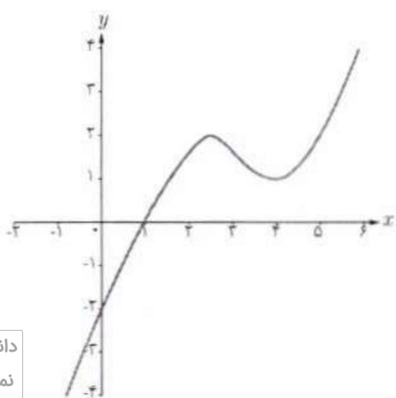
$x = -\frac{b}{3a} = 0 \Rightarrow f(0) = -2$
عطف

$a > 0 \Rightarrow$ صعودی


(الف)


(ب)


(پ)


(ت)

ادامه‌ی حل تمرین صفحه‌ی ۱۴۴،۳

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ث) $f(x) = \dfrac{-x}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

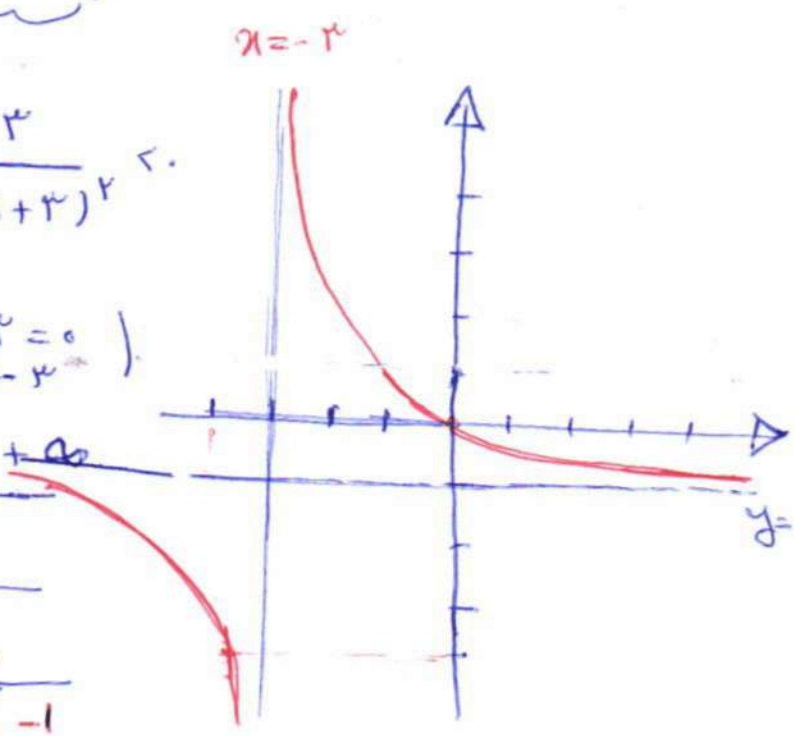
① $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -3$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$ افقی

② $f'(x) = \dfrac{-(x+3)-(1)(-x)}{(x+3)^2} = \dfrac{-3}{(x+3)^2} < 0$

③ $f''(x) = \dfrac{6}{(x+3)^3} \quad \left(\begin{array}{l} x+3=0 \\ x=-3 \end{array}\right)$

x	$-\infty$		-4		-3		0		$+\infty$
f'		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f	-1	↘	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘	-1



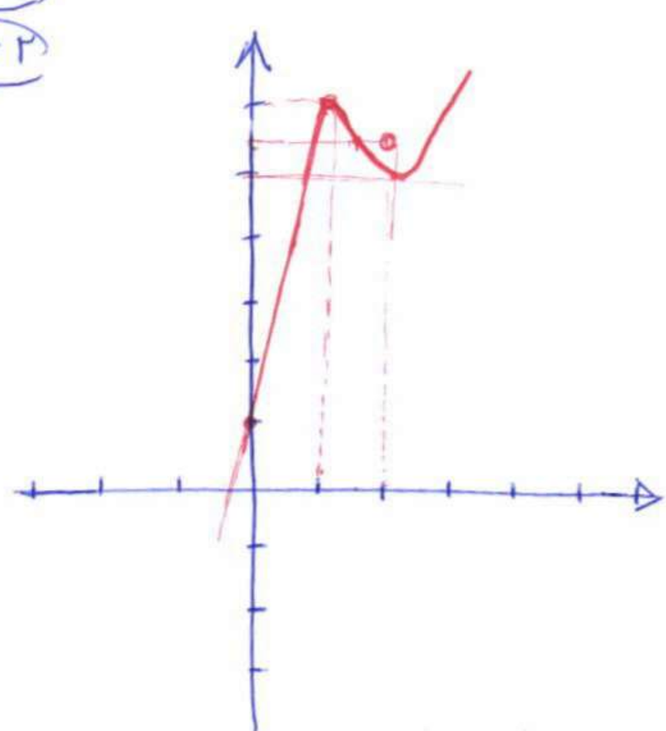
ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \quad \boxed{D_f = \mathbb{R}}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{3}{2}}$

کمکی

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		↗	1	↗	6	↘	$5/5$	↘	5	↗	



حل تمرین صفحه ۱۴۴/۲ ادامه‌ی سؤال یک

(ب) $f(x) = -x(x+2)^2 \Longrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f'(x) = -1(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$

$(x+2)(-x-2-2x) = 0$

$(x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	○	$\nearrow$	○	$\searrow$	

$f''(x) = 1(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = -3x-2-3x-6 \Rightarrow -6x-8=0$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

