



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

**کلیک کنید**  [www.tafrihicenter.ir/edu](http://www.tafrihicenter.ir/edu)

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

[www.tafrihicenter.ir](http://www.tafrihicenter.ir)

# حد و پیوستگی

۵

فصل

- ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۲ حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
- ۳ قضایای حد
- ۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت  $\frac{\infty}{\infty}$ )
- ۵ پیوستگی

جاده نهندان - شهداد

# مفهوم حد و فرایندهای حدی

۱

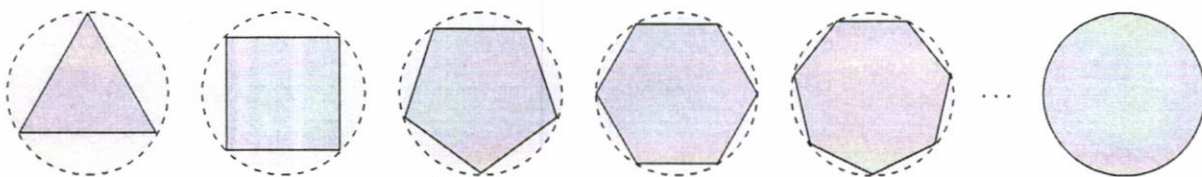
درس

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟ **دایره**

$$\pi(1)^2 = \pi$$

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد  $\pi$  تا ۵ رقم اعشار را برابر  $\pi = 3.14159$  در نظر بگیریم و مساحت  $n$  ضلعی منتظم واقع در درون دایره

را با  $A_n$  نشان دهیم، جدول زیر مقادیر  $A_n$  را به ازای برخی  $n \in \mathbb{N}$  نشان می‌دهد:

| $n$   | ۳       | ۴ | ۵       | ۶       | ۷       | ۸       | ۹       | ۱۰      | ۲۰۰     | ۳۰۰     | ۴۰۰     | ۵۰۰     | ۱۰۰۰    |
|-------|---------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $A_n$ | ۱/۲۹۹۰۳ | ۲ | ۲/۳۷۷۶۴ | ۲/۵۹۸۰۷ | ۲/۷۳۶۰۸ | ۲/۸۲۸۴۲ | ۲/۸۹۲۵۴ | ۲/۹۳۸۹۲ | ۳/۱۴۱۰۷ | ۳/۱۴۱۳۶ | ۳/۱۴۱۴۶ | ۳/۱۴۱۵۰ | ۳/۱۴۱۵۷ |

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله  $A_n$  (مساحت  $n$  ضلعی درون

دایره) به عدد  $\pi$  که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

## خواندنی

عدد  $\pi$  (بی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. بی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد  $\pi$ ، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی  $\pi$  این است:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

$\pi$  یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبه به دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پایروسی نوشته شده است که در حال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی  $\pi$  ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد  $\pi$  پرداخت. او با ۶ ضلعی منظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منظم محیطی و محاطی مقدار  $\pi$  را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.



غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رساله محیطه  $\pi$  را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است. اگر می‌خواهید عدد  $\pi$  را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد:

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن  $\pi$       باسخی ده که هنرمند تو را آموزد  
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان      ره سرنزل مقصود بها آموزد  
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹      ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

## فعالیت

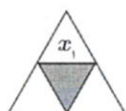


یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را در نظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید

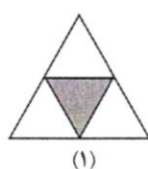
را  $x_1$  و اندازه محیط آن را  $P_1$  می‌نامیم.

در این صورت داریم:  $x_1 = \frac{2}{3} = 1$  و  $P_1 = \frac{4}{3} = 3$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله  $n$ ام طول ضلع مثلث به وجود

آمده را با  $x_n$  و محیط آن را با  $P_n$  نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



|       |   |               |               |               |  |  |  |                 |
|-------|---|---------------|---------------|---------------|--|--|--|-----------------|
| $x_n$ | ۱ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |  |  |  | $\frac{1}{2^n}$ |
| $P_n$ | ۳ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ |  |  |  | $\frac{3}{2^n}$ |

۲ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را  $x$  در نظر بگیریم و  $f$  تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه

$$f(x) = 3x$$

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث‌ها (مقدار متغیر  $x$ ) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر

تابع  $f$ ، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

❖ مثال: رفتار تابع  $f$ ، با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  را در اطراف نقطه  $a = 2$  بررسی نمایید.

❖ حل: تابع  $f$ ، به ازای هر عدد حقیقی  $x$  به جز  $x = 2$  تعریف شده است. به ازای هر  $x \neq 2$ ، ضابطه تابع را می توان ساده کرد و به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

در جدول زیر، مقادیر تابع  $f$  را به ازای برخی مقادیر کوچک تر از ۲، که به تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ تر از ۲، که به تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می شوند، محاسبه کرده ایم:

$x$  از چپ به عدد ۲ نزدیک می شود

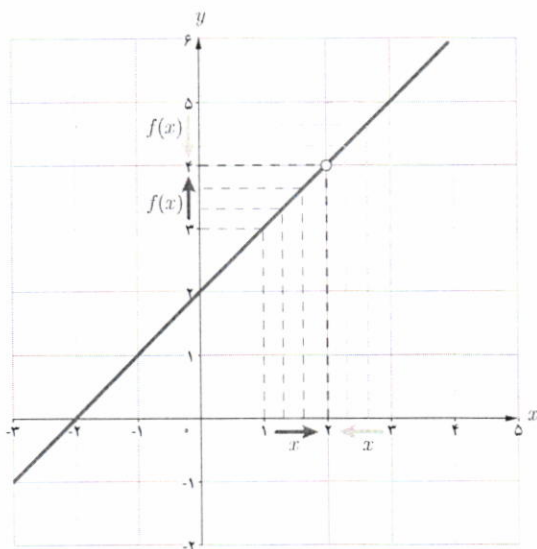
$x$  از راست به عدد ۲ نزدیک می شود

|        |   |     |     |      |       |   |   |   |        |       |      |     |   |
|--------|---|-----|-----|------|-------|---|---|---|--------|-------|------|-----|---|
| $x$    | ۱ | ۱/۵ | ۱/۹ | ۱/۹۹ | ۱/۹۹۹ | → | ۲ | ← | ۲/۰۰۰۱ | ۲/۰۰۱ | ۲/۰۱ | ۲/۵ | ۳ |
| $f(x)$ | ۳ | ۳/۵ | ۳/۹ | ۳/۹۹ | ۳/۹۹۹ | → | ? | ← | ۴/۰۰۰۱ | ۴/۰۰۱ | ۴/۰۱ | ۴/۵ | ۵ |

$f(x)$  به عدد ۴ نزدیک می شود

$f(x)$  به عدد ۴ نزدیک می شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می کنیم که، با نزدیک شدن  $x$  به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر  $f(x)$ ، به عدد ۴ نزدیک می شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می توان دید: نمودار تابع  $f$ ، خط راست  $y = x + 2$  است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه  $(2, 4)$  حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطه ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی  $x$  را با مقادیر بزرگ تر و یا کوچک تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می کنیم، مقادیر تابع  $f$  به عدد ۴ نزدیک می شوند. به عبارت دیگر وقتی  $x \rightarrow 2$  (یعنی  $x$  به سمت ۲ میل می کند)، مقادیر تابع  $f$  به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این صورت می گوئیم، حد تابع  $f$  وقتی  $x$  به ۲ نزدیک می شود برابر ۴ است و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند  $f$  را در اطراف نقطه ای مانند  $a$  بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر  $x$  به  $a$  نزدیک می شود مقادیر تابع  $f$  نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع  $f$  در نقطه  $a$  می نامیم.

توابع  $f$ ،  $g$ ،  $h$  با ضابطه‌های  $f(x) = x+3$  و  $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  و  $h(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید:

$$f(3) = \dots 4$$

$$g(3) = \dots \text{تعریف نشده}$$

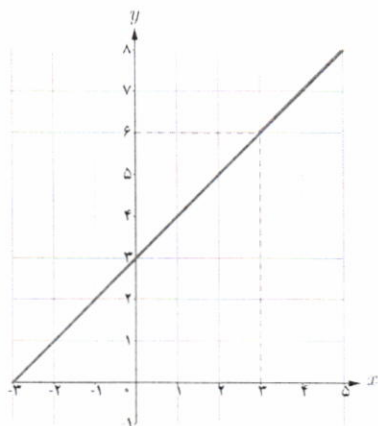
$$h(3) = \dots 4$$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر  $x$  را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع  $f$ ،  $g$ ،  $h$  هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند؟  
به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

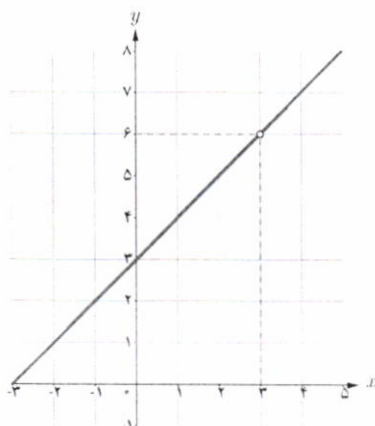
|        |       |        |         |          |               |     |              |           |          |         |        |       |
|--------|-------|--------|---------|----------|---------------|-----|--------------|-----------|----------|---------|--------|-------|
| $x$    | $2/9$ | $2/99$ | $2/999$ | $2/9999$ | $\rightarrow$ | $3$ | $\leftarrow$ | $3/00001$ | $3/0001$ | $3/001$ | $3/01$ | $3/1$ |
| $f(x)$ | $5/9$ | $5/99$ | $5/999$ | $5/9999$ | $\rightarrow$ | $?$ | $\leftarrow$ | $6/00001$ | $6/0001$ | $6/001$ | $6/01$ | $6/1$ |
| $g(x)$ | $5/9$ | $5/99$ | $5/999$ | $5/9999$ | $\rightarrow$ | $?$ | $\leftarrow$ | $6/00001$ | $6/0001$ | $6/001$ | $6/01$ | $6/1$ |
| $h(x)$ | $5/9$ | $5/99$ | $5/999$ | $5/9999$ | $\rightarrow$ | $?$ | $\leftarrow$ | $6/00001$ | $6/0001$ | $6/001$ | $6/01$ | $6/1$ |

۳ نمودارهای توابع  $f$ ،  $g$ ،  $h$  به صورت زیر رسم شده است.

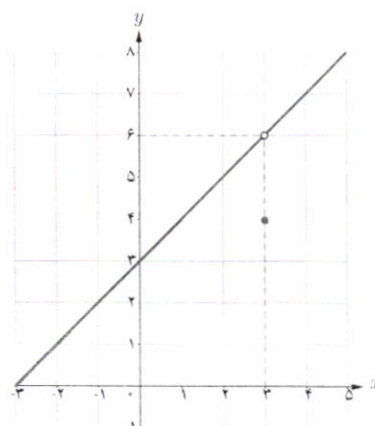
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر  $x$  را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر  $f(x)$ ،  $g(x)$ ،  $h(x)$  هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار  $f$



نمودار  $g$



نمودار  $h$

هر سه تابع به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی  $x$  به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶. است به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت در مقدار در نقطه  $x=3$  و شباهت در برابر بودن حدها آنها در  $x=3$   
تفاوت در برابر بودن مقدار تابع با حد تابع در  $x=3$   
از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که:

الف) ممکن است یک تابع در نقطه  $a$  تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع  $g$  در نقطه ۳)

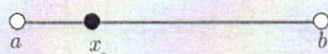
ب) ممکن است یک تابع در نقطه  $a$  تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در  $a$  برابر نباشد. (مانند تابع  $h$  در نقطه ۳).

در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع  $g$  در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی  $x$  به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

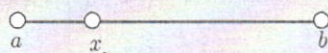
با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند  $a$ ، نزدیک نمود، کافی است تابع مورد نظر در یک بازه باز شامل  $a$  تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه  $a$ ، رفتار تابع در دو طرف نقطه  $a$  اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود  $a$  در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم:

### تعریف

اگر  $x_0$  یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل  $x_0$  را یک همسایگی  $x_0$  می‌نامیم. بنابراین اگر  $x_0 \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه  $(a, b)$  یک همسایگی  $x_0$  است.



اگر نقطه  $x_0$  را از این بازه حذف کنیم، مجموعه  $(a, b) - \{x_0\}$  را همسایگی محذوف  $x_0$  می‌نامیم.

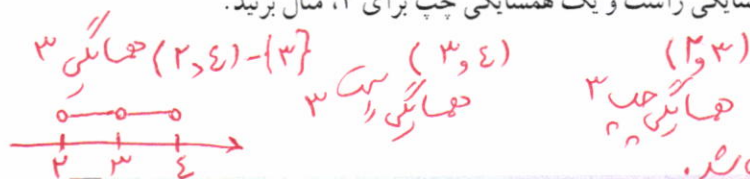


به همین ترتیب:

اگر  $r > 0$ ، در این صورت بازه  $(x_0, x_0 + r)$  را یک همسایگی راست و بازه  $(x_0 - r, x_0)$  را یک همسایگی چپ  $x_0$  می‌نامیم.

## کاردرکلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.



۲ آیا بازه (۲, ۳) یک همسایگی ۲ می باشد؟ چرا؟

طبق تعریف بازه (۲, ۳) همسایگی راست ۲ نیست.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی عدد  $a$  (به جز احتمالاً در خود  $a$ ) تعریف شده باشد. می گوییم «حد تابع  $f$  وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می شود برابر عدد حقیقی  $L$  است»، هرگاه مقادیر تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L$  نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر  $x$  (با مقادیر مخالف  $a$  از دو طرف) به قدر کافی به  $a$ ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

در این صورت می نویسیم:

عدد  $L$  را حد تابع  $f$  در  $a$  می نامیم.

## کاردرکلاس

۱ نمودار تابعی مانند  $f$  را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده

باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار

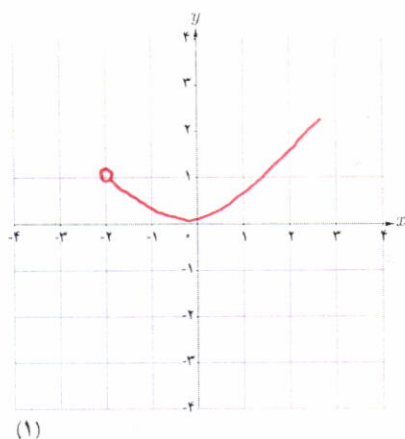
تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه ۳

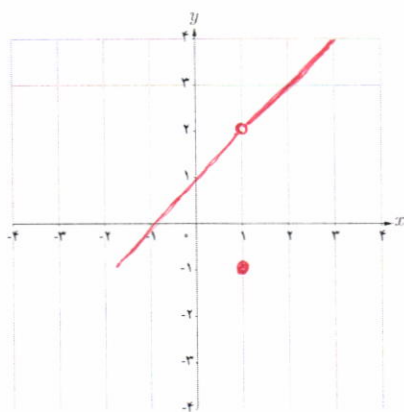
تعریف شده باشند و  $f(3) \neq g(3)$ .

۴ نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد

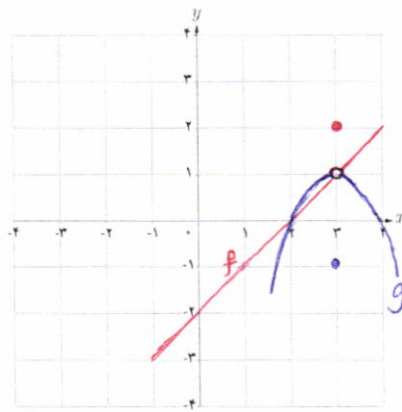
یکسان باشند و  $f$  در ۲ تعریف شده باشد اما تابع  $g$  در ۲ تعریف نشده باشد.



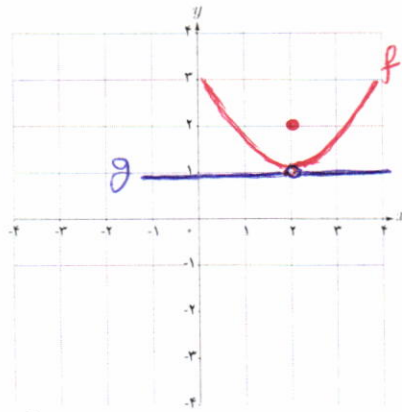
(۱)



(۲)



(۳)

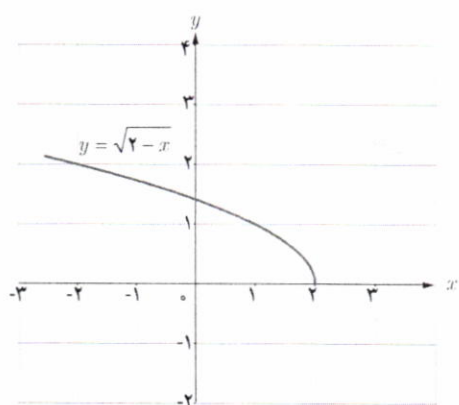
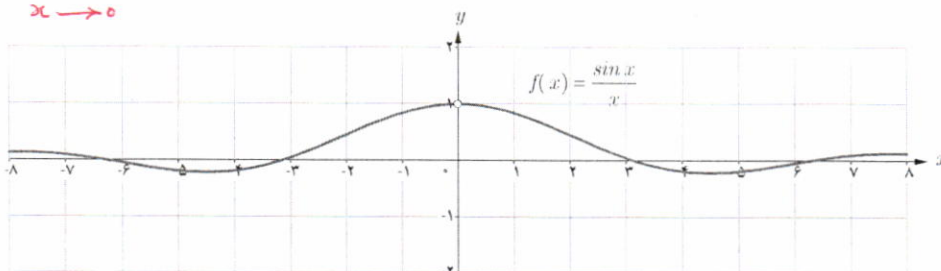


(۴)

| $x$           | $\frac{\sin x}{x}$ |
|---------------|--------------------|
| $\pm 1$       | ۰/۸۴۱۴۷۰۹۸         |
| $\pm ۰/۵$     | ۰/۹۵۸۸۵۱۰۸         |
| $\pm ۰/۴$     | ۰/۹۷۳۵۴۵۸۶         |
| $\pm ۰/۳$     | ۰/۹۸۵۰۶۷۳۶         |
| $\pm ۰/۲$     | ۰/۹۹۳۳۴۶۶۵         |
| $\pm ۰/۱$     | ۰/۹۹۸۳۳۴۱۷         |
| $\pm ۰/۰/۵$   | ۰/۹۹۹۵۸۳۳۹         |
| $\pm ۰/۰/۱$   | ۰/۹۹۹۹۸۳۳۳         |
| $\pm ۰/۰/۰/۵$ | ۰/۹۹۹۹۹۵۸۳         |
| $\pm ۰/۰/۰/۱$ | ۰/۹۹۹۹۹۹۸۳         |

۵ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع  $f$ ، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  را به دست آورید. (محور  $x$  ها بر حسب رادیان است).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



❖ مثال: آیا تابع  $f(x) = \sqrt{2-x}$  در نقطه  $x=2$  حد دارد؟ چرا؟

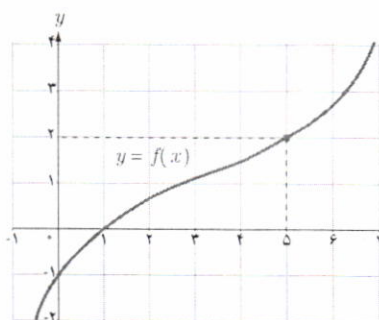
❖ حل: می‌دانیم دامنه تابع به صورت  $D_f = (-\infty, 2]$  می‌باشد.

چون تابع  $f$  در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر

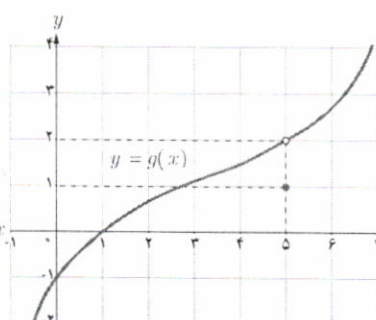
بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  حد ندارد.

## تمرین

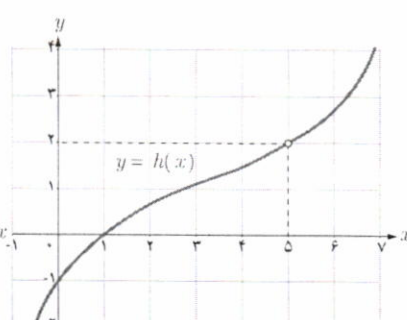
۱ نمودار سه تابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه  $x=5$ ، مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{?}$$

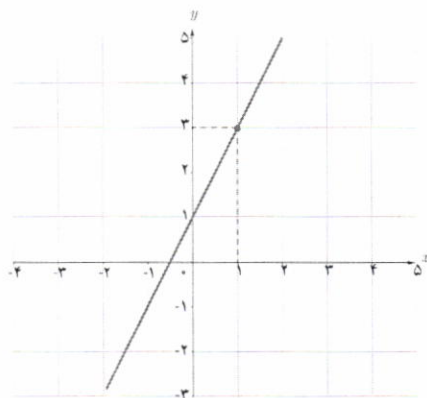


$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \text{?}$$

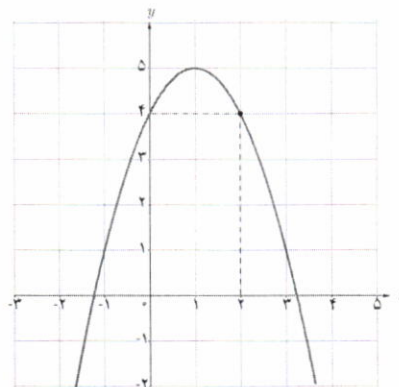


$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = \text{?}$$

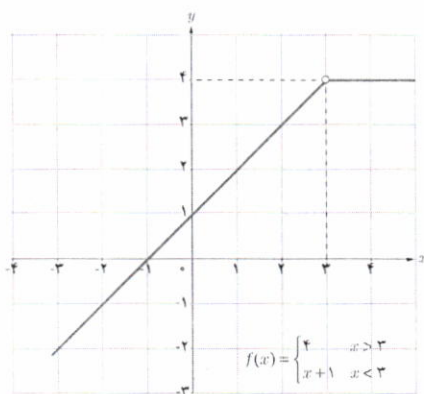
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



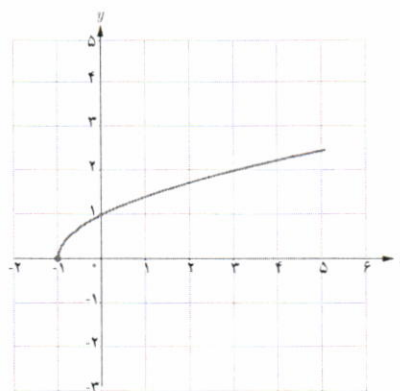
$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 6$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x + 1} = \text{محد ندارد}$$

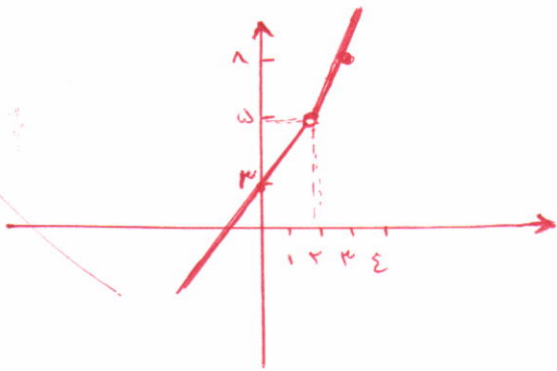
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x + 4) = 4$

|        |    |      |      |       |                 |                |       |      |     |     |   |
|--------|----|------|------|-------|-----------------|----------------|-------|------|-----|-----|---|
| $x$    | -1 | -0.9 | -0.1 | -0.01 | $\rightarrow 0$ | $\leftarrow 0$ | 0.001 | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1 |
| $f(x)$ | 1  | 2.7  | 3.7  | 3.97  | $\rightarrow ?$ | $\leftarrow ?$ | 3.999 | 3.99 | 3.7 | 2.5 | 1 |

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$  ,  $f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

|        |    |      |      |       |        |                  |                 |        |       |      |      |
|--------|----|------|------|-------|--------|------------------|-----------------|--------|-------|------|------|
| $x$    | -2 | -1.5 | -1.1 | -1.01 | -1.001 | $\rightarrow -1$ | $\leftarrow -1$ | -0.999 | -0.99 | -0.9 | -0.8 |
| $f(x)$ | -6 | -5.5 | -5.1 | -5.01 | -5.001 | $\rightarrow ?$  | $\leftarrow ?$  | -5.999 | -5.99 | -5.9 | -5.8 |

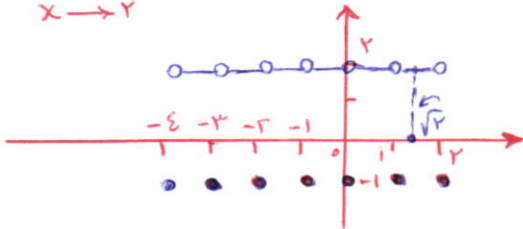


۴ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع  $f$  در نقطه  $x=2$ ، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار  $f$  و یا نوشتن جدول مقادیر  $f$  در همسایگی محذوف ۲ مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$



۵ تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  را در نظر بگیرید :

الف) نمودار  $g$  را در فاصله  $[-4, 2]$  رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار  $g$ ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$

الف)  $1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$D_f = [-1, 1] - \{0\}$$



۶ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  را در نظر بگیرید :

الف) دامنه تابع  $f$  را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ صفر

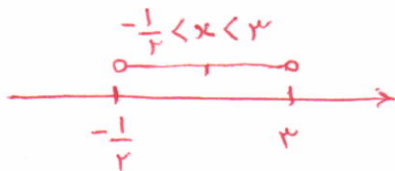
پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع  $f$  در همسایگی چپ  $x=1$  تعریف شده است؟ در همسایگی راست  $x=1$  چگونه؟ خیر

۷ اگر بازه  $(x-1, 2x+3)$  یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر  $x$  را به دست آورید.

$$x-1 < 2 \rightarrow x < 3$$

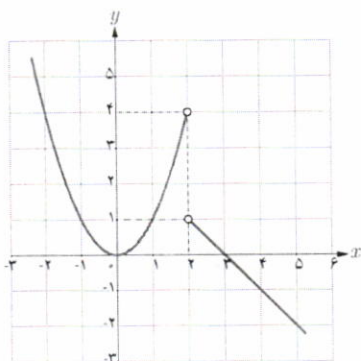
$$2x+3 > 2 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$



## حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع  $f(x) = \sqrt{2-x}$  در نقطه ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنه این تابع بازه  $(-\infty, 2]$  می باشد می توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر  $x$  با مقادیر بزرگتر از  $a$  به  $a$  نزدیک می شود یا وقتی متغیر  $x$  با مقادیر کوچکتر از  $a$  به  $a$  نزدیک می شود بررسی و توصیف نماییم.

### فنایت



نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$  به صورت روبه رو است:

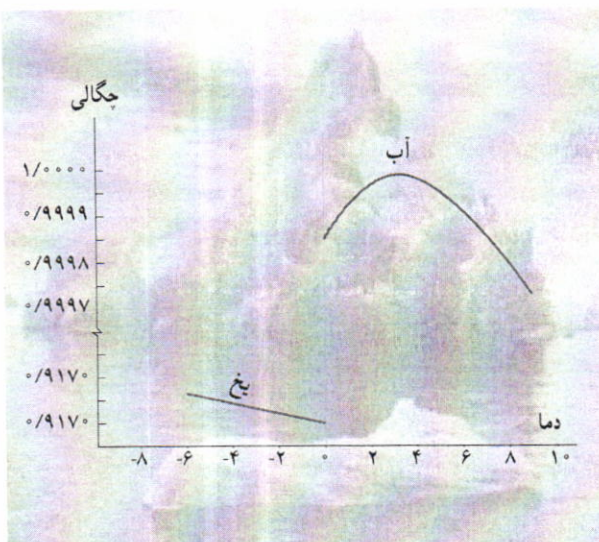
(الف) اگر متغیر  $x$  با مقادیر بزرگتر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن گاه مقادیر  $f(x)$  به عدد ۱ نزدیک می شوند.

(ب) اگر  $x$  با مقادیر کوچکتر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن گاه مقادیر  $f(x)$  به عدد ۴ نزدیک می شوند.

(پ) آیا تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  حد دارد؟ **محد ندارد. زیرا رفتار تابع**

**در همسایگی راست و چپ ۲ متفاوت است.**

### خواندنی



حتماً متوجه شده اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی شود؛ مانند کوه های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس ها شناورند. آیا می دانید چرا یخ در آب غرق نمی شود؟  
به طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی آید، منقبض می شود و مولکول هایش به هم نزدیک تر می شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می شود و جگالی آن افزایش می یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین تر از زمانی اند که به شکل مایع درآمده اند.  
ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می شود؛ در نتیجه حجمش افزایش می یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به دست می آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می رود و ۱/۸ دیگرش بر روی آب شناور می ماند.  
نمودار جگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه رو است:

در فعالیت صفحه قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگتر از ۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیر کمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی  $x$  در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر  $f(x)$  به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و در نتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

#### تعریف حد راست :

اگر تابع  $f$  در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  برابر عدد  $L_1$  است هرگاه مقادیر تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L_1$  نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر  $x$  (از سمت راست) به قدر کافی به  $a$ ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad \text{در این صورت می‌نویسیم :}$$

#### تعریف حد چپ :

اگر تابع  $f$  در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  برابر عدد  $L_2$  است هرگاه مقادیر تابع  $f$  را به هر اندازه دلخواه بتوان به  $L_2$  نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر  $x$  (از سمت چپ) به قدر کافی به  $a$ ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2 \quad \text{در این صورت می‌نویسیم :}$$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند  $a$ ، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

حد تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع  $f$  در  $x=a$  موجود و با هم برابر باشند.

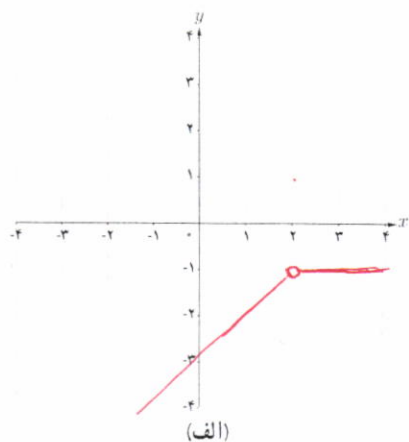
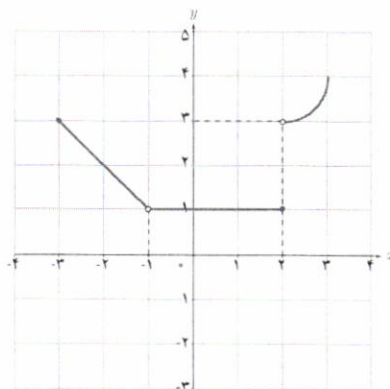
#### نتیجه

اگر حد چپ و حد راست  $f$  در نقطه  $x=a$ ، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع  $f$  در نقطه  $x=a$ ، حد ندارد.

۱ با توجه به نمودار  $f$ ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد} \\
 \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2 & \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \text{ وجود ندارد} & \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \text{ وجود ندارد} \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1
 \end{array}$$

$x \rightarrow (-1)^+$   
 $x \rightarrow (-1)^-$   
 $x \rightarrow (-3)^+$   
 $x \rightarrow (-3)^-$



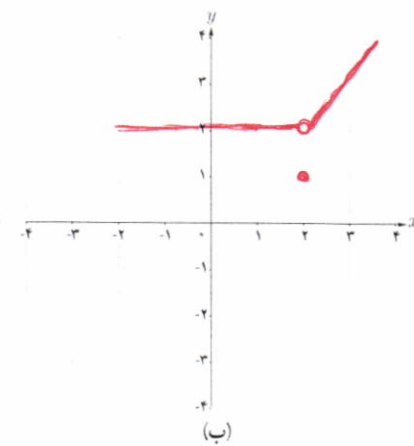
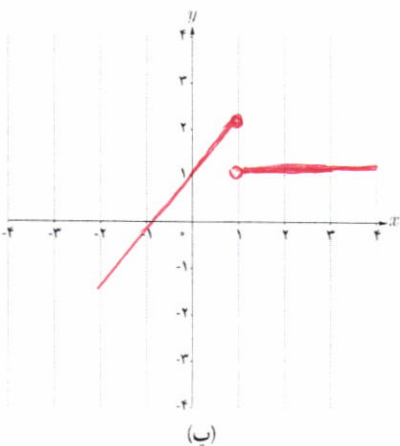
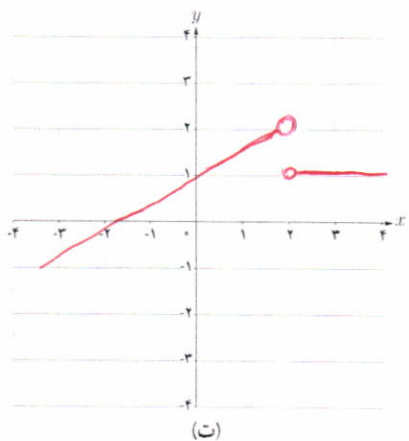
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که :

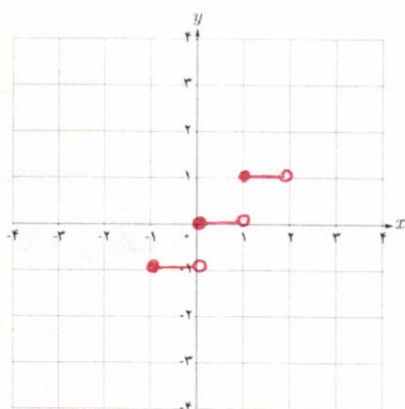
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.





۱ نمودار تابع  $f(x)=[x]$  را در فاصله  $[-1, 2]$  رسم کنید.

۲ اگر  $x$  از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آنگاه مقادیر

$f(x)$  به عدد  $\bullet$  نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \bullet$$

۳ حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  را به دست آورید.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

۴ آیا تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  حد دارد؟ چرا؟ *خیر؛ زیرا*

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازه  $(1, 2)$  که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع  $f(x)=[x]$  بر نمودار تابع ثابت

$$g(x)=1 \text{ منطبق است و داریم } \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$$

به همین ترتیب، در  $(0, 1)$  که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع  $f(x)=[x]$  بر نمودار تابع ثابت  $h(x)=0$  منطبق است و

$$\text{داریم } \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0$$

اگر دو تابع  $f$  و  $g$  در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند  $a$  با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در  $a$  وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در  $a$  وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی:

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ آن‌گاه } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه  $a$  با هم برابرند مقدار حد چپ آن‌ها در نقطه  $a$  (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه  $a$  (به جز احتمالاً خود  $a$ ) با هم برابر باشند مقدار حد آن‌ها در نقطه  $a$  (در صورت وجود) یکسان است.

❖ مثال: مقدار حد راست تابع  $f(x) = \frac{[x]}{x}$  را در نقطه  $x=0$  به دست آورید.

❖ حل: می‌دانیم روی بازه  $(0, 1)$  مقدار  $[x]$  برابر صفر است، پس روی بازه  $(0, 1)$  تابع  $f$  با تابع ثابت  $g(x)=0$  برابر است

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

۱ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  را در نظر بگیرید:

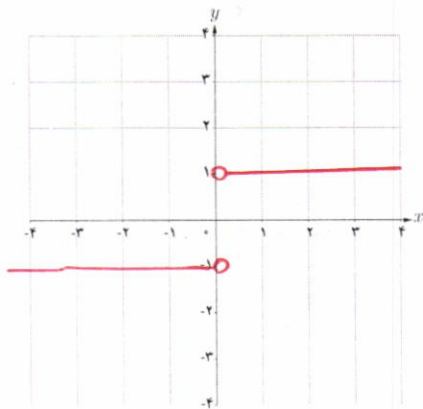
الف) با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع  $f$  را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار  $f$ ، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به دست آورید.

ت) آیا تابع  $f$  در نقطه صفر حد دارد؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{زیرا}$$

## تمرین

۱ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$

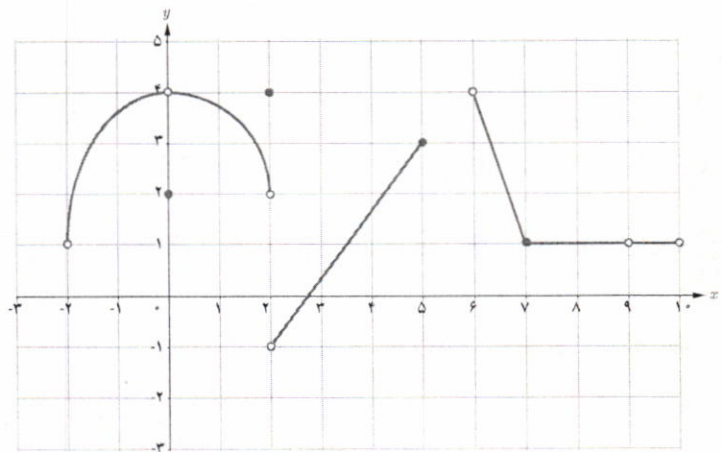
پ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{وجود ندارد}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 4$

ث)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$

چ)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1$



۲ بارسم نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2+2x & x < 0 \end{cases}$  به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر  $x$  از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر  $f(x)$  به عدد ۰ نزدیک می شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (0)^2 + 2(0) = 0$$

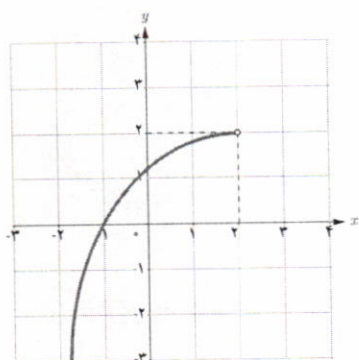
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

ب) حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  را به دست آورید.

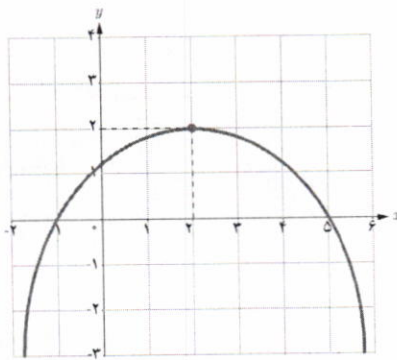
پ) آیا تابع  $f$  در نقطه  $x=0$  حد دارد؟ چرا؟ *خیر؛ زیرا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$*

۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟

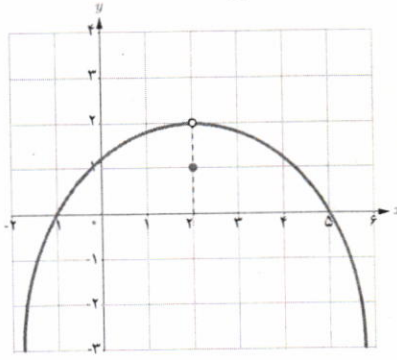
در هر مورد توابع را مشخص کنید.



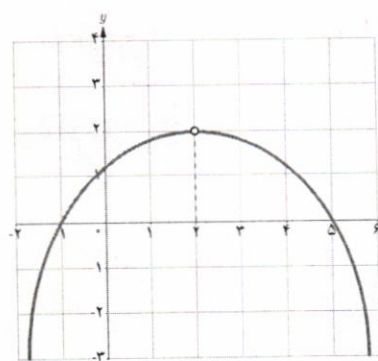
(پ)



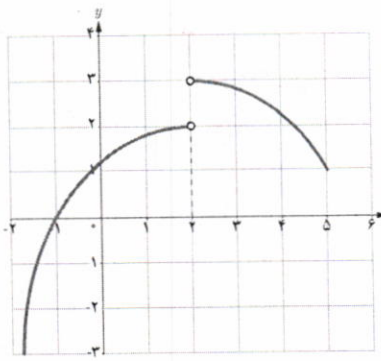
(ب)



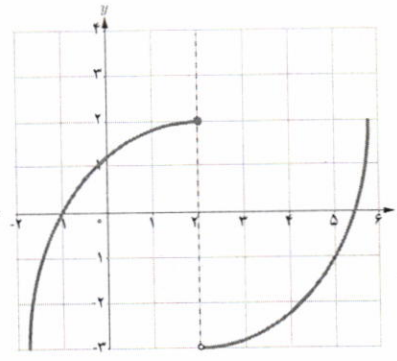
(الف)



(ج)



(ث)



(ت)

– تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

– تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

– تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

– تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

– تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

– تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت و ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  در نقطه  $x=1$  چه می توان گفت؟  
 معادل  $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$  تابع در  $x=1$  از سمت چپ تعریف شده است  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{(1)^2 - (1)} = 0$

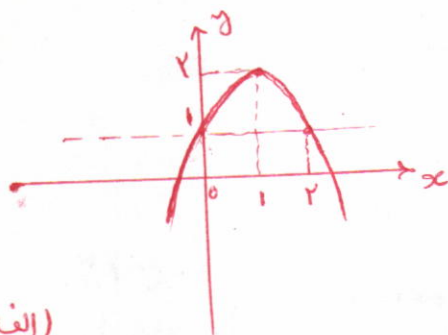
۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع  $f(x) = \frac{x}{[x] - 2}$  در نقطه  $x=2$  چه می توان گفت؟  
 $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [x] = 2$   
 $\Rightarrow [x] - 2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x] - 2} =$  وجود ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع  $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

ب)  $\left[ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

( [ ] نماد جزء صحیح است )



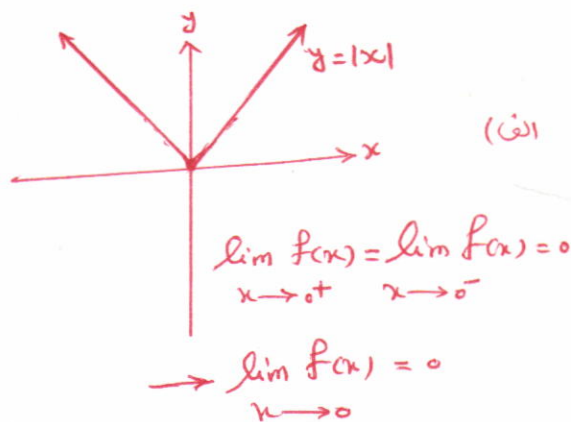
۷ با رسم نمودار تابع  $f(x) = |x|$ :

الف) مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$  را به دست آورید.

ب) اگر  $a \in \mathbb{R}$  یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی  $\lim_{x \rightarrow a} |x| = a$  برقرار است؟

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$   
 در  $x=1$  از هر دو طرف  $1 < f(x) < 2$   
 $\rightarrow [f(x)] = 1$

ب)  $\left[ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = [2] = 1$   
 در  $x=1$  عدد  $f(x)$  نزدیک به ۲ است.



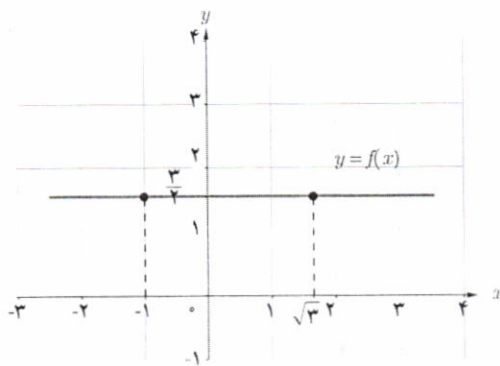
ب)  $f(x) = |x|$

$$\begin{cases} a \geq 0 \rightarrow |a| = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = a = |a| \\ a < 0 \rightarrow |a| = -a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = -a = |a| \end{cases}$$

## قضای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

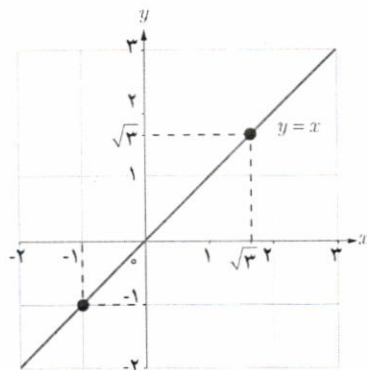
## فعالیت



الف) فرض کنید  $f$  تابع ثابت  $\frac{3}{4}$  باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{4}$$



ب) فرض کنید  $g$  تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی  $x$  داشته باشیم  $g(x) = x$ . با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$$

## قضیه :

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

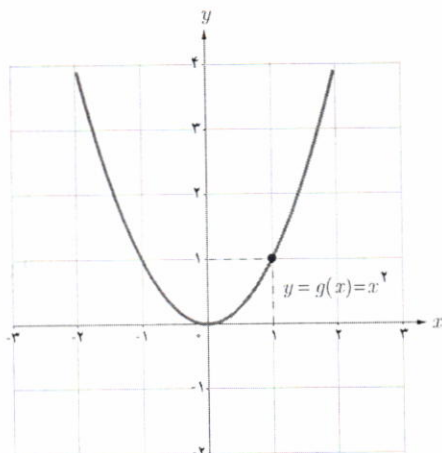
$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

الف) حد تابع ثابت  $f(x) = c$  در هر عدد دلخواه  $a$  برابر مقدار ثابت  $c$  است. یعنی،

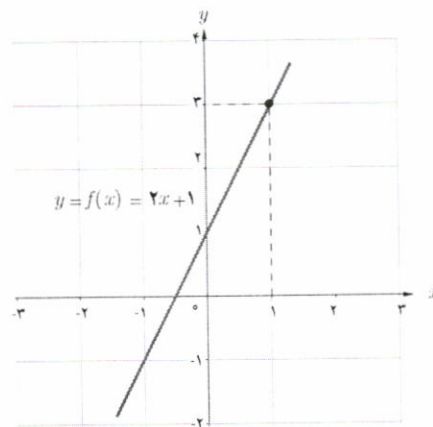
ب) حد تابع همانی  $g(x) = x$  در هر عدد دلخواه  $a$ ، برابر  $a$  است. یعنی،

توابع  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = x^2$  را در نظر بگیرید.

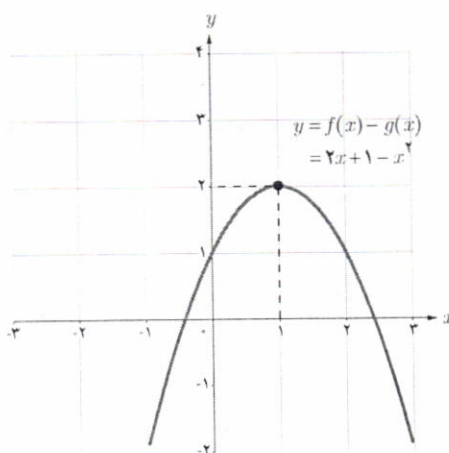
الف) با توجه به نمودار توابع  $f, g, f+g, f-g$ ، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



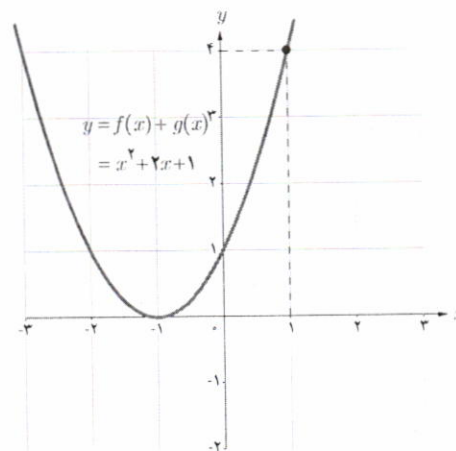
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \dots$$

ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

قضیه: اگر دو تابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x=a$  حد داشته باشند و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آنگاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در  $x=a$  حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در  $x=a$  حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

پ) (حد حاصل ضرب) حاصل ضرب این دو تابع در  $x=a$  حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه  $L_2 \neq 0$ ، تابع  $\frac{f}{g}$  در  $x=a$  حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

### کاردر کلاس

فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجود و  $c$  یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیه فوق، توضیح دهید چرا تساوی های زیر برقرارند؟

الف)  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow a} c f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ب)  $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^2$

$$= c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

پ)  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times f(x))$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^2$$

ت)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

(به شرط آنکه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ )

پ)  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} ((-1) f(x)) = -1 \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

❖ تذکر: قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر  $n$  یک عدد طبیعی و توابع  $f_1, \dots, f_n$  همگی در نقطه  $x=a$  حد داشته باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \times \dots \times f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  حد داشته باشد آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

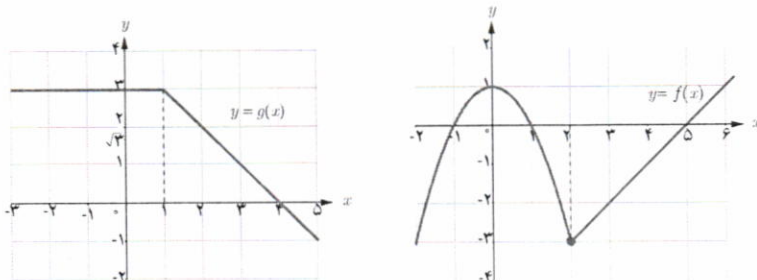
که در حالت خاص، اگر تابع  $f$  را تابع همانی  $f(x)=x$  انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

❖ مثال: دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 2 \\ x-5 & x \geq 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

حد توابع  $f, g, f+g, f-g$  و  $\frac{f}{g}$  را در نقطه  $x=2$  به‌دست آورید.

❖ حل: ابتدا حد دو تابع  $f$  و  $g$  را در نقطه  $x=2$  محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها داریم:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$ .

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) = (-3)(2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{-3}{2}$$

❖ مثال :

$$\begin{aligned}
 ۱) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^4 + 3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^4 + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 3x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\
 &= (\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x)^4 + 3 \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\
 &= (\sqrt{2})^4 + 3(\sqrt{2}) - 1 = 4 + 3\sqrt{2} - 1 = 3 + 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} x|x| = \left( \lim_{x \rightarrow 3} x \right) \times \left( \lim_{x \rightarrow 3} |x| \right) = 3 \times 3 = 9$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 7}{1 - x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 7)}{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1 - x)} = \frac{4 \left( \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x \right)^2 + 7}{1 - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x} = \frac{4 \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 7}{1 - \frac{1}{2}} = 16
 \end{aligned}$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند  $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  در هر نقطه دلخواه  $a$  حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه  $a$  برابر است. یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0$$

## کارد در کلاس

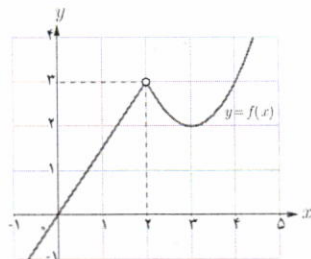
الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} x^4 = (-1)^4 = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1^3) - 6|1| + 1 = 5961$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{4x^3 - 7x + 1} = \frac{(2)^2 + 4(2) + 4}{4(2)^3 - 7(2) + 1} = \frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1 - x} &= \frac{\frac{1}{2} - [\frac{1}{2}]}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

(ب) نمودار تابع  $f$  در شکل روبه‌رو رسم شده است.مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2} x f(x)$  را بیابید.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} x &= 2 \\
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 3
 \end{aligned}$$

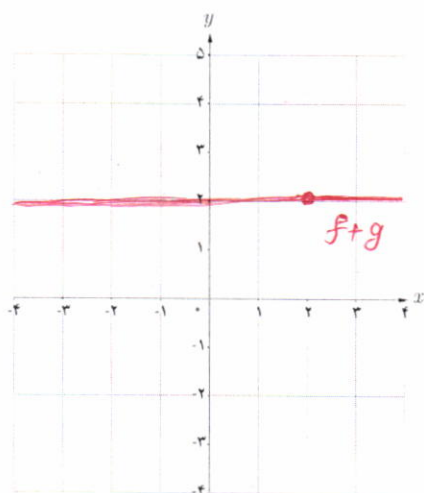
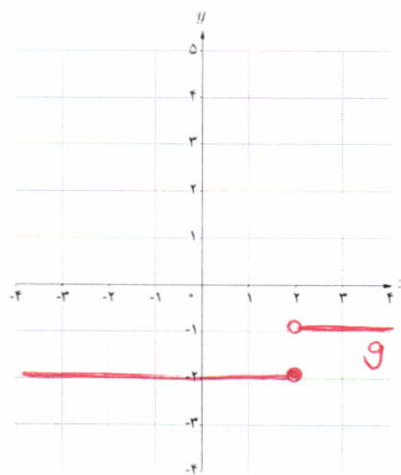
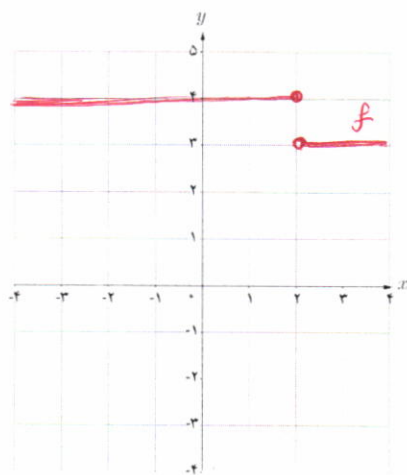
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 3 = 6$$

دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع  $f+g$  را بیابید.

ب) نمودار توابع  $f$ ،  $g$  و  $f+g$  را رسم کنید.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$



پ) آیا حد دو تابع  $f$  و  $g$  در  $x=2$  وجود دارد؟ **خیر**  
 ت) آیا حد تابع  $f+g$  در  $x=2$  وجود دارد؟ **بله**  
 ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد  $f+g$  در  $x=2$  استفاده کرد؟ چرا؟ **خیر**  
 شرط استفاده از این قضیه این است که توابع  $f$  و  $g$  در  $x=a$  حد داشته باشند.

