



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



کرمان، کلوت شهداد

ماهواره امید اولین ماهواره ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویه بین مرکز زمین (نقطه O) تا ماهواره S و دورست‌ترین نقطه قابل دید روی کره زمین (نقطه p) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه

$$\cos \alpha = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰ + h} \quad \text{و}$$

$$\widehat{PA} = ۶۴۰۰ \times \hat{\alpha} \quad (\text{بر حسب رادیان})$$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

توابع مثلثاتی

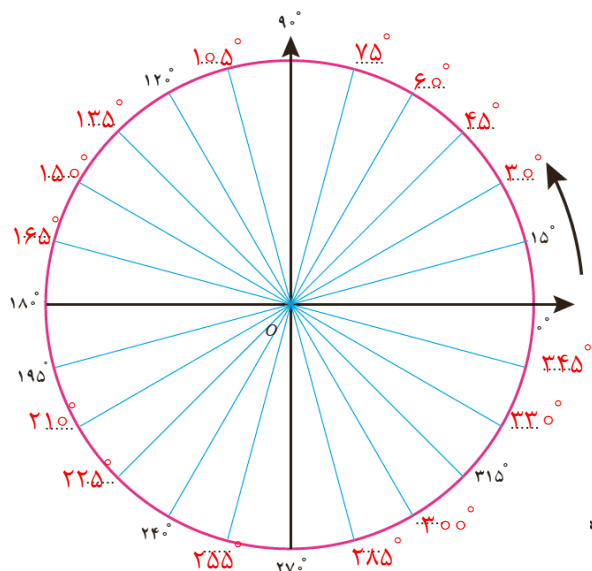
درس اول

درس دوم

درس سوم

یادآوری

- اگر محیط دایره‌ای را به 360° کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها 1° درجه است. اندازه هر کمان با زاویه مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.
- دایره مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

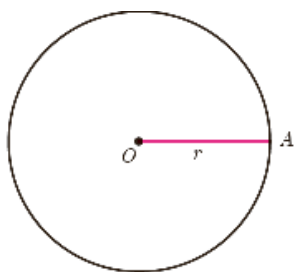


شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویه مناسب را روی شکل مشخص کنید.

برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطه بین اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی یک کمان و طول کمان

فعالیت



- ۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخ را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به دست آورید.

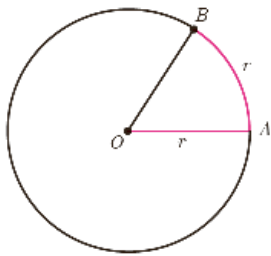
طول نخ اندازه محیط دایره را مشخص می‌کند. اگر فرض کنیم اندازه محیط دایره عددی مانند

$$p = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{2\pi}$$

p شده باشد، بنا براین شعاع به صورت مقابل به دست می‌آید:

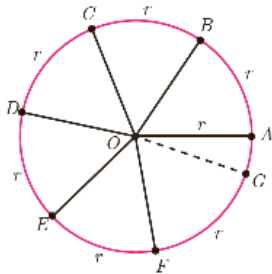
در این قسمت اگر فرض کنیم که $p = 44 \text{ cm}$ برای محاسبه شعاع با فرض $\pi = 3/14$ داریم:

$$44 = 2 \times 3/14 \times r \Rightarrow r = \frac{44}{6/28} \Rightarrow r \approx 7$$



۲ قطعه نخي را به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

این زاویه تقریباً برابر با 57° است.



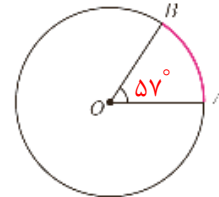
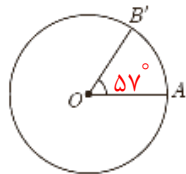
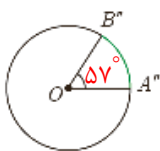
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطه B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D, E, F, G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$ ، $\widehat{COD}$ ، $\widehat{DOE}$ ، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه $\widehat{AOB}$ برابر و هر یک تقریباً 57° درجه است. آیا دو نقطه G و A برهم منطبق می شوند؟ خیر این دو نقطه بر هم منطبق نمی شوند.

نکته: $\widehat{GOA} \approx 18^\circ$

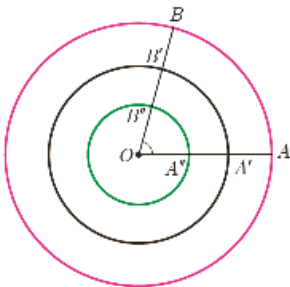
به این ترتیب ۶ زاویه مرکزی حاصل می شود که طول کمان روبه روی هر یک از آنها با شعاع ... دایره برابر است. به هر یک از این زاویه ها یک رادیان می گوئیم.

۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبه روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره های زیر اندازه زاویه مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازه زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



به عبارت دیگر اگر اندازه $\widehat{AOB}$ ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم:



$$OA = \widehat{AB}$$

$$OA' = \widehat{A'B'}$$

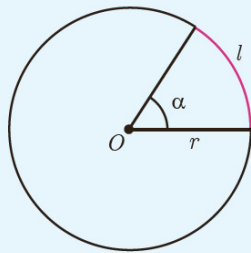
$$OA'' = \widehat{A''B''}$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $1 \leq i \leq 7$	$6r$	$5r$	$4r$	$3r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	r
اندازه زاویه $\angle AOB_i$ $1 \leq i \leq 7$	۶ رادیان	۵ رادیان	۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۱ رادیان

همان طور که می بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازه زاویه مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به دست می آید. با توجه به جدول صفحه قبل می توان گفت :

$$\text{طول کمان روبه روی زاویه} = \frac{\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان}}{\text{شعاع دایره}}$$



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه رابطه بالا را به صورت زیر می توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطه بالا l و r هم واحدند.

کار در کلاس

با استفاده از رابطه بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر = ۵ متر	۰/۷۵ متر ۷۵ سانتی متر	۲۰۰ سانتی متر = ۲ متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی متر
r	۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	۱ متر	۲۰ سانتی متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$$r = 5 \text{ cm}, \alpha = 1 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{5} \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ m}, l = 500 \text{ cm} \Rightarrow l = 5 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ رادیان}$$

$$r = 0/5 \text{ m}, \alpha = 1/5 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{0/5} \Rightarrow l = 0/75 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}, l = 200 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ رادیان}$$

$$l = 90 \text{ cm}, \alpha = 3 \text{ رادیان}, r = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 3 = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 30 \text{ cm}$$

$$r = 10 \text{ m}, l = 50 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{50}{10} \Rightarrow \alpha = 5 \text{ رادیان}$$

$$l = 10 \text{ m}, \alpha = 10 \text{ رادیان}, r = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 10 = \frac{10}{r} \Rightarrow r = 1 \text{ m}$$

$$r = 20 \text{ cm}, \alpha = 20 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 20 = \frac{l}{20} \Rightarrow l = 400 \text{ cm}$$

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است. حال جدول زیر را کامل کنید:

π رادیان	$3/14$ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	$5/5$ رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقاً 18°	تقریباً 179°	تقریباً 171°	تقریباً 114°	تقریباً 57°	تقریباً $28/5^\circ$	زاویه برحسب درجه

$$57^\circ \times 3 = 171^\circ, \quad 57^\circ \times 2 = 114^\circ, \quad 57^\circ \times 3/14 = 179^\circ, \quad 28/5^\circ \times 5 = 140^\circ$$

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با 180° درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان. در نتیجه:

$$\frac{\pi}{180} \text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} \pi \text{ رادیان} &= 180^\circ \\ \div 2 &\rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ رادیان} = 90^\circ \\ \div 3 &\rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ رادیان} = 60^\circ \\ \div 4 &\rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} = 45^\circ \\ \div 6 &\rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ رادیان} = 30^\circ \end{aligned}$$

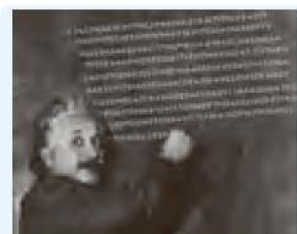
کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید:

$$\begin{aligned} 36^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \quad \left(36^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \\ 6^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{30} \text{ رادیان} \quad \left(6^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \\ 18^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{10} \text{ رادیان} \quad \left(18^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \\ 3^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{60} \text{ رادیان} \quad \left(3^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \\ 45^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \quad \left(45^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \\ 9^\circ &\rightarrow \frac{\pi}{20} \text{ رادیان} \quad \left(9^\circ \times \frac{\pi}{180} \right) \end{aligned}$$

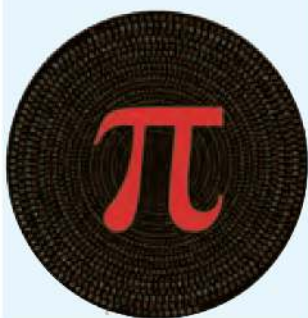
اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$



خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفیسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانه mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.

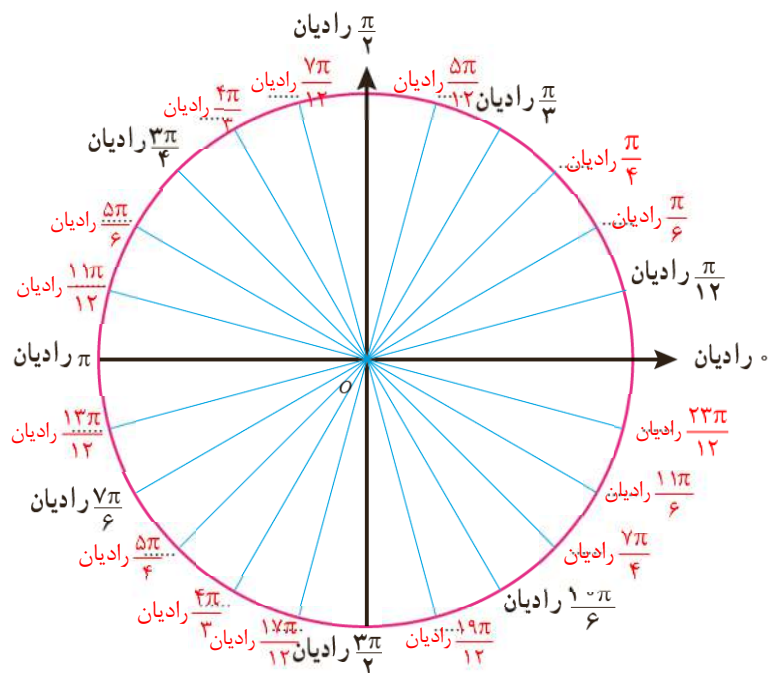


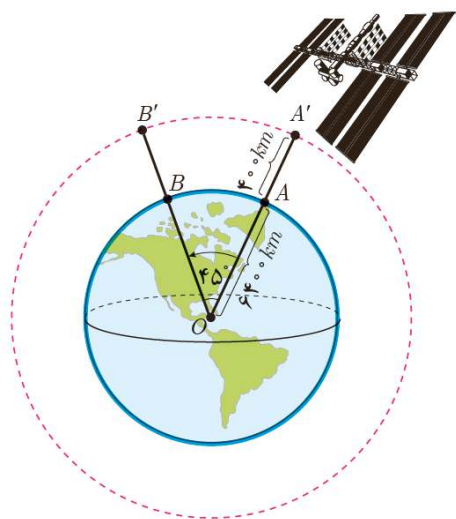
۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	5°	$25/71^\circ$	24°	72°	120°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{7} \text{ رادیان}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow D \approx 25/71^\circ \\ \frac{24^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{15} \text{ رادیان} \\ \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{2 \times 180^\circ}{5} \Rightarrow D = 72^\circ \\ \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان} \\ \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{4} \text{ رادیان}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{5 \times 180^\circ}{4} \Rightarrow D = 225^\circ \end{array} \right.$$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویه مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.





ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی 400 کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره زمین را 6400 کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \hat{AOB} = \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با 6800 km

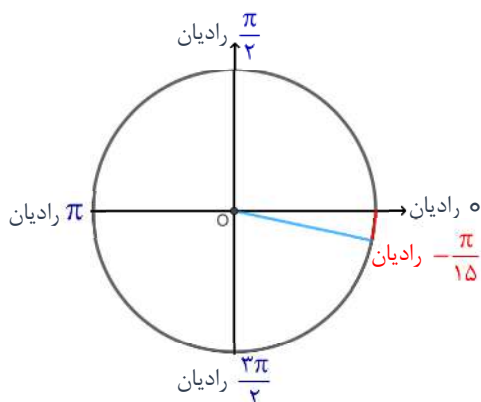
$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

۳ طول کمان روبه‌روی $A'O'B'$ با فرض $\pi \approx 3.14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با:

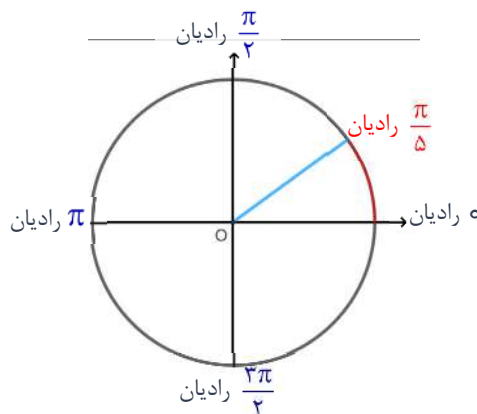
$$\text{طول کمان } A'B' = l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \Rightarrow l = \frac{3.14}{4} \times 6800 \approx 5338 \text{ km}$$

۱ هریک از زاویه‌های -12° ، 36° ، 72° ، -15° و 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

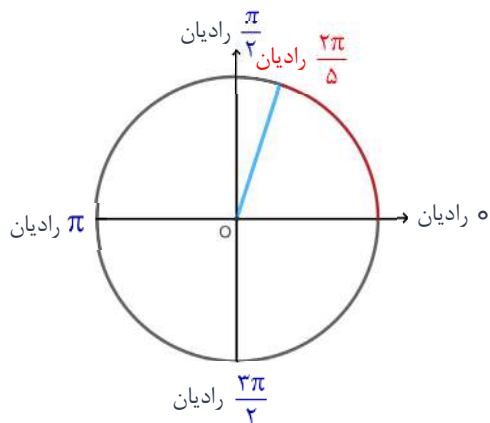
$$-12^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} -\frac{\pi}{15} \text{ رادیان}$$



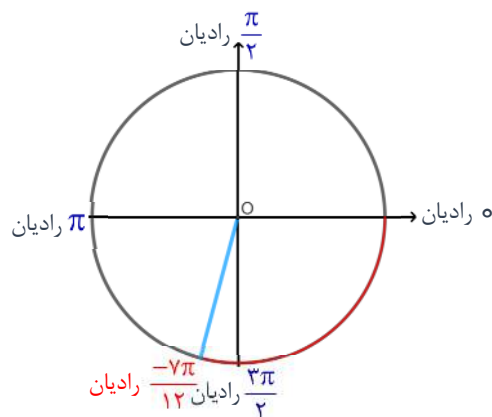
$$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$



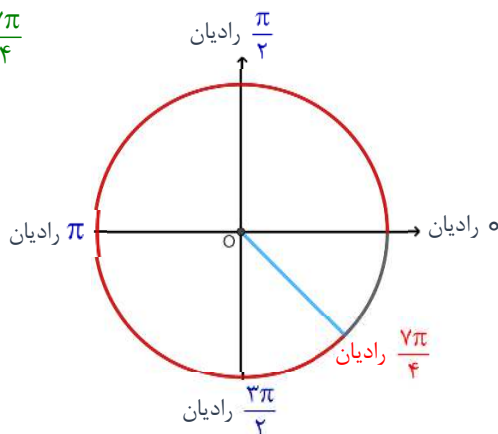
$$72^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$



$$-105^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} -\frac{7\pi}{12} \text{ رادیان}$$

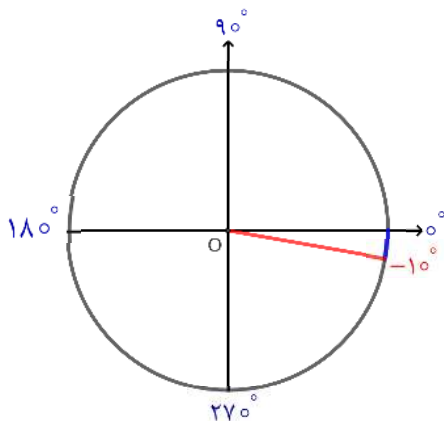


$$315^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} \frac{7\pi}{4} \text{ رادیان}$$

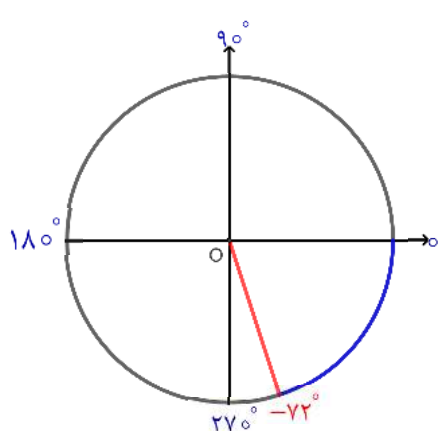


۲ هریک از زاویه‌های $\frac{\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

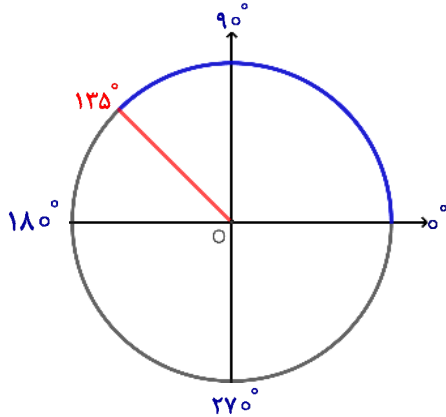
$$\frac{-\pi}{18} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$$



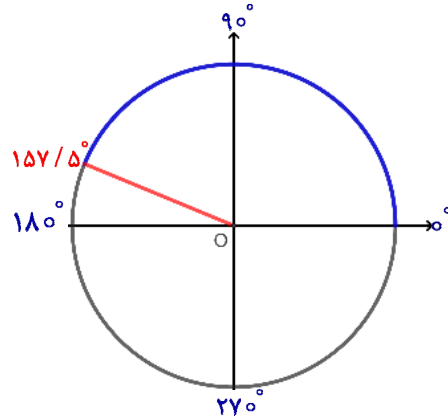
$$\frac{-2\pi}{5} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$$



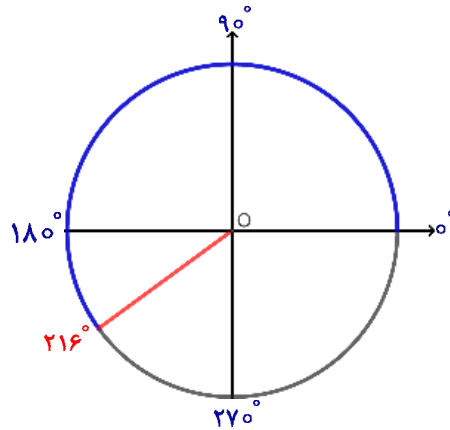
$$\text{رادیان } \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{54^\circ}{4} = 13.5^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{126^\circ}{8} = 15.75^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{108^\circ}{5} = 21.6^\circ$$



۳ زاویه D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{4}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{18^\circ}{4} = 4.5^\circ$$

راه اول :

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{18^\circ}{4} \Rightarrow D = 4.5^\circ$$

راه دوم :

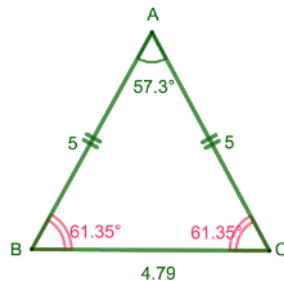
۴ دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول 8 سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

نکته : l و r هم واحد هستند و α بر حسب رادیان به دست می‌آید.

۵) درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هریک از ساق های آن است.



همانطور که قبلاً دیده ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با $57/3^\circ$ درجه است. بنا براین با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است؛ بنا براین اندازه هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به

دست آورد: $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 57/3^\circ}{2} = 61/35^\circ$ همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع روبه رو

به زاویه بزرگ تر، بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود. پس عبارت فوق درست است.

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان روبه روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی متر است.

این عبارت درست است زیرا: $\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi \approx 3/14 \text{ cm}$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: زیرا $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ بنا براین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد؛ زیرا بیش تر از π رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه 216° در ربع سوم است. $\frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{1080^\circ}{5} = 216^\circ$

ت) زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می دانیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است پس:

$$\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \quad \frac{7\pi}{36} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{1260^\circ}{36} = 35^\circ \quad \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$120^\circ + 20^\circ + 35^\circ = 175^\circ < 180^\circ$$

راه دوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{6300^\circ}{36} = 175^\circ < 180^\circ$$

راه سوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را
مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

$$0.5 \text{ رادیان} \approx \dots 28/6^\circ \dots$$

$$\frac{4}{5} \text{ رادیان} \approx \dots 45/8^\circ \dots$$

$$2 \text{ رادیان} \approx \dots 114/6^\circ \dots$$

$$3 \text{ رادیان} \approx \dots 171/9^\circ \dots$$

$$\frac{3}{14} \text{ رادیان} \approx \dots 179/9^\circ \dots$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ رادیان} \approx \dots 60^\circ \dots$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \approx \dots 45^\circ \dots$$

$$\pi \text{ رادیان} \approx \dots 180^\circ \dots$$

خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده
از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی
برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب
ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود
دارد. مثلاً برای محاسبه ۱ رادیان کافی
است حاصل $1 \times \frac{180}{\pi}$ را به دست آوریم که
تقریباً برابر با $57/3^\circ$ است.

$$0.5 \times \frac{180}{\pi} \approx 28/6^\circ, \quad \frac{4}{5} \times \frac{180}{\pi} \approx 45/8^\circ, \quad 2 \times \frac{180}{\pi} \approx 114/6^\circ$$

$$3 \times \frac{180}{\pi} \approx 171/9^\circ, \quad \frac{3}{14} \times \frac{180}{\pi} \approx 179/9^\circ, \quad \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \approx 60^\circ$$

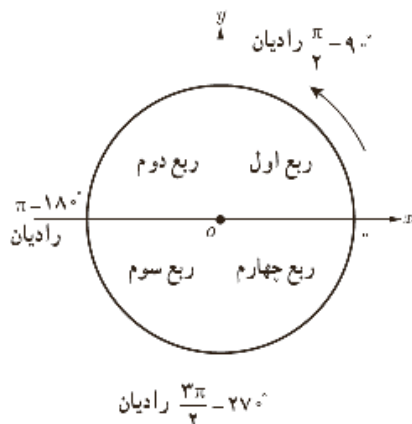
$$\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} \approx 45^\circ, \quad \pi \times \frac{180}{\pi} \approx 180^\circ$$

درس دوم روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

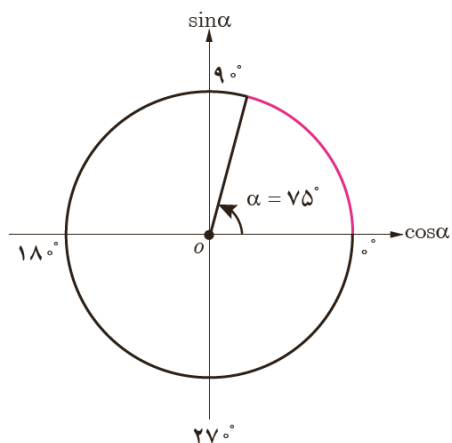
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

در شکل مقابل، یک دایره مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت
چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.

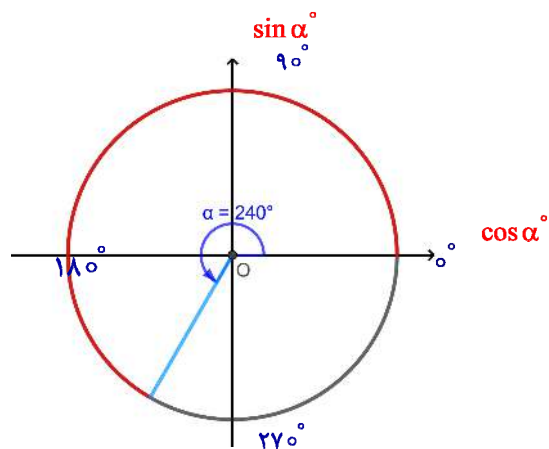
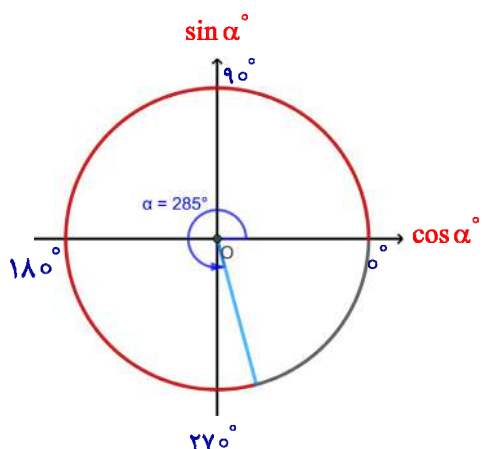
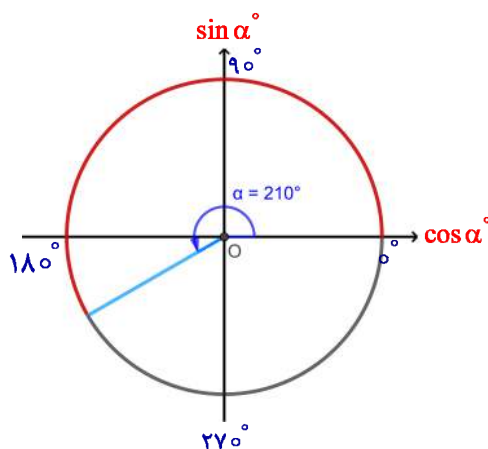
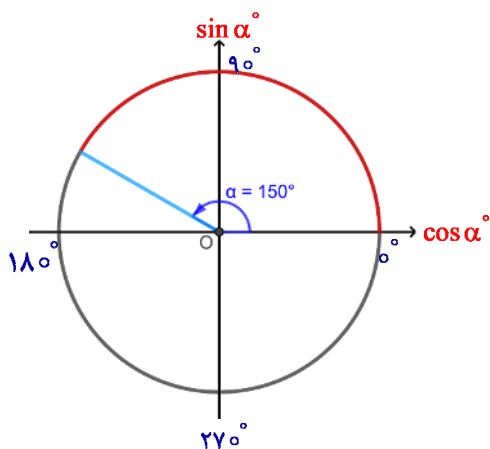


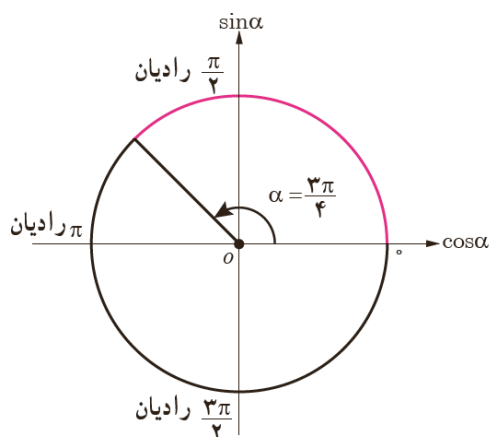
ربع نسبت مثلثاتی	اول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.



زاویه α	انتهای کمان روبه روی α	علامت نسبت مثلثاتی
75°	ربع اول	$\tan \alpha > 0$
150°	ربع دوم	$\sin \alpha > 0$
210°	ربع سوم	$\cos \alpha < 0$
240°	ربع سوم	$\cot \alpha > 0$
285°	ربع چهارم	$\tan \alpha < 0$





علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه روی α	زاویه α
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	رادیان $\frac{3\pi}{4}$
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	رادیان $\frac{4\pi}{5}$
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	رادیان $\frac{5\pi}{3}$
$\cos \alpha > 0$	ربع اول	رادیان $\frac{5\pi}{12}$
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	رادیان $\frac{5\pi}{4}$

بنابرین $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان از $\frac{\pi}{2}$ رادیان بیش تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

بنابرین $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{5}$ رادیان از π رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{3}$ رادیان از 2π رادیان کم تر است پس در ربع چهارم قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{12}$ رادیان از $\frac{\pi}{2}$ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان از π رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار دارد.

اگر $\sin \alpha = \frac{-1}{3}$ و انتهای کمان روبه روی به زاویه α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \longrightarrow \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

۳ اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل: چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha < 0$ لذا انتهای کمان α در ربع چهارم واقع است. بنابراین:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = \frac{5}{1} \longrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \longrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{2}$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید.

حل: چون $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ لذا انتهای کمان x در ربع دوم واقع است. بنا بر این:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \longrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} \longrightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \longrightarrow \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} \longrightarrow \tan x = \frac{-3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \longrightarrow \cot x = \frac{-4}{3}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α نسبت	رادیان = 0°	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = 30°	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = 45°	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = 60°	$\frac{\pi}{2}$ رادیان = 90°	π رادیان = 180°	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان = 225°	2π رادیان = 360°
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$

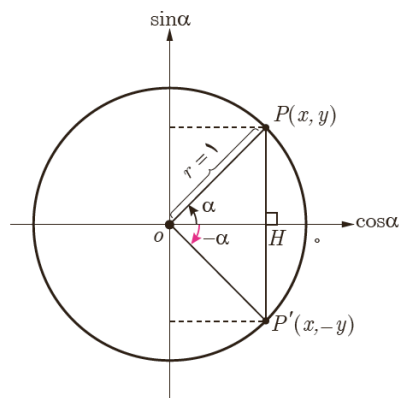
ب) $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \underbrace{\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ}_{1} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$

در ادامه می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha = 3^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -3° در $\triangle OP'H$ عبارت‌اند از:



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x, -y)$ است.

$$\sin(-3^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin 3^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\cos(-3^\circ) = \frac{x}{r} = \cos(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-3^\circ) = \frac{-y}{x} = -\tan(3^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(-3^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot(3^\circ) = -\sqrt{3}$$

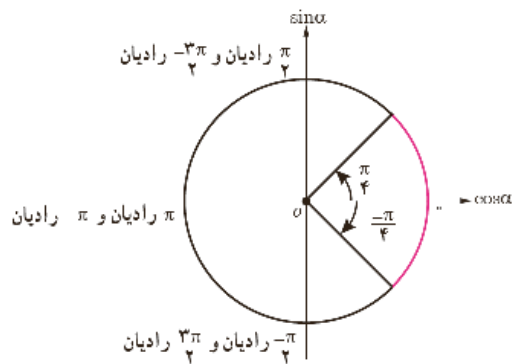
در حالت کلی:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{الف) } \frac{\cos(-9^\circ) + \sin(-27^\circ)}{\sin(-18^\circ) - \cos(-36^\circ)} = \frac{\cos 9^\circ - \sin 27^\circ}{-\sin 18^\circ - \cos 36^\circ} = \frac{0 - (-1)}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

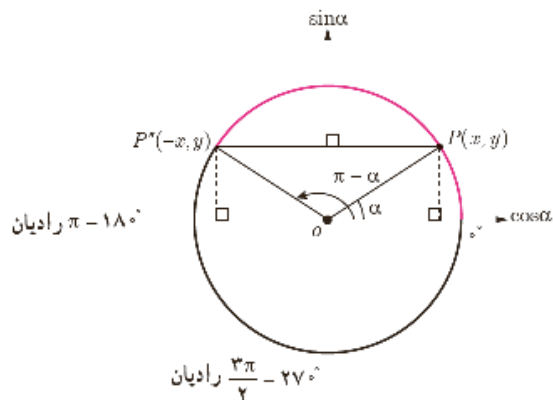
$$\text{ب) } \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \cos(-45^\circ) \times \cos(-6^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-6^\circ) &= \cos(45^\circ) \times \cos(6^\circ) + (-\sin(45^\circ)) \times (-\sin(6^\circ)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

دو زاویه α و β را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه 3° و 15° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایره مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 3^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'' و انتهای کمان زاویه 15° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° عبارت‌اند از:



$$\sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = y = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(18^\circ - 3^\circ) = -x = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 3^\circ$$

قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x, y)$ است.

در حالت کلی :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

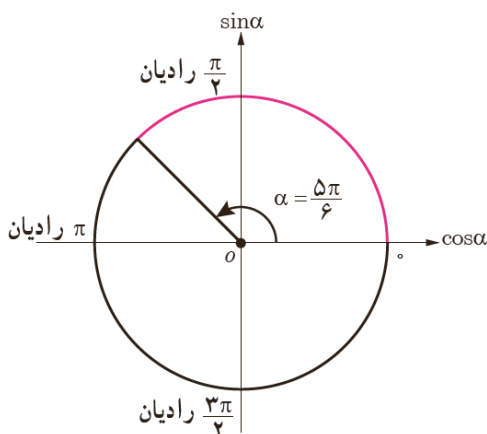
الف 75° مکمل زاویه 75° ، زاویه 105° است. $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

ب -25° مکمل زاویه -25° ، زاویه 205° است. $180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$

پ رادیان $\frac{\pi}{12}$ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان، زاویه $\frac{11\pi}{12}$ رادیان است. $\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

ت رادیان $\frac{-\pi}{4}$ مکمل زاویه $\frac{-\pi}{4}$ رادیان، زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان است. $\pi - (\frac{-\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4}$

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.



$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \cot(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 12^\circ = \sin (18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot (-12^\circ) = -\cot (12^\circ) = -\cot (18^\circ - 6^\circ) = -(-\cot 6^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\cos (135^\circ) = \cos (18^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه 21° در ربع سوم واقع است. در ضمن $21^\circ = 18^\circ + 3^\circ$ ، یعنی اختلاف دو زاویه 21° و 3° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 3^\circ$ آنگاه با

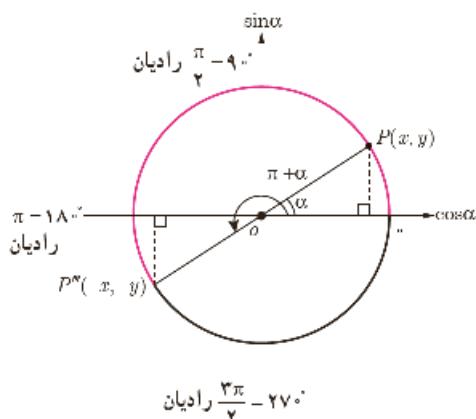
توجه به مختصات نقطه P''' ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° عبارت‌اند از:

$$\sin 21^\circ = \sin (18^\circ + 3^\circ) = -y = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 21^\circ = \cos (18^\circ + 3^\circ) = -x = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 21^\circ = \frac{\sin 21^\circ}{\cos 21^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 3^\circ$$

$$\cot 21^\circ = \frac{1}{\tan 21^\circ} = \sqrt{3} = \cot 3^\circ$$



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است.

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

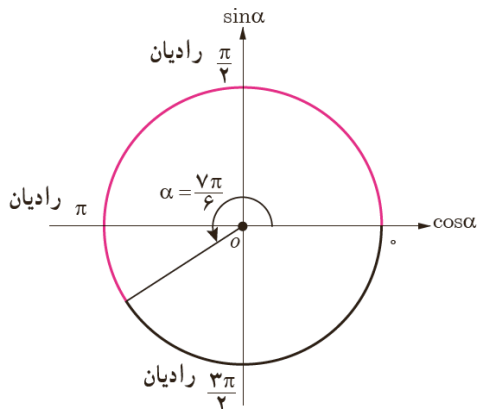
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{7\pi}{6} = \cot(\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

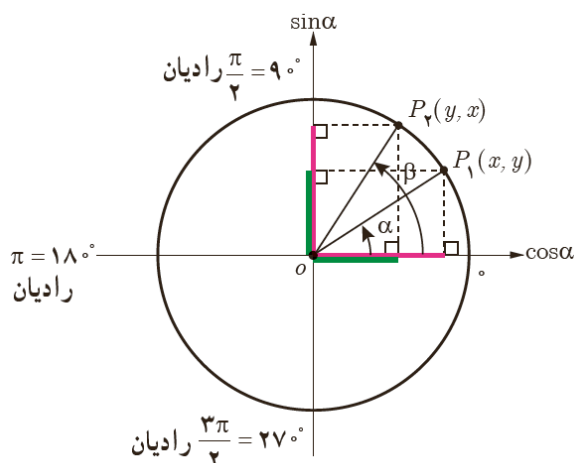
$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1 \dots \dots \dots$$

$$\cos(\frac{-4\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots$$

$$\sin(\frac{-7\pi}{6}) = -\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -(-\sin(\frac{\pi}{6})) = \frac{1}{2}$$

$$\cot(\frac{5\pi}{4}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(\frac{\pi}{4}) = 1 \dots \dots \dots$$

دو زاویه α و β را متمم گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویه $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت:



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

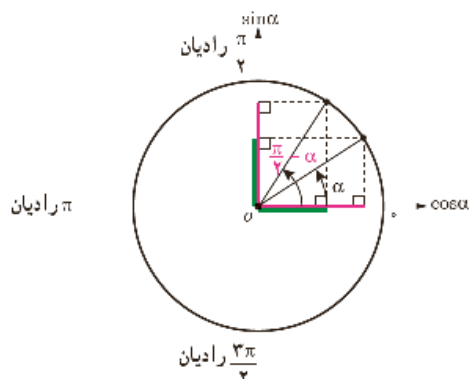
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

همچنین زاویه 0° و $\frac{\pi}{2}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0^\circ = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \cot 0^\circ = \text{تعریف نشده}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

در حالت کلی:

به عبارت دیگر: اگر دو زاویه α و β متمم باشند (رادیان $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$) آنگاه سینوس کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

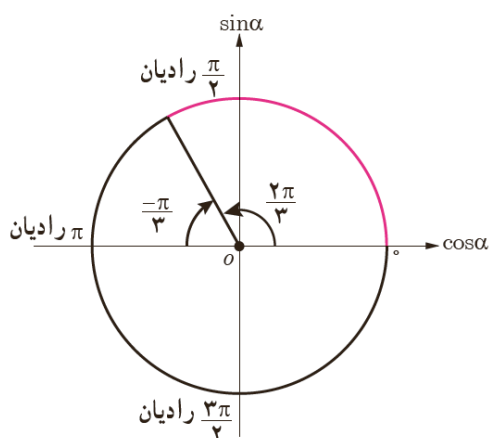
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید.

چون انتهای کمان زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول - زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. بنابراین:



$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

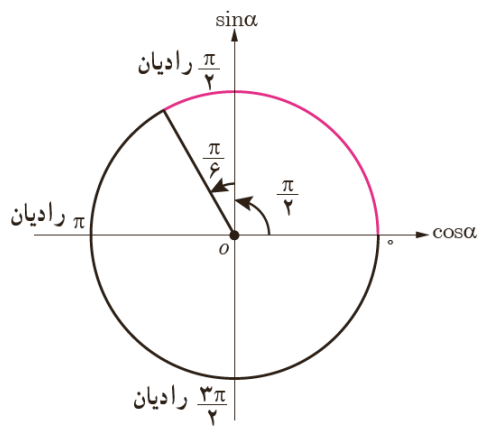
$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

روش دوم - اختلاف دو زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{6}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{2}$ رادیان است؛ یعنی

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

یا به عبارتی $\frac{2\pi}{3} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $-\frac{\pi}{6}$ متمم هم هستند. با توجه قانون نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه متمم داریم :

$$\begin{cases} \sin \frac{2\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{2\pi}{3} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \begin{cases} \tan \frac{2\pi}{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} \\ \cot \frac{2\pi}{3} = \tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ازطرفی با توجه به تساوی $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ به جای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مقدار مساوی آن یعنی $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$ رادیان را قرار دهیم .

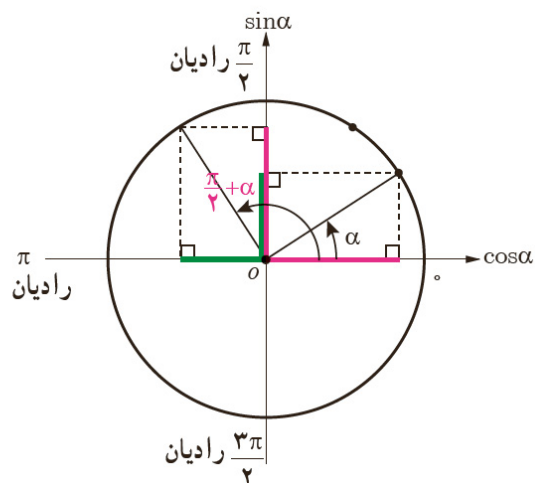
در حالت کلی :

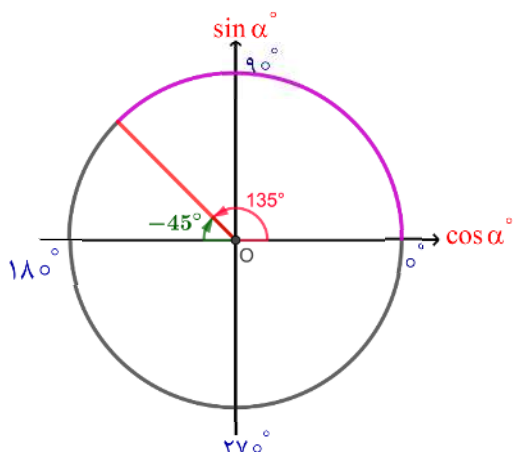
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$





نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به دست آورید.

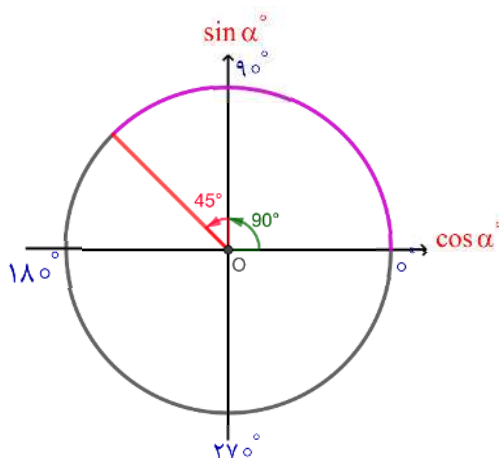
راه اول :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$



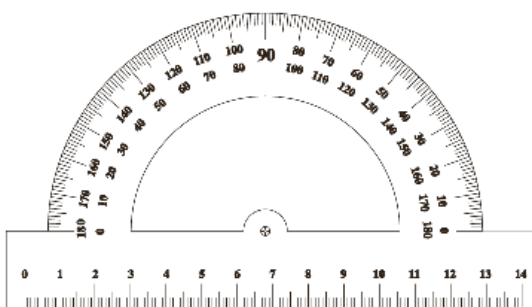
راه دوم :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$



به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :

۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟

(مثلاً $\sin ۱^\circ = \sin ۱۷^\circ$)

می دانیم زاویه های مکمل دارای سینوس های برابر هستند.

$$\sin ۲^\circ = \sin ۱۶^\circ, \sin ۳^\circ = \sin ۱۵^\circ$$

$$\sin ۴^\circ = \sin ۱۴^\circ, \sin ۵^\circ = \sin ۱۳^\circ$$

$$\sin ۶^\circ = \sin ۱۲^\circ, \sin ۷^\circ = \sin ۱۱^\circ$$

$$\sin ۸^\circ = \sin ۱۰^\circ$$

بنا براین داریم :

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان $= ۹۰^\circ$ می‌شود؟
نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

به عنوان مثلاً می‌توانیم ۱۲۰° و ۳۰° یا ۱۳۵° و ۴۵° یا ۱۵۰° و ۶۰° اشاره کنیم.

به عنوان مثال می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° را به کمک نسبت‌های مثلثاتی ۶۰° به دست آوریم:

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{3}$$

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

خیر نمی‌توان یافت با توجه به روابطی که برای زوایا مکمل، متمم و دو زاویه که اختلاف آن‌ها ۹۰° ($\frac{\pi}{2}$) باشد، کسینوس‌ها برابر نیستند.

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۸۰° را از روی مکمل آن بیابید.

مکمل زاویه ۱۸۰° زاویه ۰° است. بنا براین داریم:

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۸۰^\circ) = \sin ۰^\circ = ۰$$

$$\cos ۱۸۰^\circ = -\cos ۰^\circ = -۱$$

$$\tan ۱۸۰^\circ = -\tan ۰^\circ = ۰$$

$$\cot ۱۸۰^\circ = -\cot ۰^\circ = \text{تعریف نشده}$$

۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را از روی مکمل آن بیابید.

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

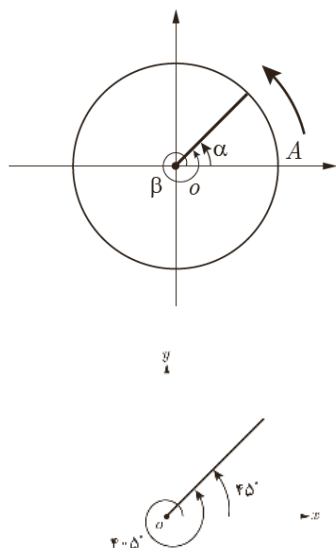
$$\cos ۱۳۵^\circ = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

فعالیت



یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایره مثلثاتی نقطه A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایره مثلثاتی یعنی 360° بزرگ‌ترند مانند زاویه 405° .

برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامه زاویه را که به اندازه 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه 405° و 45° را هم انتها می‌نامیم.

دو زاویه α و β را هم انتها گوئیم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل). اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً زاویه‌های 405° و 45° هم انتها هستند؛ زیرا $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 405° و 45° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویه 45° در ربع اول است، بنابراین:

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$

$$\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$

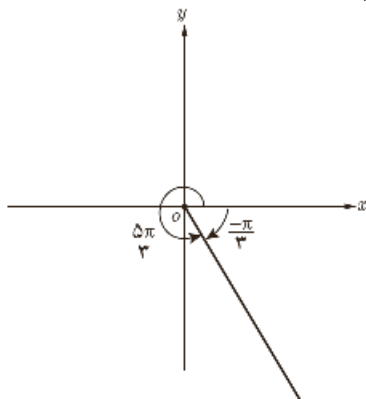
$$\tan 405^\circ = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1 \dots$$

$$\cot 405^\circ = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1 \dots$$

حال همین بررسی را روی زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ بنابراین

دو زاویه $-\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).

چون انتهای کمان زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین:



$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dots$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{3} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k ,

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

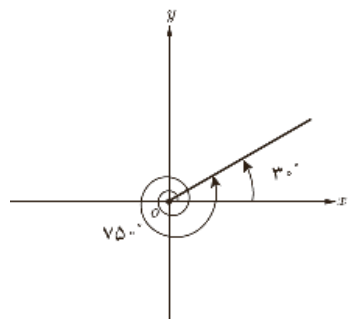
$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

کار در کلاس



مطابق نمونه هر یک از نسبت های مثلثاتی زاویه های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$$\sin 75^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(36^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$1 \quad \cos 3^\circ = \cos(36^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2 \quad \sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3 \quad \tan(-225^\circ) = -\tan(225^\circ) = -\tan(36^\circ - 135^\circ) = -(-\tan 135^\circ) = \tan 135^\circ = 1$$

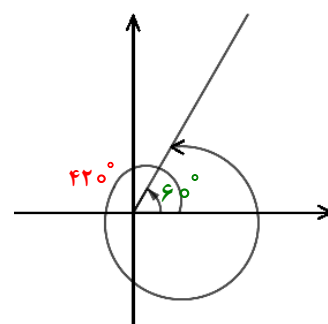
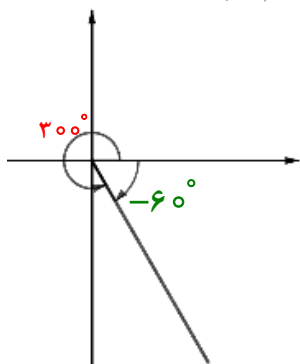
$$4 \quad \cot(-33^\circ) = -\cot(33^\circ) = -\cot(36^\circ - 3^\circ) = -(-\cot 3^\circ) = \cot 3^\circ = \sqrt{3}$$

$$5 \quad \sin \frac{11\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6 \quad \cos(-\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

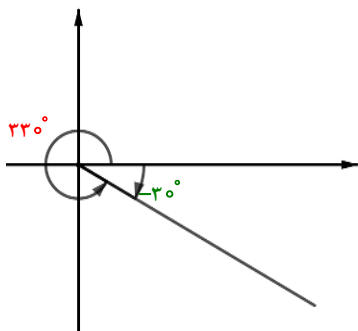
دو زاویه 30° و -6° هم انتها هستند.

دو زاویه 6° و 42° هم انتها هستند.

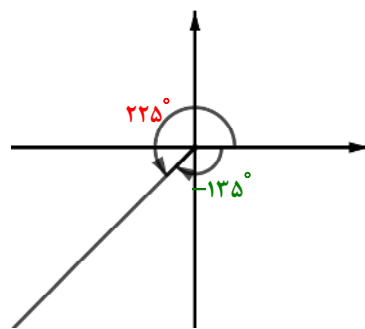


تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

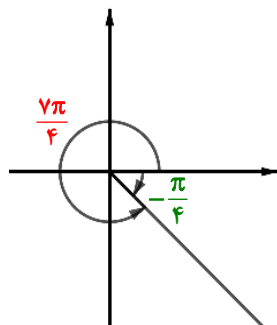
دو زاویه ۳۳° و -۳° هم انتها هستند.



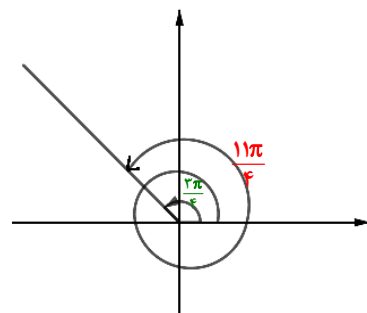
دو زاویه ۲۲۵° و ۱۳۵° هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{7\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هم انتها هستند.



تمرین

۱) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲^\circ = \tan(۱۸^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸^\circ - ۶^\circ) = -\tan ۴۵^\circ + (-\cot ۶^\circ) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\cos(-۲۱^\circ) + \cot(۲۴^\circ) = \cos ۲۱^\circ + \cot(۲۴^\circ) = \cos(۱۸^\circ + ۳^\circ) + \cot(۱۸^\circ + ۶^\circ)$
 $= -\cos ۳^\circ + \cot ۶^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

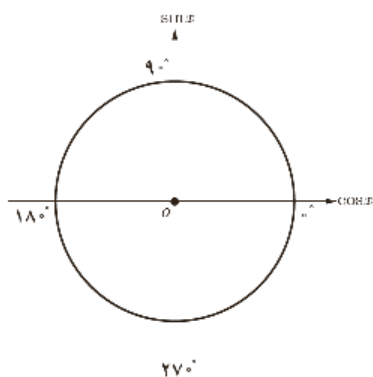
پ) $\sin ۶۳^\circ + \tan(-۵۴^\circ) = \sin ۶۳^\circ - \tan ۵۴^\circ = \sin(۲ \times ۳۶^\circ - ۹^\circ) - \tan(۳۶^\circ + ۱۸^\circ)$
 $= -\sin ۹^\circ - \tan ۱۸^\circ = -1 + 0 = -1$

ت) $\cos(-۷۲^\circ) + \cot(-۶^\circ) + \tan ۷۲^\circ - \tan(-۶^\circ) =$
 $= \cos ۷۲^\circ - \cot ۶^\circ + \tan ۷۲^\circ + \tan ۶^\circ$
 $= \cos(۲ \times ۳۶^\circ + 0) - \cot(۲ \times ۳۶^\circ - ۱۲^\circ) + \tan(۲ \times ۳۶^\circ + 0) + \tan(۲ \times ۳۶^\circ - ۱۲^\circ)$
 $= \cos^\circ - (-\cot ۱۲^\circ) + \tan^\circ - \tan ۱۲^\circ = \cos^\circ + \cot(۱۸^\circ - ۶^\circ) + \tan^\circ - \tan(۱۸^\circ - ۶^\circ)$
 $= \cos^\circ - \cot ۶^\circ + \tan^\circ + \tan ۶^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$

$$\text{ث) } \sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} &= \frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{-4 - \sqrt{6}}{10} \end{aligned}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید :



زاویه x نسبت	12°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$

$$\sin 84^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(36^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

پ) $\tan(-100^\circ) = \tan 8^\circ$

$$\tan(-100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(3 \times 36^\circ - 8^\circ) = -(-\tan 8^\circ) = \tan 8^\circ$$

ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

$$\sin 875^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم انتها هستند. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف هر دو زاویه ارائه شده

$$875^\circ - 155^\circ = 720^\circ = 2 \times 360^\circ$$

در هر قسمت مضربی از 2π رادیان یا 360° است :

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید :

الف) $\sin x = \cos (2^\circ + x)$

$$x + 2^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow x = 44^\circ$$

با توجه به رابطه‌ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$

$$x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

با توجه به رابطه‌ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

آیا برای زاویه x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، می‌توانیم زوایای فوق را به دست آوریم اما برای یکتایی پاسخ ارائه شده می‌توانیم توضیح دهیم که می‌توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی‌های فوق صدق کنند کافی است مضارب 2π رادیان یا 360° را به این زوایا اضافه کنیم مثلاً: برای قسمت (الف) $x = 394^\circ$ یا برای قسمت (ب) $x = \frac{19\pi}{9}$ نیز قابل قبول هستند.



توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

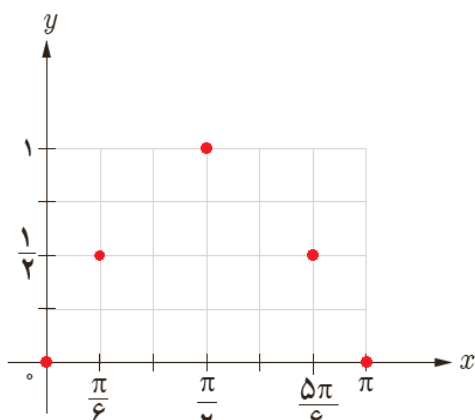
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

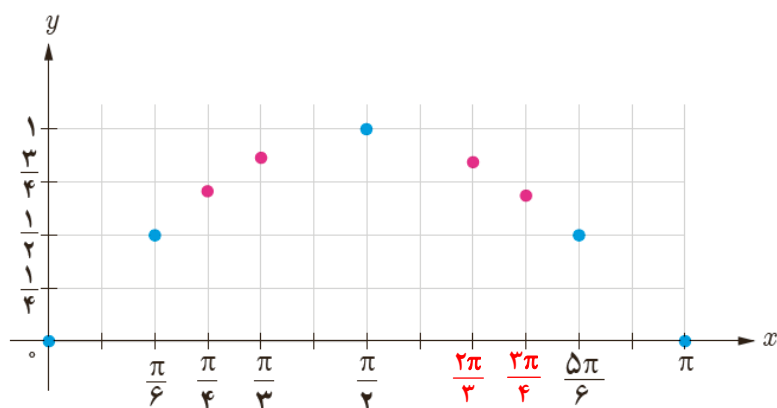
$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0) \right\}$$

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$
$\frac{\pi}{2}$	1	$(\frac{\pi}{2}, 1)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$
π	0	$(\pi, 0)$

۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.



۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ به جدول بالا، شکل زیر به دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$)

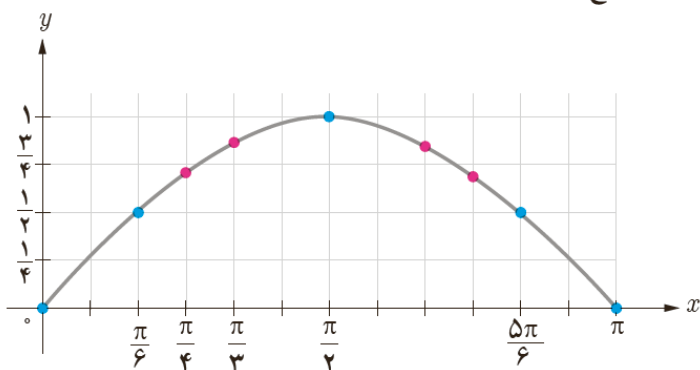


۴ نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل

مقابل به دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این

شکل به طور دقیق‌تری به دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس

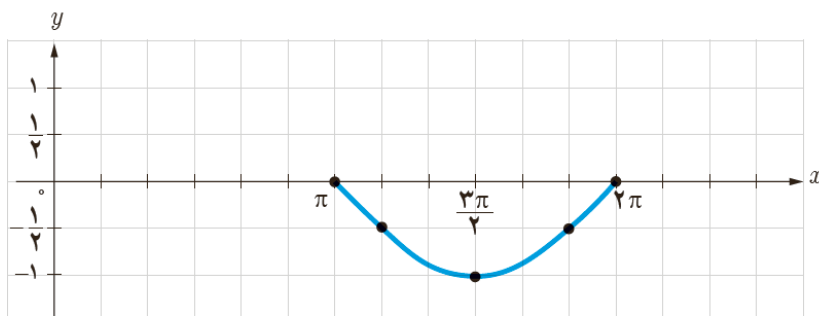
با ضابطه $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



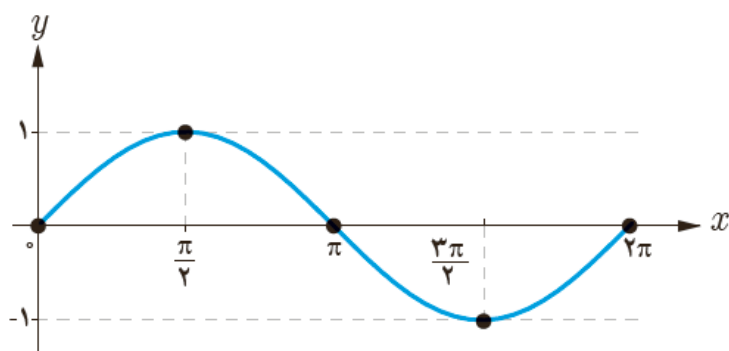
۵ مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید.

برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi, 0)$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
$\frac{3\pi}{2}$	-۱	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
2π	۰...	$(2\pi, 0)$



۶ با توجه به شکل های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را درباره مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم منفی است.

۷ با توجه به رابطه $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، که در درس قبل آشنا شدید می توان گفت :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییری نمی کند
بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است.

همچنین داریم :

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

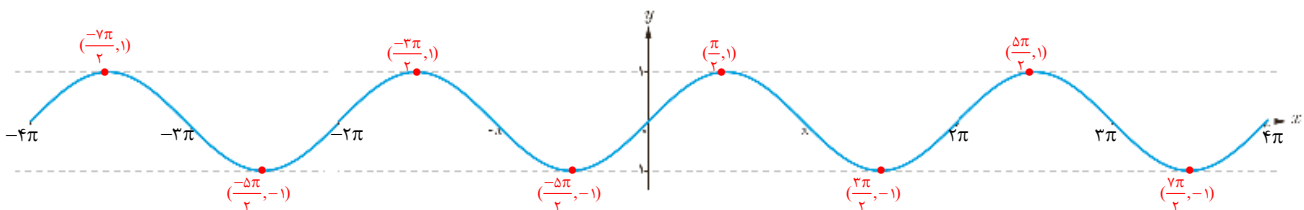
در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند،

نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ و $[-2k\pi, -2(k+1)\pi]$ یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در

بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در 2 تکرار رسم شده است. این نمودار را برای 4 تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر با **صفر** است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با **۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{5\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

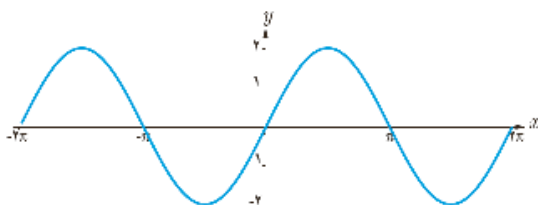
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با **-۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $x = \frac{7\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱ $y = 2 \sin x$



(الف)

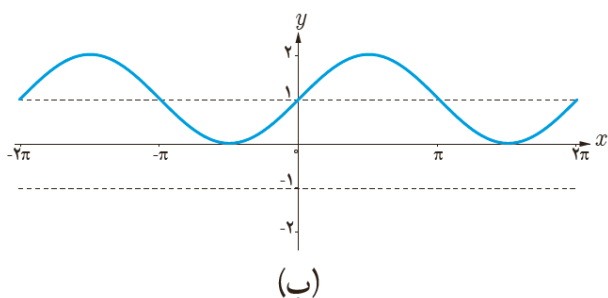
برای رسم نمودار این تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چون برد تابع بازه $[-2, 2]$ است،

کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم.