① $\begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$

مجانب قائم

مجانب افقی

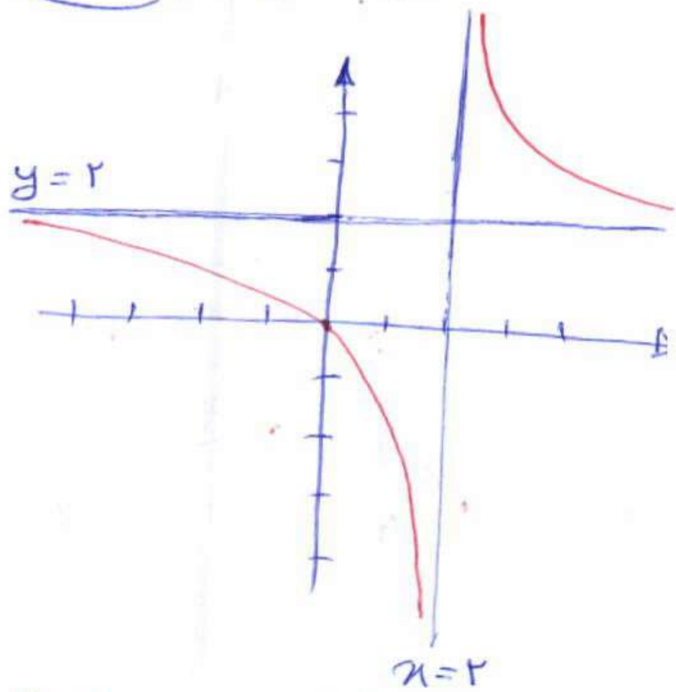
② $f'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

③ $f''(x) = \frac{0+6(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{+6}{(x-2)^3}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$	‖	$-$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	2

کمکی



از نقاط کمکی دیگری می‌توان استفاده شود.

حل تمرین صفحه ی ۱۴۴/۱ — سؤال ۱

الف) $f(x)=2x^2-4x+1 \quad D=\mathbb{R}$

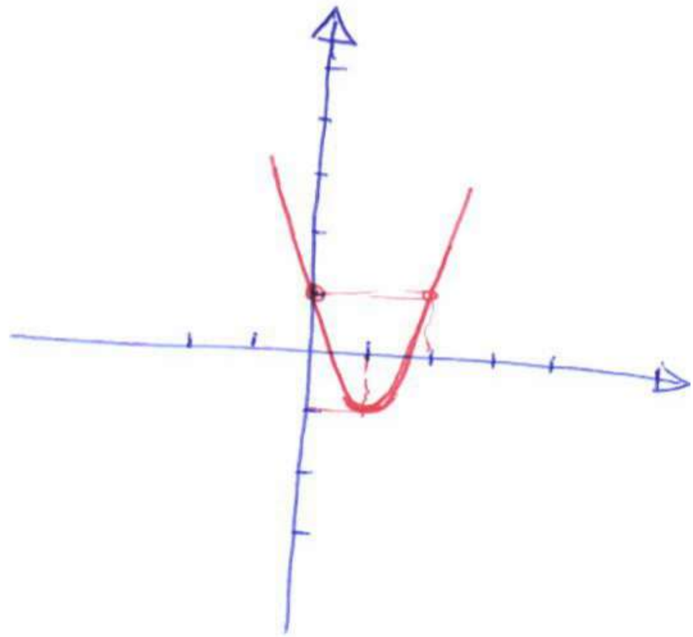
(۱) $f'(x)=4x-4=0 \Rightarrow x=1$

(۲) $f''(x)=4>0$

(۳) $x=0 \Rightarrow y=1$

کمکی

x	$-\infty$	0		1		2
f'	$-$		$-$	0	$+$	
f''	$+$		$+$		$+$	
f	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

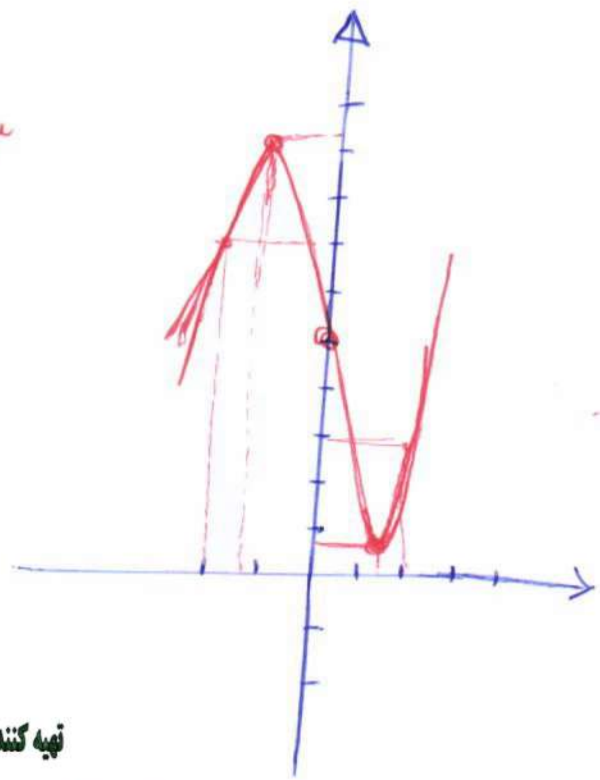


ب) $f(x)=x^3-5x+5 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-5=0 \begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{3}}\simeq 1.3 \\ x=-\sqrt{\frac{5}{3}}\simeq -1.3 \end{cases}$

$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		2	$+\infty$
f'	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f''	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
f	$\nearrow$	7	$\nearrow$	9.3	$\searrow$	5	$\searrow$	0.7	$\nearrow$	3	$\nearrow$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان