درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

کار در کلاس صفحه ۲

نتیجه‌ی استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱-هیچ عدد مرکّبی، عددی اوّل نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عددی اول نیست.

۲- اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن‌گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

کار در کلاس صفحه ۳

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را در صورت امکان تعیین کنید.

ایران کشور آسیایی است.	گزاره‌ای درست است.
در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است.	گزاره‌ای درست است.
ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.	گزاره نیست.
آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟	گزاره نیست.
هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت.	گزاره است ولی ارزش آن را نمی‌توان مشخص کرد
هر معادله درجه دوم دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.	گزاره‌ای نادرست است.
صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.	گزاره‌ای نادرست است.

کار در کلاس صفحه ۴

ارزش‌های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه‌رو $8 = 2^3$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

- به نظر شما جدول ارزش‌های چهارگزاره، چند حالت دارد؟ $16 = 2^4$ حالت دارد.
- با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟ 2^n حالت دارد.

فعالیت صفحه ۵

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{2}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(3x + 2y = 6)$

۱- ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

ارزش هیچ یک را نمی‌توان تعیین کرد.

۲- اگر به جای متغیر در جمله‌ی «a عددی فرد است» قرار دهیم $a = 3$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید. اگر در آن $a = 4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

اگر $a = 3$ باشد، ارزش این گزاره درست است و اگر $a = 4$ باشد، ارزش این گزاره نادرست است.

کار در کلاس صفحه ۵

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $A = \{۲ ، ۴ ، ۶\}$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر مجموعه‌ی سه عضوی بدون تکرار از بین اعداد ۱ تا ۶ را می‌توان قرار داد.

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $A = \{۱\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله‌ی ب مجموعه A را یک مجموعه‌ای غیر از مجموعه‌ی سه عضوی قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

اگر در جمله‌ی «پ» قرار دهیم ... $= x$ و ... $= y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x =$ ... و ... $= y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

اگر در جمله پ، x و y را به این صورت قرار دهیم ارزش گزاره حاصل درست می‌شود: $\begin{cases} x = ۰ \ , \ y = ۳ \\ y = ۰ \ , \ x = ۲ \end{cases}$ و هر زوج

مرتب دیگری به غیر از (۰،۳) , (۲،۰) قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۶

دامنه‌ی متغیر گزاره نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آن‌ها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D = Z)$

$\{x = ۷k \ , \ k \in N\}$

ب) $۱۵x^۲ - ۷x - ۸ = ۰ \ (D = Z)$

با حل معادله‌ی درجه ۲ داریم:

$$\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \dfrac{-۸}{۱۵} \end{cases}$$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{۱}{۶}$. $\left(D = \{۱، ۲، ... ،۶\}\right)$

$x = ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶$

فعالیت صفحه ۶

۱-هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲- آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- **عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.** از دو گزاره تشکیل شده. نادرست
- **عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است.** از دو گزاره تشکیل شده. درست
- **اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.** از دو گزاره تشکیل شده. نادرست
- **چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.** از یک گزاره تشکیل شده. نادرست
- **اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.** از دو گزاره تشکیل شده. نادرست

فعالیت صفحه ۸

گزاره‌ی مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است».

- **آیا ارزش این گزاره‌ی مرکب درست است؟** نادرست

- **فرض کنید:**

p: سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q: **پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.**

- **اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟** نادرست
- **اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟** نادرست
- **هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟** نادرست
- **هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟** درست

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند و در بقیه‌ی حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس صفحه ۸

۱- جدول زیر را کامل کنید.

گزاره‌ی p	گزاره‌ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست.	ن	د	د	ن
۲ عددی اوّل است.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	د	ن	د	ن
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	ن	ن	ن	ن
(۷-) اوّل است.	۲ عددی اول است.	ن	د	د	ن

۲. با کامل کردن جدول ارزش‌ها. نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همانطور که ملاحظه می‌کنید، همه‌ی حالت‌های ارزش دو گزاره‌ی $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان‌اند پس $(\sim p\wedge\sim q)\ \equiv\ \sim p\wedge\sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی قانون دمورگان گفته می‌شود.

۳-با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q) \equiv \sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

کار در کلاس صفحه ۱۰

۱-با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲-گزاره‌ی «$q \Rightarrow p$» عکس ترکیب شرطی «$p \Rightarrow q$» و گزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید:

الف) $(p \Rightarrow p\vee q) \equiv T$

p	q	$p\vee q$	$p \Rightarrow p\vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	د	ن	د

ب) $(p\wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

کار در کلاس صفحه ۱۲

۱-با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره‌ی مرکب «$p \Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۲. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی:

$p\wedge q \equiv q\wedge p$

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$p\vee q \equiv q\vee p$

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ب) قوانین شرکت‌پذیری:

$(p\vee q)\vee r \equiv p\vee(q\vee r)$

p	q	r	$p\vee q$	$q\vee r$	$(p\vee q)\vee r$	$p\vee(q\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

پ) قوانین توزیع پذیری:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

کار در کلاس صفحه ۱۴

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^۲ \geq ۰$	$\forall x \in R\,;\, x^۲ \geq ۰$
برای هر عدد زوج صحیح a داریم: $a = ۲\,k$	$\forall a \in E\,;\, a = ۲\,k\ (k \in Z)$
بعضی از اعداد اول زوج هستند.	$\exists\, p \in P\,;\, p = ۲\,k\ \ (k \in Z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists\, x \in o\,;\, x \in P$

کار در کلاس صفحه ۱۵

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اوّل، فرد است.

نادرست، زیرا ۲ عددی اول است و زوج است.

ب) $\exists\, x \in N\,;\, ۲x^۲ + ۳\,x + ۱ = ۰$

خیر زیرا با حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ داریم: $\begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$ که جواب‌ها عدد طبیعی نیستند.

پ) $\exists\, x \in Z\,;\, ۲x^۲ + ۳\,x + ۱ = ۰$

درست، با توجه به جواب‌های معادله که عضوی از مجموعه‌ی اعداد صحیح هستند.

ت) هر عدد زوج، غیر اوّل است.

نادرست، زیرا ۲ عددی زوج است و اول است.

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است.

بله، زیرا متغیرهای ترتیبی شدت و ضعف یک ویژگی را بیان می‌کنند.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. درست

چ) در فضای نمونه‌ی S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > ۱$.

نادرست، زیرا همواره $P(A) \leq ۱$ می‌باشد.

ح) طول هر پاره‌خط، عدد حقیقی است.

نادرست، زیرا طول پاره‌خط منفی نمی‌تواند باشد.

تمرین های صفحه ۱۷

۱. از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. گزاره هست- نادرست

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. گزاره هست - درست

پ) $۳ + ۵ > ۶$ گزاره هست- درست

ت) تخته سیاه را پاک کنید. گزاره نیست

ث) $\{۱\} \in \{۱,۲,۳,۴\}$ گزاره هست- درست

ج) چه باران شدیدی می آید. گزاره نیست

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. گزاره هست- غلط

ح) $\emptyset \not\subset \mathbb{R}$ گزاره هست- غلط

خ) $\sqrt{۲} \in \mathbb{Z}$ گزاره هست- غلط

د) عدد $۵^{۹} + ۸$ عددی اول است. ؟؟؟

ذ) به امید کامیابی شما. گزاره نیست

ر) آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. گزاره هست- درست

۲. در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷ \times ۱ = -۷$

ب) $۵ + \frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸ \times ۱}{۴} \in \{۲, \frac{۱}{۲}\}$

ت) $\frac{۱۰۲۹}{۲} > ۵ \times ۳$

ث) $۰ \times \sqrt{۲} = ۰$

ج) $۱ \in \{۱\}$

چ) $۵(۷ - ۳) = ۲۰$

ح) $۷(۸ - ۳) = ۳۵$

۳. دامنه ی متغیر هر یک از گزاره نماهای زیر، مجموعه ی اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است. $\{۱,۴,۹,۱۶,...\}$

ب) x یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $\{۶,۱۱,۱۶,۲۱,...\}$

پ) $-۱ \le \frac{۲x+۱}{۳}$ $\{...,-۴,-۳,-۲\}$

ت) $\{n(n+۱) = ۰ \mid n \in w\}$ $\{۰\}$

۴. نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $۴ \le ۳$ $۴ > ۳$

ب) ابوالوفایی بوزجانی، ریاضی دان ایرانی است. ابوالوفای بوزجانی ریاضی دان نیست.

پ) $a \in \{b, c, d\}$ $a \notin \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست. ۲ عددی زوج نیست یا عدد π گویا نیست.

ث) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است. زمین به دور خورشید می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان نیست

ج) اگر a زوج باشد، آنگاه $a+1$ فرد است. اگر a فرد باشد، آنگاه $a+1$ زوج است

۵. ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$ نادرست

ب) $(۵ > ۳) \vee (x^۲ + ۱ = ۰)$ درست

پ) $(۱ \in \{۲,۳,۴\}) \vee (\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶})$ نادرست

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست.
درست

ث) در متوازی الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.
نادرست

ج) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.
درست

چ) $۲ > ۳ \Leftrightarrow -۲ < -۳$ درست

ح) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس. درست

۶. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره ی p	گزاره ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \Rightarrow q$	ارزش $p \wedge q$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۳ فرد است	د	د	د	د
شهریور ۳۱ روز دارد	$1 \not< 2$	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1, 2\}$	عدد ۵ مضرب ۲ است	د	ن	د	ن
۵ < ۳	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

۷. جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د

ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب) $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	د	ن

پ) $\sim p \vee p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	د

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	ن	د	ن	ن
د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

$p \vee q$	q	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	ن	د
د	د	د

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸. با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که:

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

p	p	$p \rightarrow p$
د	د	د
ن	د	د
د	ن	ن
ن	ن	ن

ب) $p \vee F \equiv p$

p	f	$p \vee f$
د	د	د$\equiv p$
ن	د	د
د	ن	د$\equiv p$
ن	ن	ن$\equiv p$

پ) $p \wedge T \equiv p$

p	T	$p \wedge T$
د	د	د$\equiv p$
ن	د	ن$\equiv p$
د	ن	ن
ن	ن	ن$\equiv p$

ت) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge -q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (p \vee p)$
د	د	د	د
ن	د	د	ن
د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

چ) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د$\equiv p$
د	ن	ن	د$\equiv p$
ن	د	ن	ن$\equiv p$
ن	ن	ن	ن$\equiv p$

چ) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن

ح) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د	ن	د	ن

۹. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

؟؟؟؟؟؟؟

۱۰. گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall x \in N: (x = 2k) \vee (x = 2k - 1)$ - درست

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^2 < 0$. $\exists a \in W: a^2 < 0$ - نادرست

پ) همه ی اعداد اول فرد اند. $\forall d \in P: d = 2k - 1$ - نادرست

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$ $\forall x \in Z: x \geq 0 \Rightarrow 1 - 2x > 5$ - نادرست

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است. $\forall x \in R: x \neq 0 \wedge (x + \frac{1}{x} \geq 2)$ - درست

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^2 = x$. $\exists x \in R: x^2 = x$ - درست

۱۱. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x \leq 5\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$ نادرست

ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$ درست

پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$ درست

ت) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$ نادرست

۱۲. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ $\exists x \in R: \frac{x^2-1}{x-1} \neq x + 1$ – نادرست

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^{2^n} + 1) \in P$ $\exists n \in N: \left(2^{2^n} + 1\right) \notin P$ – درست

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ $\exists x \in (-\infty, 0): x - \frac{1}{x} \geq -2$ – نادرست

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$ $\forall y \in R: \frac{y-3}{5} \neq 0$

درس دوم : مجموعه – زیر مجموعه

کار در کلاس صفحه ۱۹

۱-فرض کنید $A = \{a . b\}$، درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ نادرست. زیرا در مجموعه‌ی A عضوی به این شکل $\{a\}$ نداریم و در واقع $a \in A$ است.

ب) $\emptyset \in A$ درست. زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

پ) $\{a\} \subseteq A$ درست.

ت) $b \subseteq A$ نادرست. زیرا $b \in A$ است و $\{b\} \subseteq A$.

ث) $a \in A$ درست.

ج) $\{a . b\} \subseteq A$ درست. زیرا هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.

۲-کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

الف) $\{x \in Z \mid x^۲ = ۹ \ ، \ ۲x = ۴\}$: تهی $\quad ۲^۲ \neq ۹ \quad ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$

ب) $\{x \in Z \mid x + ۸ = ۸\}$: ناتهی $\quad x = ۰ \ , \ ۰ \in Z \quad x + ۸ = ۸$

پ) $\{x \in Z \mid x \neq x\}$: ناتهی، زیرا همواره $x = x$ است.

ت) $\{x \in N \mid x^۲ = ۷x\}$: ناتهی $\quad x^۲ = ۷x \Rightarrow x = ۷$

۳-مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$A = \{x \in Z \mid |x| \leq ۲\}$ $\quad A = \{x \in Z \mid -۲ \leq x \leq ۲\}$

$A = \{-۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲\}$

$B = \{m \in Z \mid m^۲ = m\}$ $\quad B = \{۰ , ۱ , -۱\}$

$C = \{k \in R \mid k^۲ - ۱ = ۰\}$ $\quad C = \{۱ , -۱\}$

$D = \{a \in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$ $\quad D = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$

۴- با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A \cap D \subseteq C$: نادرست　　$B \subseteq A$: درست　　$B \in A$: درست

$B - D \subseteq A$: درست　　$C \nsubseteq A$: نادرست　　$B \subseteq C \cup A$: درست

فعالیت صفحه ۲۰

مجموعه $A = \{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱-همه‌ی زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

$\emptyset , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$

۲-با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B = \{b , c\}$ از مجموعه‌ی A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و b متناظر با آن‌ها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه‌ی $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه‌ی زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۱۰۰ ، ۱۰۱ ، ۱۱۰ ، ۰۱۱ ، ۰۱۰ ، ۰۰۱ ، ۰۰۰ ، ۱۱۱

۳-با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　رقم دوم　رقم اوّل

۲ × ۲ × ۲ = ۸

۴-فرض کنید $A = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

۱۰۰۰ ، ۰۱۰۰ ، ۰۰۱۰ ، ۰۰۰۱ ، ۱۱۰۰ ، ۱۰۱۰ ، ۱۰۰۱ ، ۰۱۱۰ ، ۰۱۰۱ ، ۰۰۱۱ ، ۱۱۱۰ ، ۱۱۰۱ ، ۱۰۱۱ ، ۰۱۱۱ ، ۱۱۱۱ ، ۰۰۰۰

رقم چهارم　رقم سوم　رقم دوم　رقم اوّل

۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۱۶

۵-اگر $A = \{a_۱ , a_۲ , a_۳ , ... , a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول   رقم دوم   رقم سوم   رقم n ام

تعداد زیر مجموعه هایA $= \underbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{n \text{ تا ۲ داریم}} = ۲^n = ۱۶$

فعالیت صفحه ۲۱

۱-مجموعه‌ی $A = \{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\emptyset$ را بنویسید.

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a , b\}, \{a , c\}, \{b , c\}, \{a , b , c\}$

۲. از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اوّلاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آن‌ها برابر با A شود.

$\{a\}, \{b , c\}$; $\{b\}, \{a , c\}$; $\{c\}, \{a , b\}$

۳. همه‌ی جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.

$\{A\}, \{B\}, \{C\}$

۴. آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد و اجتماع آن‌ها برابر با A شود؟ بله

کار در کلاس صفحه ۲۱

مجموعه‌ی $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ... , ۹\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱- $\{۴ , ۸ , ۹\}$ و $\{۲ , ۶\}$ و $\{۱ , ۳ , ۵\}$

۲- $\{۵ , ۷ , ۹\}$ و $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$ و $\{۱ , ۳ , ۵\}$

۳- $\{۷ , ۹\}$ و $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$ و $\{۱ , ۳ , ۵\}$

۳، چون سه مجموعه هیچ اشتراکی با هم ندارند و اجتماع آن‌ها مجموعه‌ی A را تشکیل می‌دهد.

کار در کلاس صفحه ۲۳

۱- برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$.

اثبات:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \ \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

باید ثابت کنیم به ازای هر عضو از مجموعه A، آن عضو حتماً در مجموعه $A \cup B$ نیز هست.

هر عضو که در مجموعه A در نظر بگیریم: $x \in A$، قطعاً در مجموعه‌ی مرجع U هست؛ بنابراین این عضو یا در مجموعه A است یا در مجموعه B است. بنابراین $x \in A \cup B$ و می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq A \cup B$.

۲- فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.

اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x;\ [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \ \Rightarrow \ x \in B & (\text{زیرا } A \subseteq B) \\ \vee & \vee \\ x \in C \ \Rightarrow \ x \in D & (\text{زیرا } C \subseteq D) \end{cases} \Rightarrow x \in B \ \vee \ x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

۳-فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $(A \cup B) \subseteq C$.

راهنمایی: از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\forall x; [x \in (A \cup B)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \ \Rightarrow \ x \in C \ \text{ چون } \ A \subseteq C \\ \vee \\ x \in B \ \Rightarrow \ x \in C \ \text{ چون } \ B \subseteq C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x \in C \quad \text{بنابراین} \quad \forall x; [x \in (A \cup B)] \Rightarrow x \in C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

کار در کلاس صفحه ۲۳

فرض کنید $A = \{۱ , ۲\}$. کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x \in Q \mid x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (x-۱)(x-۲) = ۰ \;\rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

بنابراین این مجموعه با مجموعه‌ی A مساوی است. $\{۱ , ۲\}$

ب) $\{x \in R \mid ۱ \le x \le ۲\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا بین ۱ و ۲ بی شمار عدد حقیقی وجود دارد. $\left\{۱ , \frac{۳}{۲} , \ldots , ۲\right\}$

پ) $\{x \in Q \mid ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا یک عضو مجموعه A هست ولی عضو این مجموعه نیست:

$۲(۱^۲) + ۳(۱) + ۱ \neq ۰$

ت) $\{x \in N \mid ۱ \le x \le ۲\}$

این مجموعه با مجموعه‌ی A مساوی است زیرا بین ۱ و ۲ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و بنابراین اعضای این مجموعه:

$\{۱ , ۲\}$ است که با مجموعه‌ی A مساوی می‌باشد.

تمرین صفحه ۲۴

۱. مجموعه های زیر را که شامل شکل های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید:

$A = \{x|$ یک چهار ضلعی است $x\}$ — $C = \{x|$ یک لوزی است $x\}$

$B = \{x|$ یک مستطیل است $x\}$ — $D = \{x|$ یک مربع است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D \subseteq C$ درست است زیرا مربع حالت خاصی از لوزی است.

ب) $B \subseteq D$ نادرست است زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی مستطیل‌ها مربع هستند.

پ) $A \subseteq B$ نادرست است زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی چهار ضلعی‌ها مستطیل هستند، مانند ذوزنقه

ت) $D \subseteq A$ درست است زیرا مربع نوعی چهار ضلعی است.

۲. فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,…,۸,۹\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D = \{۳,۴,۵\}$ و $E = \{۳,۵\}$. در هریک از حالت های زیر مشخص کنید: X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد:

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. C و E

ب) $X \subseteq A$ ولی $X \not\subseteq C$ — A ، B و D

پ) $X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$ — D ، E

ت) $X \subseteq C$ ولی $X \not\subseteq A$ — چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

۳. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ نادرست است زیرا $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو است ولی $\emptyset$ عضوی ندارد.

ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ درست است زیرا □ زیر مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.

پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$ نادرست است زیرا تنها عضو مجموعه □ است.

ت) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ درست است زیرا $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ دقیقا یکی از اعضاء مجموعه است.

۴. کدام یک از مجموعه های زیر باهم مساوی اند؟

$A = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, |m| < ۲\} = \{-۱,۰,۱\} \qquad -۲ < m < ۲$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^۳ = x\} = \{-۱,+۱,۰\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y^۲ \leq ۲y\} = \{۰,۱,۲\}$

$D = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m^۲ \leq ۱\} = \{-۱,۰,۱\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m^۳ + ۲m = ۳m^۲\} = \{۰,۱,۲\}$

$m^{۳} - ۳m^{۲} + ۲m = ۰ \quad m(m^{۲} - ۳m + ۲) = ۰ \quad m = ۰ \quad (m-۲)(m-۱) = ۰ \quad m = ۲ \ m = ۱$
$x^{۳} - x = ۰ \quad x(x^{۲} - ۱) = ۰ \quad x = ۰ \quad x = \pm ۱ \quad -۱ \le m \le ۱$
$y^{۲} - ۲y \le ۰ \quad y(y-۲) \le ۰$

		0		2	
	+	0	-	0	+

$A = B = D, \ C = E$

۵. مثال هایی از مجموعه های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم های زیر درست باشند.

الف) $A \notin C$ و $B \in C$ و $A \in B$

$A = \{۱,۲\} \ B = \{\{۱,۲\},۱\} \ C = \{\{\{۱,۲\},۱\},۳\}$

ب) $A \in C$ و $B \in C$ و $A \in B$

$A = \{۱\} \ B = \{\{۱\},۲\} \ C = \{\{\{۱\},۲\},\{۱\},۴,۵\}$

پ) $A \subseteq B$ و $A \in B$

$A = \{۴\} \ B = \{۴,۵,۶\}$

۶. اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه ی A چند زیر مجموعه دارد؟

$۲^{x} - ۳۸۴ = ۲^{x-۲} \Rightarrow ۲^{x} - ۳۸۴ = ۲^{x} \div ۲^{۲} \Rightarrow ۲^{x} - ۳۸۴ = ۲^{x} \div ۴$

$$۲^{x} - \frac{۲^{x}}{۴} = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x}\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right) = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x} = ۳۸۴ \times \frac{۴}{۳} = ۵۱۲ = ۲^{۹} \Rightarrow x = ۹$$

۷. اگر $A = \{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B = \{۴,۵, x-y\}$ و $A = B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$x + ۲y = ۵$

$$x - y = ۴ \quad \begin{cases} x + ۲y = ۵ \\ ۲x - ۲y = ۸ \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۱۳ \quad x = \frac{۱۳}{۳} \quad \frac{۱۳}{۳} - y = ۴ \quad \frac{۱۳}{۳} - ۴ = y \quad \frac{۱}{۳} = y$$

۸. ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$

$$\forall x; [x \in (A - B)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A$$

۹. فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$

$$\forall x; [x \in A \cup C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases}\text{یا} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases}\text{یا} \Rightarrow x \in B \cup C$$

ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} و \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} و \Rightarrow x \in C \cap B \Rightarrow \quad A \cap C \subseteq B \cap C$$

۱۰. مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} و \xrightarrow{A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D} \begin{cases} x \in D \\ x \in B \end{cases} و \Rightarrow (A \cap C) \subseteq B \cap D$$

ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \xrightarrow{A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D} \begin{cases} x \in B \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap D \xrightarrow{B \cap D \subseteq B \cup D} B \cap D \subseteq B \cup D$$

۱۱. الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$.

چون تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است بنابراین $\emptyset \subseteq A$ و از طرفی طبق فرض $A \subseteq \emptyset$ در نتیجه $A = \emptyset$

ب) فرض کنید: $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

چون هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی مرجع است بنابراین $A \subseteq U$ و طبق فرض $U \subseteq A$ در نتیجه $A = U$

۱۲. هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $B - A = B$

$$\forall x;\ x \in B - A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B \quad (۱)$$

$$\forall x;\ x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$B - A = B$

ب) $A - B = A$

$$\forall x;\ x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A \quad (۱)$$

$$\forall x;\ x \in A \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A \subseteq A - B \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$A - B = A$

۱۳. فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$، کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای X محسوب می شود.

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ افراز نیست زیرا اجتماع مجموعه‌ها برابر با X نیست.

ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$ افراز نیست زیرا مجموعه اول و آخر با هم اشتراک دارند.

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ افراز است.

ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ افراز نیست زیرا افراز تنها از یک مجموعه تشکیل نمی‌شود.

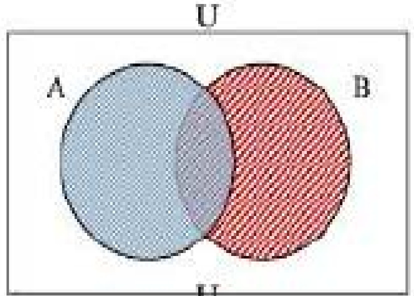
ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$ افراز است.

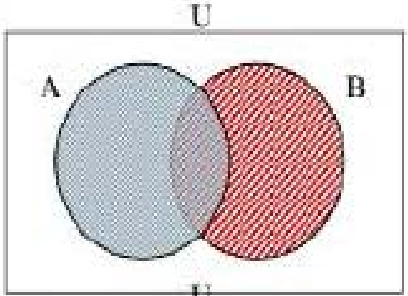
درس سوم : قوانین و اعمال بین مجموعه ها(جبر مجموعه ها)

فعالیت صفحه ۲۶

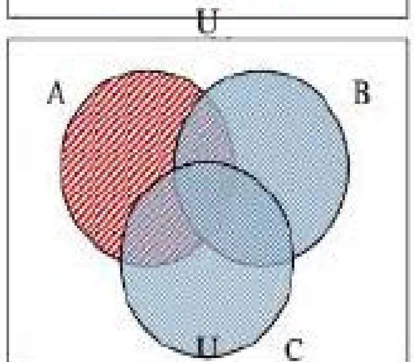
۱-در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).

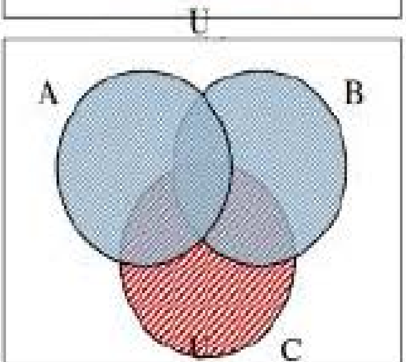
الف)



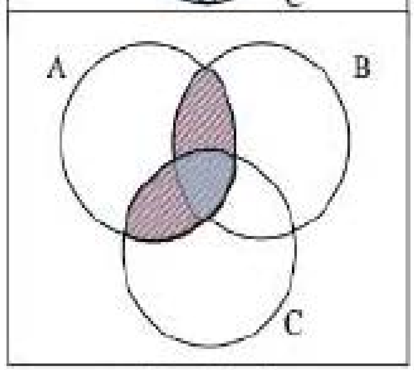


ب)

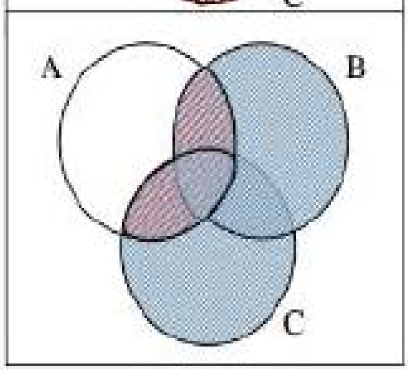




پ)



(A∩B)∪(A∩C)



A∩(B∪C)

۲- با فرض اینکه $U = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$ و $B = \{۳ , ۴ , ۵\}$ و $C = \{۱ , ۲ , ۵ , ۶\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

$A \cap B = \{۳\}$, $B \cap A = \{۳\}$

$$\begin{cases} ۳ \in A \cap B \Rightarrow ۳ \in A \wedge ۳ \in B \Rightarrow ۳ \in B \cap A \Rightarrow A \cap B \subseteq B \cap A \\ ۳ \in B \cap A \Rightarrow ۳ \in A \wedge ۳ \in B \Rightarrow ۳ \in A \cap B \Rightarrow B \cap A \subseteq A \cap B \end{cases}$$

$A \cap B \subseteq B \cap A$

ب) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

$B\cap C = \{۵\}$; $A\cap B = \{۳\}$; $A\cap(B\cap C) = \emptyset$; $(A\cap B)\cap C = \emptyset$

با توجه به اینکه دو مجموعه‌ی $A\cap(B\cap C)$; $(A\cap B)\cap C$ تهی هستند و هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است

بنابراین تهی نیز زیرمجموعه‌ی تهی است و داریم:

$$\begin{cases} A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ (A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C) \end{cases} \Rightarrow A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

پ) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$B\cup C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$, $A\cap B = \{۳\}$, $A\cap C = \{۱,۲\}$

, $A\cap(B\cup C) = \{۱,۲,۳\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C) = \{۱,۲,۳\}$

$\forall x \in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x \in \{۱,۲,۳\} \Rightarrow x \in \{۱,۲,۳\} \wedge x \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$\Rightarrow x \in \{۱,۲,۳\} \Rightarrow x \in \{۳\} \vee x \in \{۱,۲\} \Rightarrow x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (۱)$$

$\forall x \in (A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x \in \{۱,۲,۳\} \Rightarrow x \in \{۱,۲,۳\} \wedge x \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B\cup C) \Rightarrow x \in A\cap(B\cup C)$

$(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C) \qquad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

کار در کلاس صفحه ۲۸

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «$\cup$» و «$\cap$» اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱-ثابت کنید، برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B از مجموعه‌ی مرجع U، داریم:

$A\cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$ **تعریف اجتماع**

$= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\}$ **جا به جایی«$\vee$»**

$= B\cup A$

۲-ثابت کنید، برای سه مجموعه‌ی دلخواه A، B، C از مجموعه‌ی مرجع U، داریم:

$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

$A \cup (B \cup C) = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in (B \cup C)\}$ تعریف اجتماع

$= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C\}$ تعریف اجتماع

$= \{x \in U \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$ شرکت پذیری «$\vee$»

$= \{x \in U \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C$ تعریف اجتماع

$= (A \cup B) \cup C$

۳-با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\forall x;$ [فرض کنیم $x \in [A \cup (B \cap C)]$]

$\Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \cap C]$ تعریف اجتماع

$\Rightarrow [(x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)]$ توزیع پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»

$\Rightarrow [x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)]$ تعریف «$\cup$»

$\Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap x \in (A \cup C)]$ تعریف اشتراک

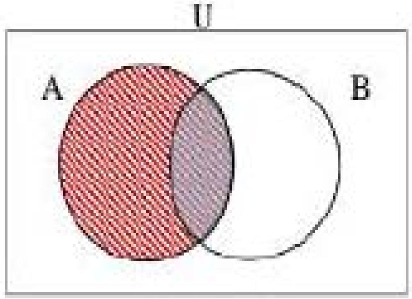
$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

کار در کلاس صفحه ۳۰

(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیه‌ی قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

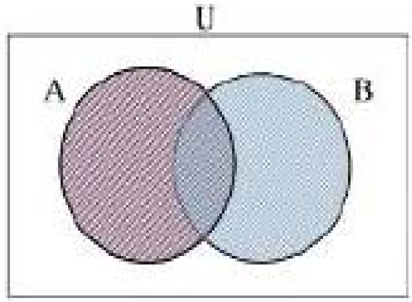
ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$



$A \cup (A \cap B)$

ب) $A\cap(A\cup B) = A$



$A\cap(A\cup B)$

در هر دو قسمت جواب مجموعه‌ی A می‌شود.

در قضیه‌ی قبل ملاحظه کردید که اگر $C \subseteq D$ در این صورت $(C\cup D) = D$ و $(C\cap D) = C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می دانیم: $(A\cap B) \subseteq A \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A\cup(A\cap B) = A$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می دانیم: $A \subseteq (A\cup B) \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A\cap(A\cup B) = A$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پر کردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B) = (A\cap U)\cup(A\cap B)$

$= A\cap(U\cup B)$ **توزیع پذیری**

$= A\cap U = A$

ب) $A\cap(A\cup B) = (A\cup A)\cap(A\cup B)$

$= A\cup(A\cap B)$ **توزیع پذیری**

$= A\cup A = A$

مثال صفحه ۳۱

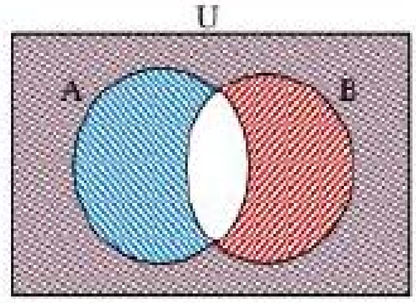
عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

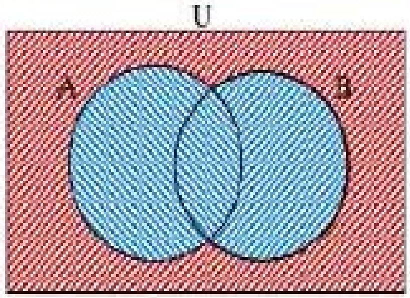
$(A\cap B)\cup\big((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B]\big) = (A\cap B)\cup[(B\cup C)\cap B] = (A\cap B)\cup B = B$

فعالیت صفحه ۳۲

۱- فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند. روی شکل سمت چپ، $(A\cap B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



جواب: قسمتی که هم قرمزرنگ و هم آبی رنگ است.



جواب: قسمت قرمزرنگ

نتیجه می گیریم این دو مجموعه با هم مساوی است.

۲- اگر فرض کنیم: $U=\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ و $A=\{۲, ۳, ۵, ۸\}$ و $B=\{۳, ۴, ۶, ۸\}$ هریک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A\cap B=\{۳, ۸\} \rightarrow (A\cap B)'=\{۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۰\}$

$A'=\{۱, ۴, ۶, ۷, ۹, ۱۰\}\ ,\ B'=\{۱, ۲, ۵, ۷, ۹, ۱۰\}$

$\Rightarrow (A'\cup B')=\{۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۰\}$

نتیجه می گیریم : $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$\forall x; [x\in (A\cap B)' \Rightarrow x\notin (A\cup B) \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Rightarrow x\in (A'\cap B')] \Rightarrow (A\cup B)' \subseteq (A'\cap B')$ (۱)

$\forall x; [x\in (A'\cap B') \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$x\notin (A\cup B) \Rightarrow x\in (A\cup B)' \Rightarrow (A'\cap B')\subseteq (A\cup B)'$ (۲)

$(۱), (۲) \Rightarrow A'\cap B'=(A\cup B)'$

کار در کلاس صفحه ۳۳

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$

$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup(B')'=A\cup B$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

$(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$

مثال صفحه ۳۳

با استفاده از جبر مجموعه‌های درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)(A-B)\cap(A-C)$

$(A-B)\cap(A-C)$	$=(A\cap B')\cap(A\cap C')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
	$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$	شرکت پذیری
	$=[A'\cap(A\cap B')]\cap C'$	جا به جایی
	$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$	شرکت پذیری
	$=(A\cap B')\cap C'$	$A\cap A=A$
	$=A\cap(B'\cap C')$	شرکت پذیری
	$=A-(B'\cap C')$	تبدیل اشتراک به تفاضل
	$=A-(B\cup C)$	قانون دمورگان

ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$	قانون دمورگان
$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$	توزیع پذیری
$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$	قوانین جا به جایی و توزیع پذیری
$= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B - C)]$	تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم
$= \emptyset \cup [A \cap (B - C)]$	اشتراک هر مجموعه ای با تهی، تهی می‌شود.
$= A \cap (B - C)$	اجتماع هر مجموعه ای با تهی، خود مجموعه می‌شود.

پ) $A - (B - C) = (A - B) - C$

با کمی تأمل پی می‌بریم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می‌شویم و این کار انجام نمی‌شود. ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۳ , ۴ , ۵\}$ و $C = \{۵ , ۶ , ۷\}$ و $U = \{۱ , ۲ , ... , ۱۰\}$

$A - (B - C) = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\} - \{۳ , ۴\} = \{۱ , ۲ , ۵\}$

$(A - B) - C = \{۱ , ۲\} - \{۵ , ۶ , ۷\} = \{۱ , ۲\}$

$\Rightarrow \{۱ , ۲ , ۵\} \neq \{۱ , ۲\} \Rightarrow A - (B - C) = (A - B) - C$

ت) $A = B$ آنگاه $(A \cup B) = (A \cap B)$

وقتی می‌نویسیم: $C = D$، یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می‌بریم، می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراک بگیریم، یعنی از اینکه $C = D$ نتیجه می‌شود:

$A \cap C = A \cap D$ و $A \cup C = A \cup D$

$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B)$

$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A = (A \cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A \subseteq B \qquad (۱)$

$(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$

$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A \cup B) = A \xRightarrow{\text{قضیه}} B \subseteq A \qquad (۲)$

$(۱) , (۲) \Rightarrow A = B$

کار در کلاس صفحه ۳۴

۱- اگر $A=\{۱,۲,...,۱۰\}$ و $B=\{۵,۶,...,۱۵\}$ و $U=\{۱,۲,...,۲۰\}$ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

$B'=\{۱،۲،۳،۴،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹،۲۰\}$

$(A\cap B')=\{۱،۲،۳،۴\}$ ، $(A\cap B)=\{۵،۶،۷،۸،۹،۱۰\}$

$(A\cap B')\cup(A\cap B)=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰\}=U$

با استفاده از جبر مجموعه ها : $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

$A-B=\{۱،۲،۳،۴\}$ ، $(A\cap B')=\{۱،۲،۳،۴\}$

$B-A=\{۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵\}$ ، $A'=\{۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵\}$

$$(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$$
$$=\{۱،۲،۳،۴\}\cup\underbrace{(\{۱،۲،۳،۴\}\cap\{۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵\}\cup\{۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵\}]}_{\emptyset}$$
$$=\{۱،۲،۳،۴\}$$

با استفاده از جبر مجموعه‌ها:

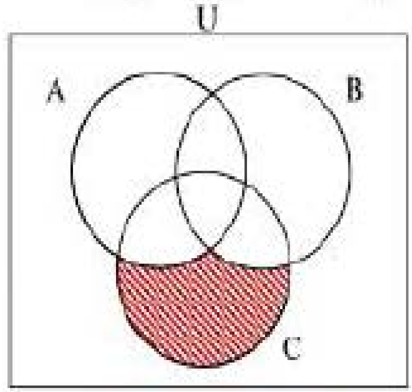
$$(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$$

$(B-A)\cup A'=(B-A)\cap(A')'$
$=(B-A)\cap A=(B\cap A')\cap A$
$=B\cap(A'\cap A)$
$=B\cap\emptyset$
$=\emptyset$

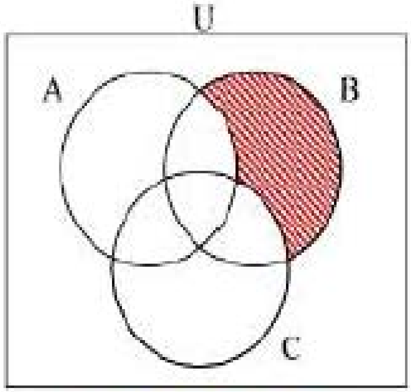
$(A-B)\cup[(A\cap B')\cap\emptyset]$
$\Rightarrow\ (A-B)\cup(\emptyset)=A-B$
$=A\cap B'$
$=\{۱،۲،۳،۴\}$

۲-با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.

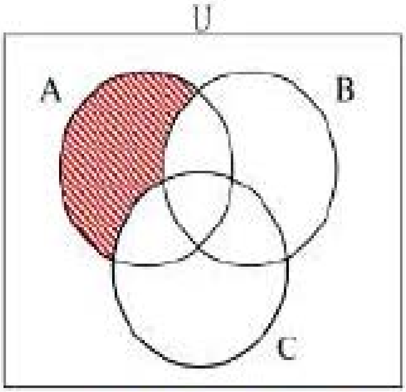
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.



اعضای مجموعه‌ی C

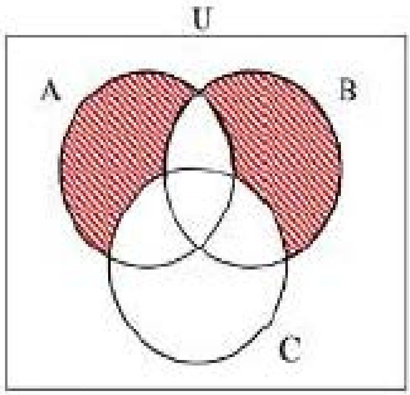


اعضای مجموعه‌ی B

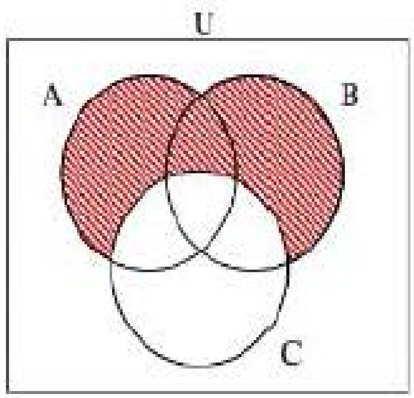


اعضای مجموعه‌ی A

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.



مثال صفحه ۳۵

اگر $A = \{۲ , ۴ , ۶\}$ و $B = \{۴ , ۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$A \times B = \{(۲ , ۴), (۲ , ۵), (۴ , ۴), (۴ , ۵), (۶ , ۴), (۶ , ۵)\}$$
$$B \times A = \{(۴ , ۲), (۴ , ۴), (۴ , ۶), (۵ , ۲), (۵ , ۴), (۵ , ۶)\}$$

کار در کلاس صفحه ۳۵

در مثال قبل دیدید که در مجموعه‌ی $A \times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به وجود آمد. حال اگر $n(A) = m$ و $n(B) = k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A \times B) = mk$.

با توجه به اینکه هر عضو مجموعه A به تعداد اعضای مجموعه B زوج مرتب تولید می‌کند و مجموعه A ، m عضو دارد، داریم: $A = \{\underbrace{a_1}_{k} , \underbrace{a_2}_{k} , \dots , \underbrace{a_m}_{k}\}$

$a_1 =$ عضو اول مجموعه A

$a_2 =$ عضو دوم مجموعه A

$\vdots$

$a_m =$ عضو m ام مجموعه A

و بنابر اصل ضرب داریم: $m \times k$

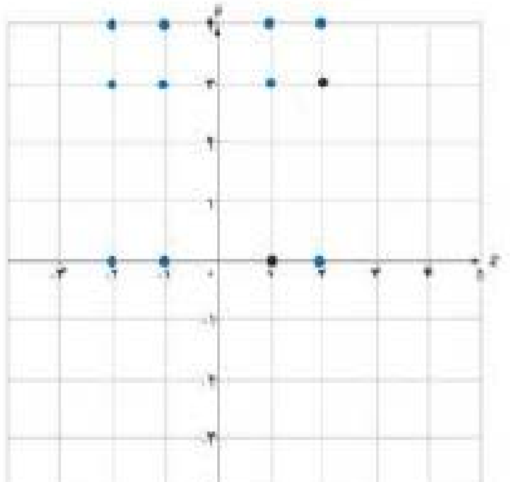
$\Rightarrow \; n(A \times B) = mk$

فعالیت صفحه ۳۶

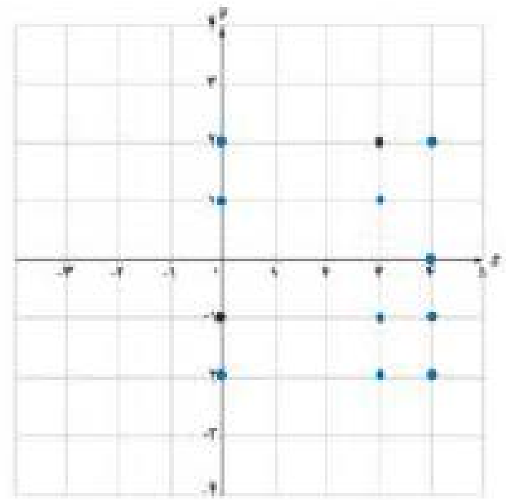
۱. اگر $A = \{۱ , -۱ , ۲ , -۲\}$ و $B = \{۰ , ۳ , ۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هریک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A \times B =$
$\{(۱ , ۰), (۱ , ۳), (۱ , ۴), (-۱ , ۰), (-۱ , ۳), (-۱ , ۴), (۲ , ۰), (۲ , ۳), (۲ , ۴), (-۲ , ۰),$
$(-۲ , ۳), (-۲ , ۴)\}$

$B \times A =$
$\{(۰ , ۱), (۰ , -۱), (۰ , ۲), (۰ , -۲), (۳ , ۱), (۳ , -۱), (۳ , ۲), (۳ , -۲), (۴ , ۰),$
$(۴ , -۱), (۴ , ۲), (۴ , -۲)\}$



نمودار مختصاتی $A \times B$



نمودار مختصاتی $B \times A$

تمرین صفحه ۳۸

۱- با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جا به جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره ها، هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in U | x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B \cap C\} \\ &= \{x \in U | x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \in U | (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= x \in A \cap (B \cup C) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \in A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

به طور مشابه ثابت می شود $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

۲- درستی هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow \left(A \cap \left(\overset{U}{\overline{B \cup B'}} \right) \right) = A$$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

$$(A' \cap A) \cap (B' \cap A) = \emptyset$$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= (A \cap A) \cap (B \cap C) \\
&= A \cap \big(A \cap (B \cap C)\big) \\
&= A \cap \big((A \cap B) \cap C\big) \\
&= A \cap \big(C \cap (A \cap B)\big) \\
&= (A \cap C) \cap (A \cap B) \\
&= (A \cap B) \cap (A \cap C)
\end{aligned}
$$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cup C) &= (A \cup A) \cup (B \cup C) \\
&= A \cup \big(A \cup (B \cup C)\big) \\
&= A \cup \big((A \cup B) \cup C\big) \\
&= A \cup \big(C \cup (A \cup B)\big) \\
&= (A \cup C) \cup (A \cup B) \\
&= (A \cup B) \cup (A \cup C)
\end{aligned}
$$

۳-هریک از عبارت های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

$$(B \cap A') \cup \underbrace{\Big[\underbrace{(B \cap A) \cap B'}_{B \cap A}\Big] \cap (B \cup A)}_{B \cup A} = (B - A) \cup (B \cup A) \xrightarrow{(B-A) \subseteq (B \cup A)} = (B \cup A)$$

ب) $(A \cup B) - B$

$$(A \cup B) \cap B' = \Big(\overbrace{A \cap B'}^{A-B}\Big) \cup \Big(\overbrace{B \cap B'}^{\emptyset}\Big) = (A - B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B$$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

$$[(A \cup B) \cap A] \cup (A \cap B) = \Big[\Big(\underbrace{A \cap A'}_{\emptyset}\Big) \cup (B \cap A')\Big] \cup (A \cap B) = (B \cap A) \cup (A \cap B)$$

$$= B \cap \Big(\underbrace{A \cup A'}_{U}\Big) = B$$

۴- درستی هریک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

$(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

از طرفی می‌دانیم همواره $X \subseteq U$، بنابراین $X = U$ است.

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \left(\underbrace{B' \cup B}_{U}\right) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (C' \cap C')$
$= (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cap B')$
$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] = \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_{\varnothing}\right) \cup \left(\underbrace{B \cap A'}_{B-A}\right)\right] \cup \left[\left(\underbrace{A \cap B'}_{A-B}\right) \cup \left(\underbrace{B \cap B'}_{\varnothing}\right)\right]$
$= (B - A) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ت) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \varnothing$

$(A \cup B) \cap (A \cap B)' = \varnothing$

ج) $(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$

$B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$
$\xrightarrow{A \cap B = A \cap C} = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = C \cap (A \cup C) = C$

۵-اگر $A = \{y + ۲$ و ۵ و $z\}$ و $B = \{x + ۱$ و ۴ و $- ۲\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید.

می‌دانیم اگر $A \times B = B \times A$ باشد، خواهیم داشت $A = B$. بنابراین $\{y + ۲$ و ۵ و $z\} = \{x + ۱$ و ۴ و $- ۲\}$.

واضح است که ۵ فقط می‌تواند با $x + ۱$ برابر باشد. لذا $x = ۴$ است. اما در دو مورد دیگر دو حالت داریم:

$$[(y + ۲) \wedge (z = -۲)] \vee [(y + ۲ = -۲) \wedge (z = ۴)]$$

$$\Rightarrow [(y = -۲) \wedge (z = -۲)] \vee [(y = -۴) \wedge (z = ۴)]$$

$$\Rightarrow y + z = ۰$$

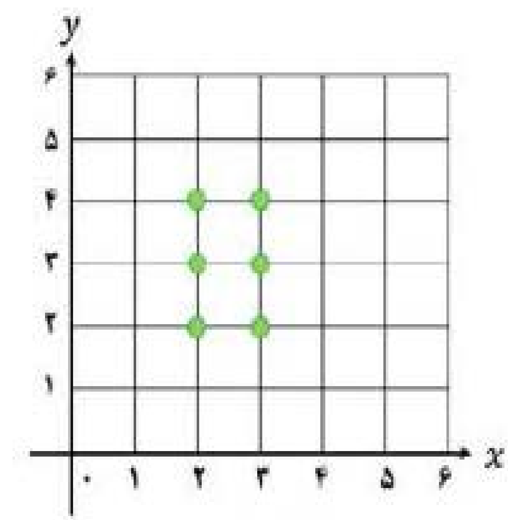
$$\Rightarrow x + y + z = ۴$$

۶-با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

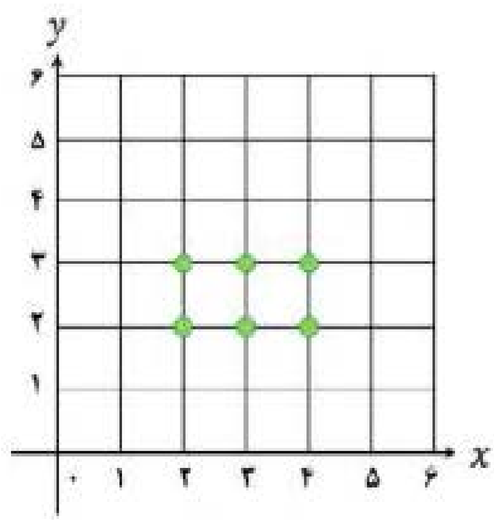
الف) $A = \{۳و۲\}$ ، $B = \{۴و۳و۲\}$

$A \times B = \{(۲و۲), (۳و۲), (۴و۲), (۲و۳), (۳و۳), (۴و۳)\}$

$B \times A = \{(۲و۲), (۳و۲), (۲و۳), (۳و۳), (۲و۴), (۳و۴)\}$

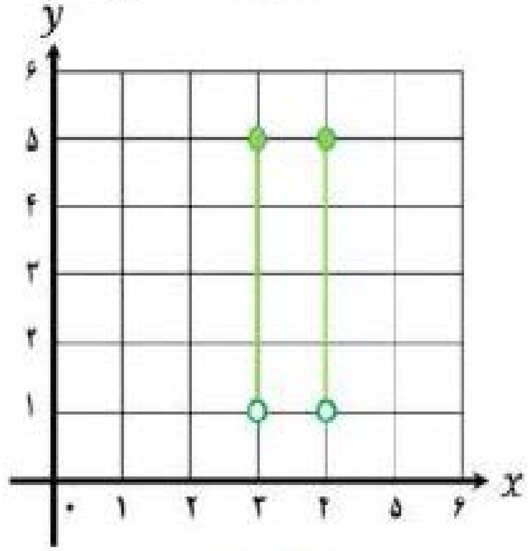


$A \times B$

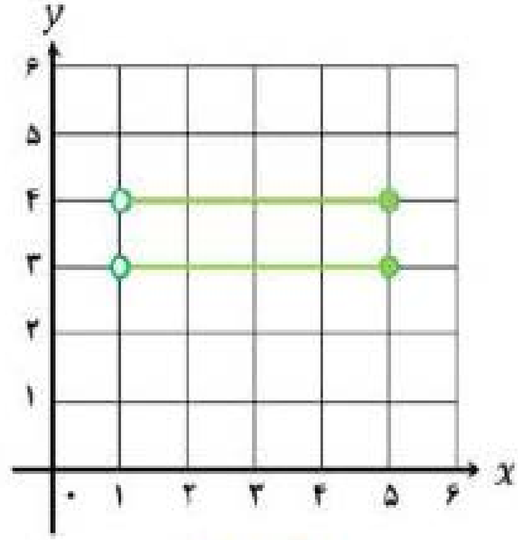


$B \times A$

ب) A = {۳و۴} ، B = (۱و۵]