نمودار حاصل در بازه $[-2\pi, 0]$ نیز تکرار می‌شود. و شکل مقابل به دست

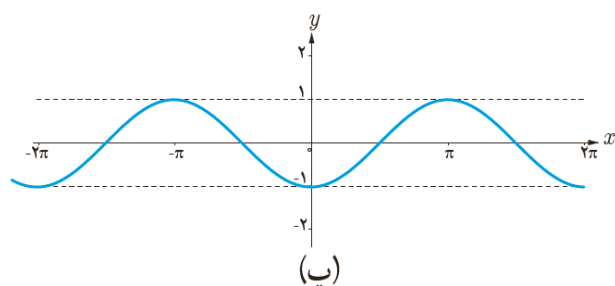
می‌آید.

$$۲ \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$



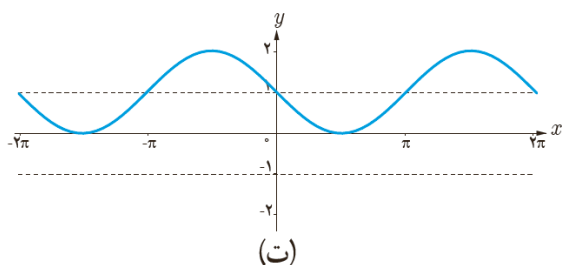
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

$$۳ \quad y = \sin x + 1$$



برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد در جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

$$۴ \quad y = -\sin x + 1$$



برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = -\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

به این ترتیب مجموعه زوج های مرتب زیر به دست می آید.

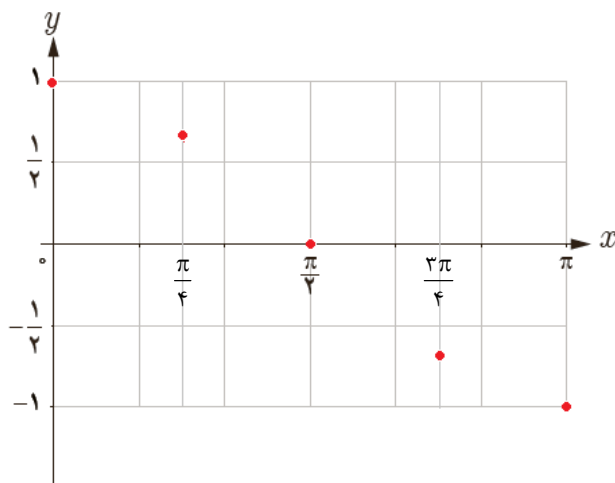
$$f = \left\{ \left(0, 1\right), \left(\frac{\pi}{4}, 0/\sqrt{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 0/\sqrt{2}\right), \left(\pi, 1\right) \right\}$$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می کند؟

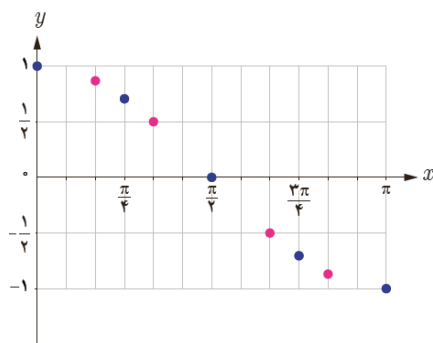
بله یک تابع را مشخص می کند.

x	$y = \cos x$	مختصات نقطه
۰	۱	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0/\sqrt{2}$	$(\frac{\pi}{4}, 0/\sqrt{2})$
$\frac{\pi}{2}$	۰	$(\frac{\pi}{2}, 0)$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0/\sqrt{2}$	$(\frac{3\pi}{4}, -0/\sqrt{2})$
π	-۱	$(\pi, -1)$

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.



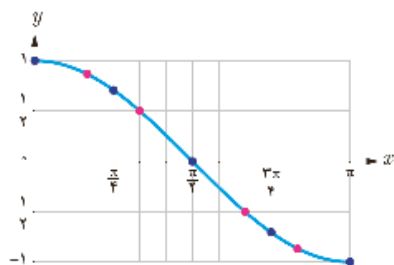
۳ نقاط به طول‌های $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{3} \approx 1.7$).



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

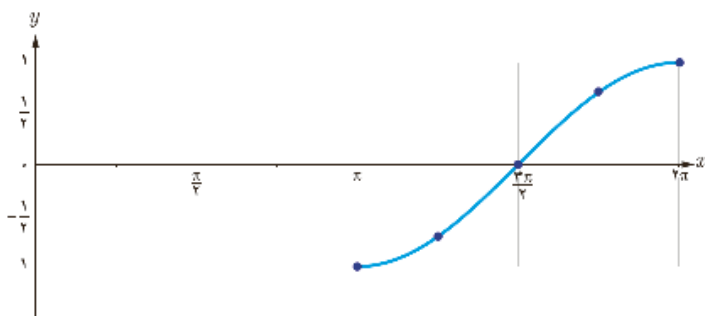
۴ نقاط شکل صفحه قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید.

این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ را در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.



۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل

به‌دست آید.



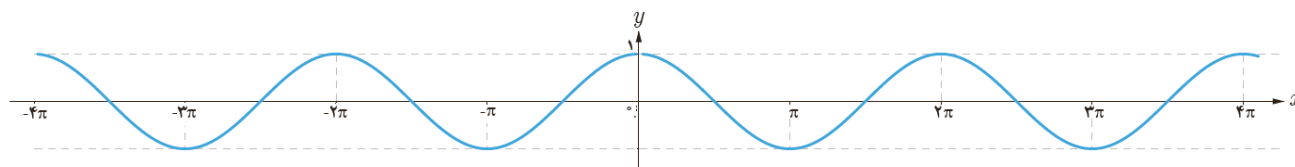
x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	2π
y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \cos x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x = \frac{k\pi}{2}$ برابر با صفر است. ($k \in \mathbb{Z}$)

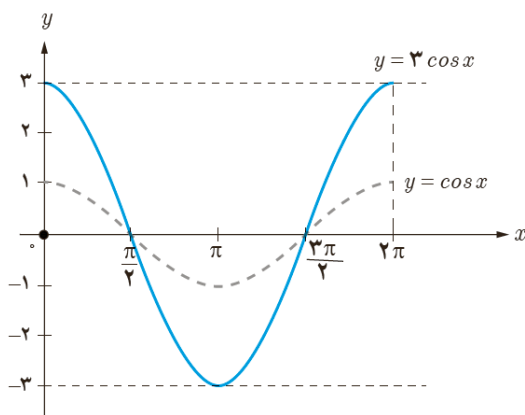
پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس 1 است که در طول‌های $x = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس -1 است که در طول‌های $x = (2k+1)\pi$ به دست می‌آید. ($k \in \mathbb{Z}$)

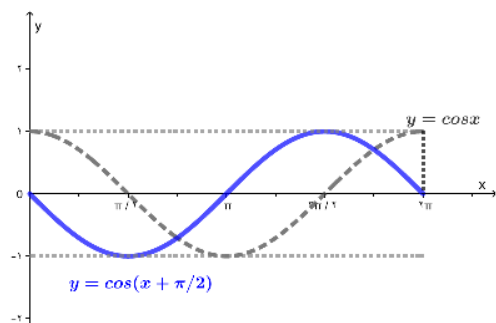
کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3 \cos x$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را

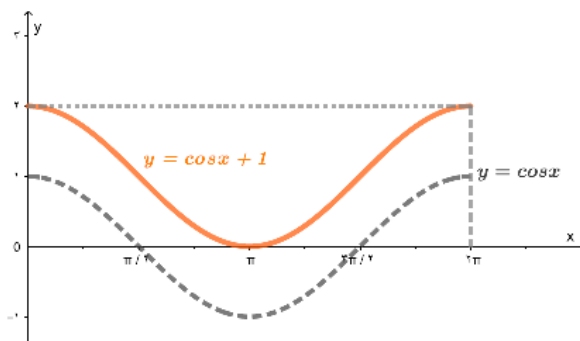
در بازه $[0, 2\pi]$ ، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



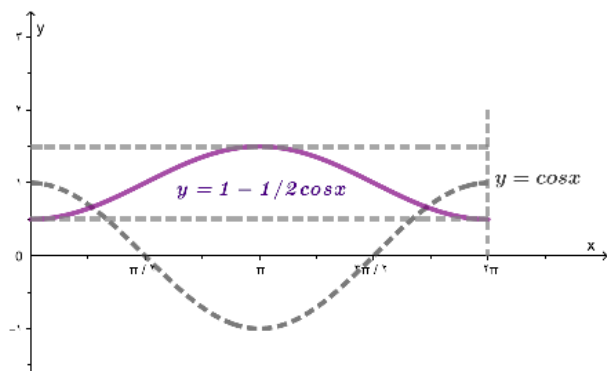
۱) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$