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x=a$  موجود باشند.

فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  در یک همسایگی محذوف نقطه  $a$  تعریف شده‌اند.

الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  وجود دارند؟ چرا؟

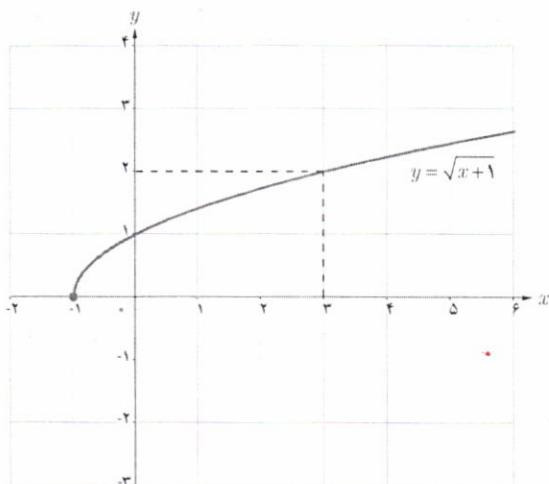
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ -1 & x < 3 \end{cases}$$

خیر؛ توابع زیر در  $x=3$  حد ندارد ولی  $f+g$  در این نقطه حد دارد.

ب) ثابت کنید اگر  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجود باشند، آن‌گاه  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  نیز وجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

### فعالیت



در شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$  رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$  را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

ب) آیا تساوی  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$  برقرار است؟

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$$

### قضیه:

فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $a$  حد دارد.

اگر تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف  $a$  نامنفی باشد آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی  $n$ ، اگر  $\sqrt[n]{f(x)}$  در یک همسایگی  $a$  تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

مثال:

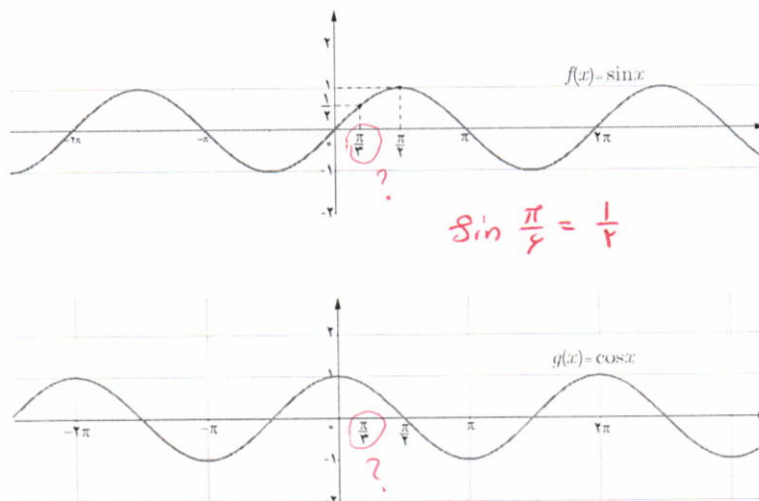
۱)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$  (برای  $n$ ‌های زوج  $a$  باید مثبت باشد)

۲)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{2(1)-1}}{3(1)-4} = -1$

## حد توابع مثلثاتی

### فعالیت

نمودارهای توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  در زیر رسم شده‌اند.



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$

۲)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$

۳)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۴)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ب) آیا مقدار حد تابع  $f(x) = \sin x$  در  $\frac{\pi}{6}$  با مقدار  $\sin(\frac{\pi}{6})$  برابر است؟ بله

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) آیا مقدار حد تابع  $g(x) = \cos x$  در  $\frac{\pi}{6}$  با مقدار  $\cos(\frac{\pi}{6})$  برابر است؟ بله

قضیه: برای هر عدد حقیقی  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

❖ مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \cos^2 x - \sin x) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2/5$$

$$\pi \cos \pi = \pi \times (-1)$$

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \pi \cos x}{\lim_{x \rightarrow -\pi} x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

❖ تذکر: همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به عنوان مثال، اگر حد چپ توابع  $f$  و  $g$  در  $a$  موجود باشند، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

❖ مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow a^+} x^n = \lim_{x \rightarrow a^+} \overbrace{(x \times \dots \times x)}^{n \text{ بار}} = (\lim_{x \rightarrow a^+} x) \times \dots \times (\lim_{x \rightarrow a^+} x) = a \times \dots \times a = a^n$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x])}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} x - \lim_{x \rightarrow 1^-} [x]}{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} 2} = \frac{1 - 0}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - \sin x) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$

مقدار حد  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}$  را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]+2} = \frac{0}{2+2} = 0$$

$$پ) = \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(\sqrt[3]{-\frac{5}{3}} + 5)}{(\sqrt[3]{-\frac{5}{3}} + 6)(-\frac{5}{3} + 1)} = 0$$

فصل پنجم: حد و پیوستگی ۱۳۹

$$ت) = \frac{1 - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 - 2} = \frac{1 - 2}{2 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = (\sqrt{9} - 9)^3 = (-216) \quad ب) \lim_{x \rightarrow -1} (-6x^5 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^5 - 4(-1) + 5 = 15$$

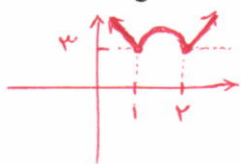
$$پ) \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^3 + 1)}$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4})} = 2$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{\sin 0}{0 + \cos 0} = \frac{0}{0 + 1} = 0 \quad ح) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{|\cos \frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

۲ فرض کنید  $f$  یک تابع باشد، به طوری که  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ . آیا می‌توان گفت  $f$  حتماً تابع ثابت ۳ است؟ **خیر**



به تابع زیر توجه کنید که شرایط داده شده را دارد ولی ثابت نیست.

۳ تابع  $g$  را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1} = 4 \rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{3} = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12$$

۴ نشان دهید اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ . آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

$$\text{عکس} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$$

$$+L \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L + L = 0 + L$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



$\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2 = 5$  /  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$  /  $\lim_{x \rightarrow 1} [x] - 1 = 0$  و محدود می‌شود /  $y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

در  $x = 1$  محدود نمی‌شود /  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$  /  $\lim_{x \rightarrow 1} [x] - 1 = 0$  و محدود می‌شود /  $y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = \mathfrak{I}x + \mathfrak{I} \quad , \quad y = x' - \mathfrak{I} \quad , \quad y = [x] - \mathfrak{I} \quad y = \begin{cases} -\mathfrak{I} & x < \mathfrak{I} \\ \mathfrak{I} & x > \mathfrak{I} \end{cases}$$

|                                        |                             |                  |                                                                |                                                                                                    |
|----------------------------------------|-----------------------------|------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^2 + 3x + 1$                         | $f(x) + g(x) = \dots$       | $g(x) = x^2 - 1$ | $f(x) = 3x + 2$                                                | هر سه تابع $f$ ، $g$ و $f+g$ در $\mathbb{A}$ حد دارند.                                             |
| $(x-1)(x-1)$                           | $f(x)g(x) = \dots$          | $g(x) = x^2 - 1$ | $f(x) = (x-1)$                                                 | تابع $f \cdot g$ در $\mathbb{A}$ حد دارد اما تابع $f$ در $\mathbb{A}$ حد ندارد.                    |
| $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{x-1}$ | $\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$ | $g(x) = (x-1)$   | $f(x) = 3x+2$                                                  | نواع $f$ و $g$ در $\mathbb{A}$ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در $\mathbb{A}$ حد راست ندارد. |
| $f^2(x) = x^2$                         | $f^2(x) = \dots$            |                  | $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ | تابع $f^2$ در $\mathbb{A}$ حد دارد اما تابع $f$ در $\mathbb{A}$ حد ندارد.                          |
| $\sqrt{f(x)} = \sqrt{3x+2}$            | $\sqrt{f(x)} = \dots$       |                  | $f(x) = x^2 - 1$                                               | تابع $f$ در $\mathbb{A}$ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در $\mathbb{A}$ حد ندارد.                     |

ایک ہے یہ روئے برہان خلفہ گریہ کہ تابع  $f+g$  حد درجہ لڑا

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma + [x]}{|x|} & x < -1 \\ \gamma x + b & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 1}{-x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

در شکل زیر نمودار توابع  $f$  و  $g$  رسم شده اند. با استفاده از نمودارها، مقدارهای زیر را بیابید.

$$\rightarrow b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow r} (g(x) - f(x)) = r(r) - 0 = r$$

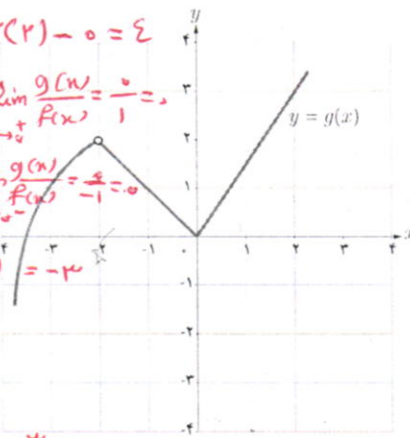
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} -3\sqrt{g(x)} = -3(1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \gamma} \sqrt[n]{\Lambda g(x)}$$

$$= \sqrt{\lambda(\mu)} = \sqrt{\mu}$$



محاسبه حد توابع کسری (حالت  $\frac{0}{0}$ )

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند  $\frac{f}{g}$  می پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه  $a$ ، هر دو برابر صفر است. در این گونه موارد، نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می کنیم با تجزیه صورت و مخرج کسر به عامل های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحاد های جبری و مثلثاتی استفاده می کنیم.<sup>۱</sup>

❖ مثال: مقدار  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  را بیابید.