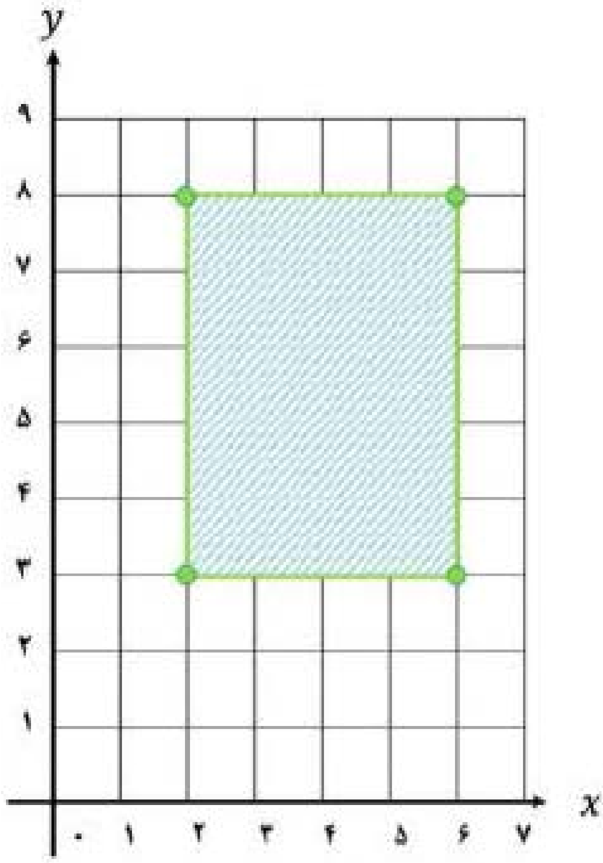


$A \times B$

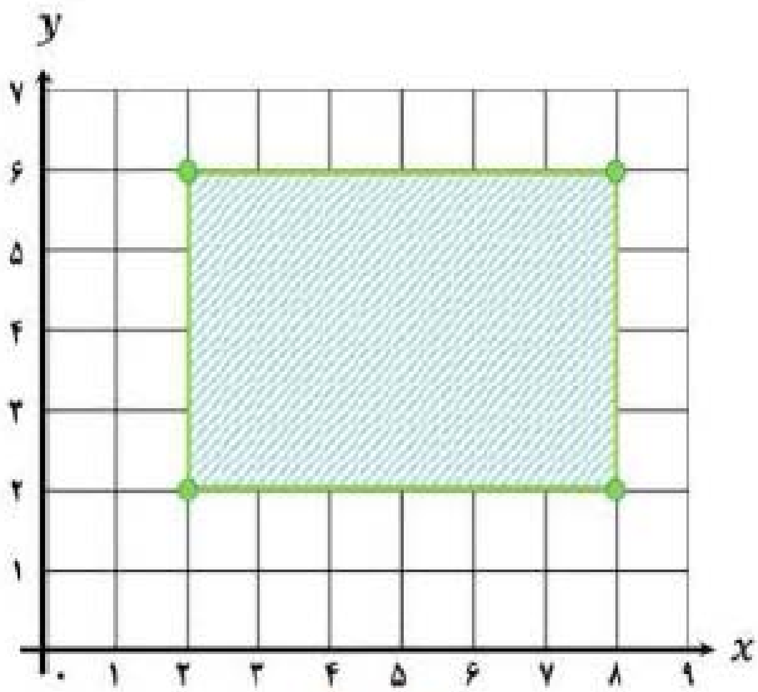


$B \times A$

پ) A = [۲و۶] ، B = [۳و۸]

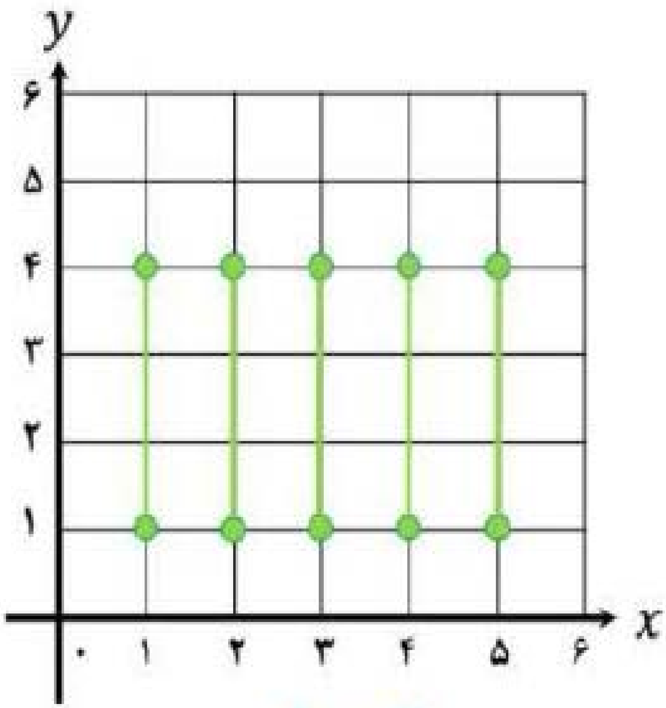


$A \times B$

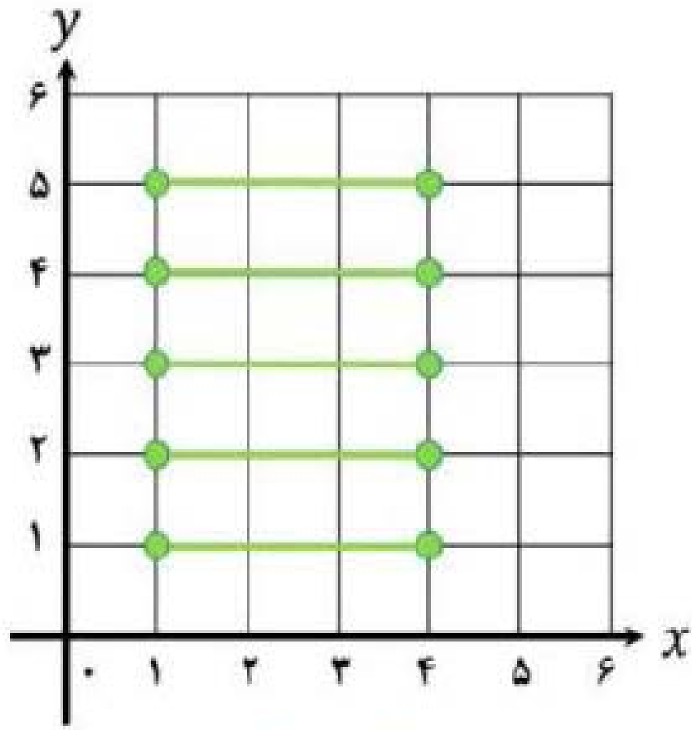


$B \times A$

ت) $A = \mathbb{N}$ ، $B = [۱و۴]$

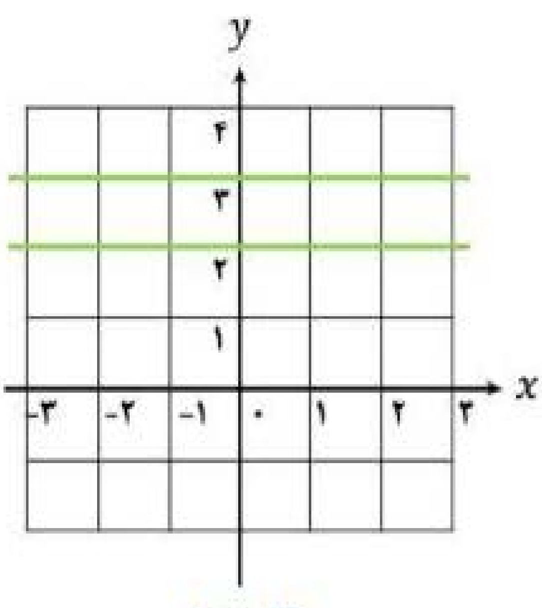


$A \times B$

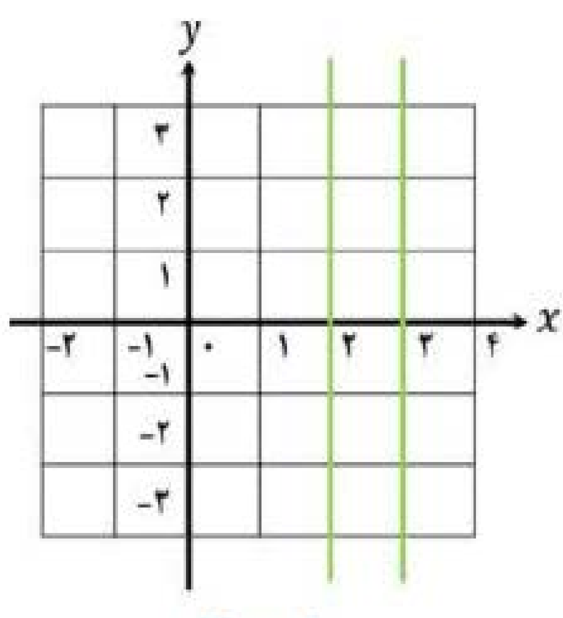


$B \times A$

ت) $A = \mathbb{R}$ ، $B = \{۲و۳\}$



$A \times B$



$B \times A$