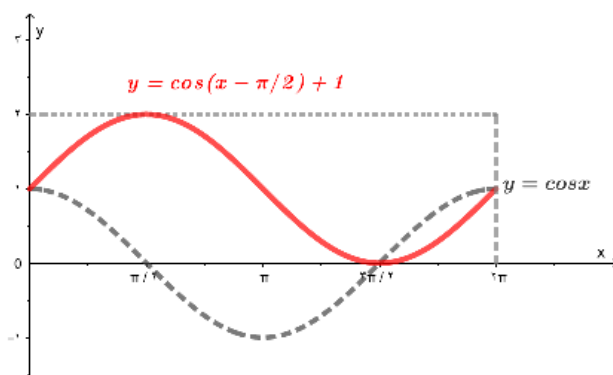
۲) $y = \cos x - 1$



۳) $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$



۴) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



تمرین

۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

$y = \cos(2\pi - x) = \cos x$

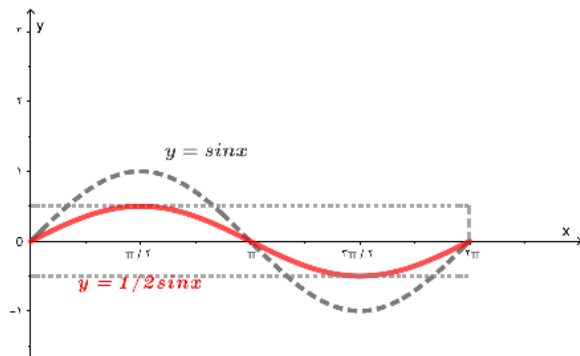
بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$۴) y = \sin x, \quad y = \sin(\Delta\pi - x)$$

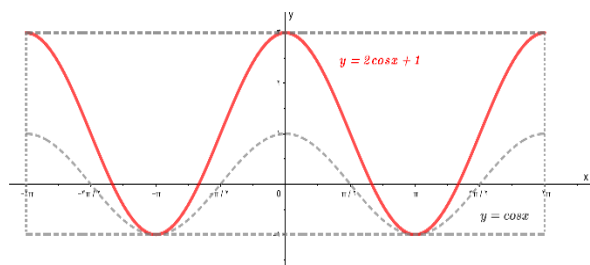
$y = \sin(\Delta\pi - x) = \sin(۴\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

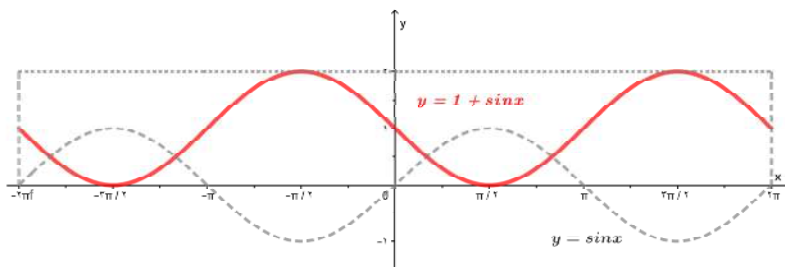
$$۱) y = \frac{1}{2} \sin x, \quad [0, 2\pi]$$



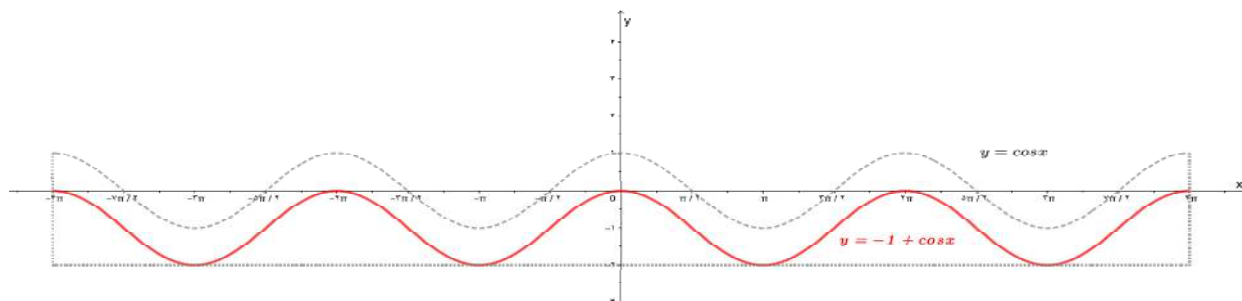
$$۲) y = 2 \cos x + 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



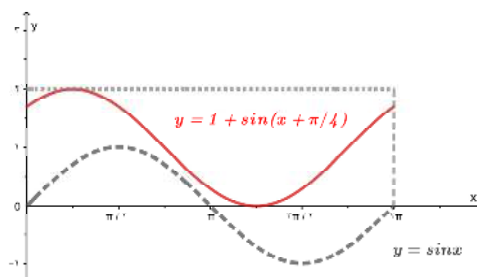
$$۳) y = 1 - \sin x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



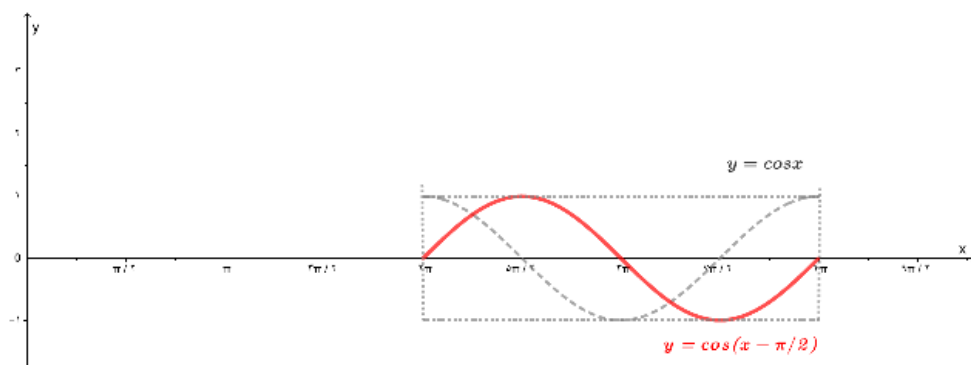
$$۴) y = -1 + \cos x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



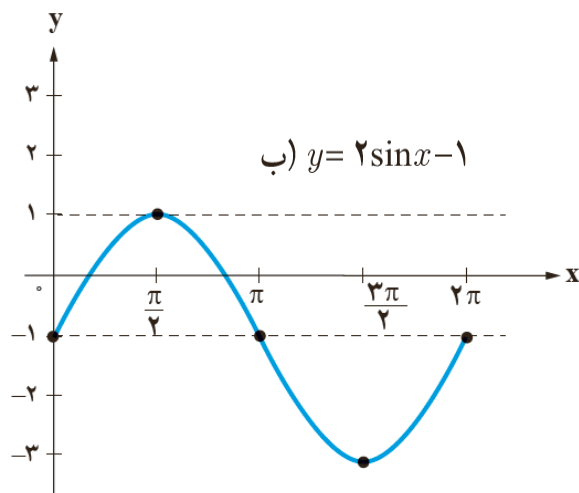
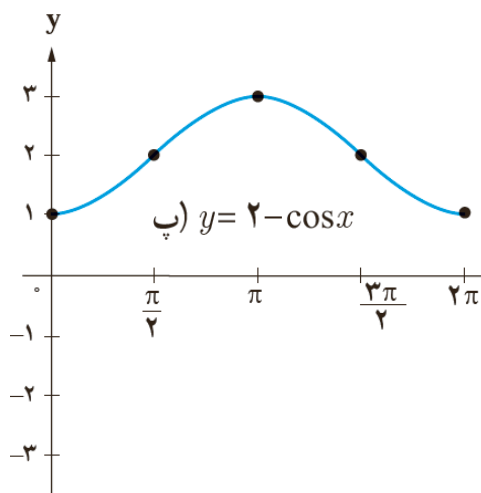
$$۵) y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4}), \quad [0, 2\pi]$$



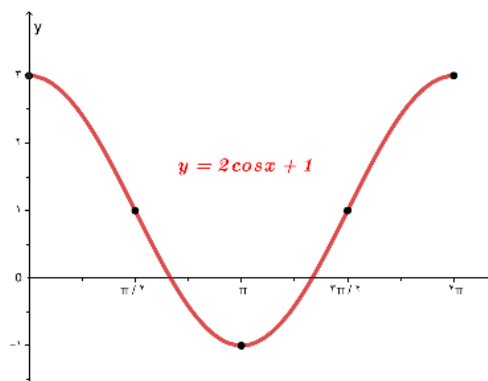
۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $[2\pi, 4\pi]$



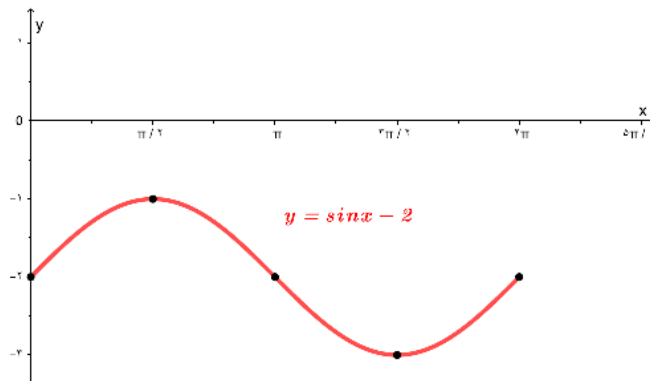
۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



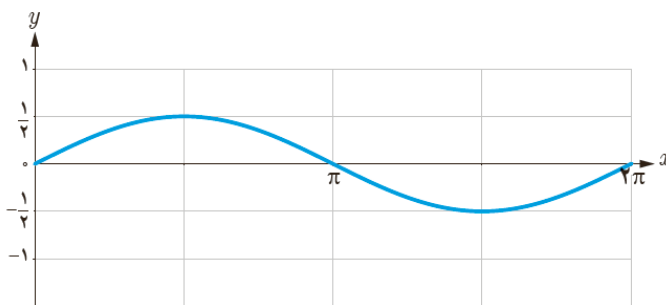
الف) $y = 2 \cos x + 1$



ت) $y = \sin x - 2$

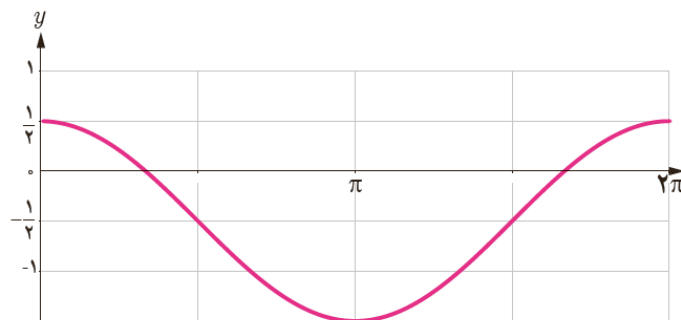


۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟
 الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4} \sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است. در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را نشان می‌دهد.



درست است نمودار تابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.
 ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است.