❖ حل: با توجه به اینکه  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ ، پس نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در

واقع از  $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$  عبارت  $\frac{0}{0}$  حاصل می شود. در این گونه موارد، سعی می کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

## کاردرکلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله ای های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به صورت  $\sqrt{ax+b}$  باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به صورت  $x+b$  یا  $2x+b$  خواهند بود.

❖ مثال : مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$  را بیابید.

❖ حل : حد صورت و مخرج کسر در  $x=1$ ، برابر صفر می شود و در صورت کسر عبارت گنگ  $\sqrt{x+8}-3$  وجود دارد. در این گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت  $\sqrt{x+8}+3$  ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - (3)^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

### کارد کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{3x-5}-2} \times \frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(x-3)} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3} \quad \text{❖ مثال :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

نوعه:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

❖ مثال: مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$  را بیابید.❖ حل: قرار می‌دهیم:  $t = \sqrt{1+x}$ . پس اگر  $x$  به صفر نزدیک شود،  $t$  به ۱ نزدیک می‌شود و داریم  $x = t^2 - 1$  و بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد مورد نظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

❖ مثال: مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$  را بیابید.❖ حل: قرار می‌دهیم:  $t = x - \frac{\pi}{2}$ . پس اگر  $x$  به  $\frac{\pi}{2}$  نزدیک شود،  $t$  به صفر نزدیک می‌شود و داریم  $x = t + \frac{\pi}{2}$ . پس،

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{-\sin t} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = -2 \times 1 = -2$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2t \rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow 4x - \pi = 4t$$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t} \times \frac{\cos 2t + 1}{\cos 2t + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times \frac{\sin 2t}{\cos 2t + 1} \times \frac{-1}{2} = 1 \times \frac{\sin(0)}{\cos(0)+1} \times \frac{-1}{2} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۴۴

تمرین

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{2x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{2x(x+1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{2x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{2x+1}}{2 + \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+\sqrt{2x+1})}{2(\varepsilon-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \text{بالا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

۲ اگر  $f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - x - 1}$  و  $g(x) = \frac{2x+1}{x}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$  را بیابید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$$

۲ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x^2}{|1 - \cos x|}$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 - 2\cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 - \cos x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2(1 - \cos(x+\pi))}{x \sin x}$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$د) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$ه) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\varepsilon(1 - \cos^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{\sin x} \times \varepsilon = 1 \times 1 \times \varepsilon = \varepsilon$$

$$x < 0 \rightarrow 0 < \cos x < 1 \rightarrow -1 < -\cos x < 0 \rightarrow 0 < 1 - \cos x < 1 \rightarrow |1 - \cos x| = 1 - \cos x$$

$$پ) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \times (1 + \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\sin^2 x} (1 + \cos x) = 1 \times (1 + 1) = 2$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t - \pi) + 1}{t} \times \frac{\cos(t - \pi) - 1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t - \pi) - 1}{t} \times \frac{1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t}{t \cos(t - \pi)} = 0$$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳:

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x+\pi=t} \frac{\cos(t-\pi) + 1}{t} \quad t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cos \pi + \sin t \sin \pi + 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\cos t \cos \pi}^{-\cos t} + \overbrace{\sin t \sin \pi}^0 + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} = 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x-a=t} \frac{\sin(t+a) - \sin a}{t} \quad t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= 1 \times \cos a - 1 \times \frac{0}{1+1} \times \sin a = \cos a$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x-\frac{\pi}{3}=t} \frac{\sin t}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1}{6} \times \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1 - 3\sqrt{x}}{x - 1} \times \frac{2x + 1 + 3\sqrt{x}}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 1)^2 - (3\sqrt{x})^2}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 4x + 1 - 9x}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

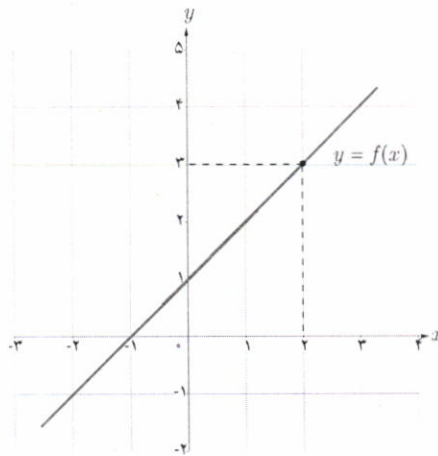
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(4x - 1)}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

122,2

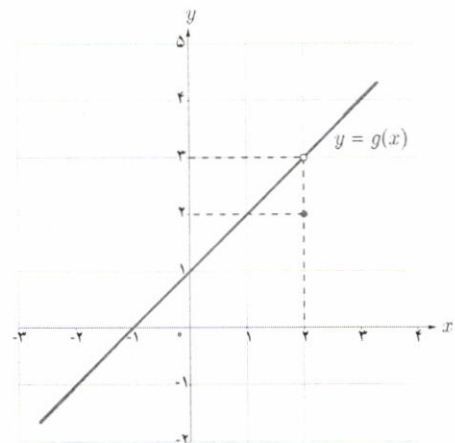


الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



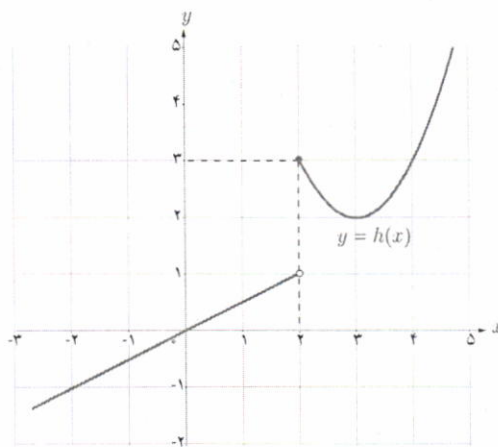
$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$



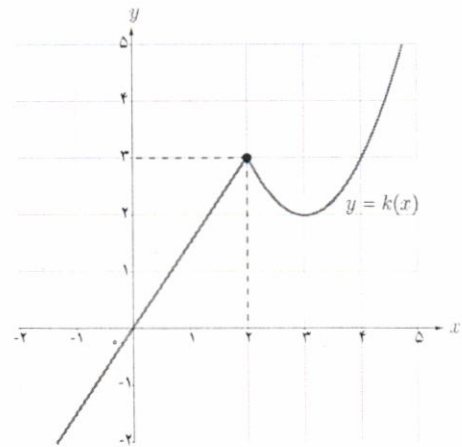
$$g(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$



$$h(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \text{وجود ندارد}$$



$$k(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 2$$

$f, k$

$f, k$

ب) برای کدام یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟  
پ) در نمودار کدام یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟

همان طور که در شکل های فوق مشاهده می کنید نمودار تابع  $f$  (و همچنین تابع  $k$ ) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع  $f$  (و همچنین تابع  $k$ ) در نقطه  $x=2$  پیوسته است».

## تعریف پیوستگی

گوییم تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  پیوسته است هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، باید شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) تابع  $f$  در  $a$  تعریف شده باشد.

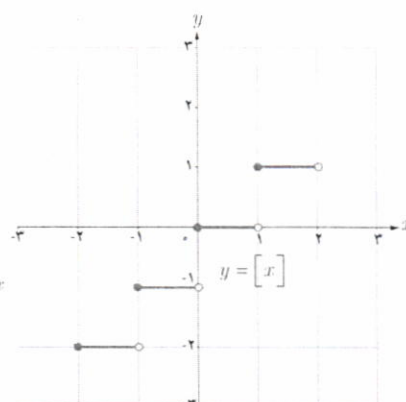
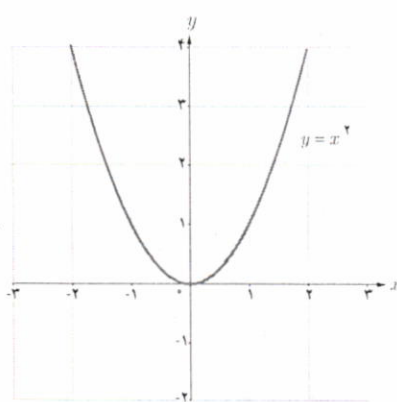
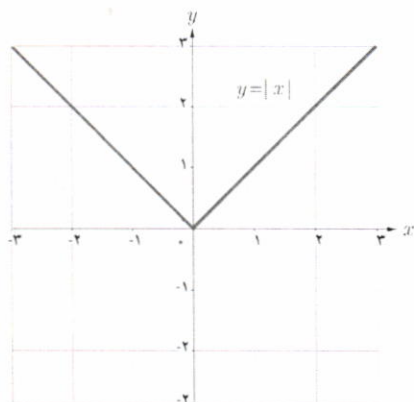
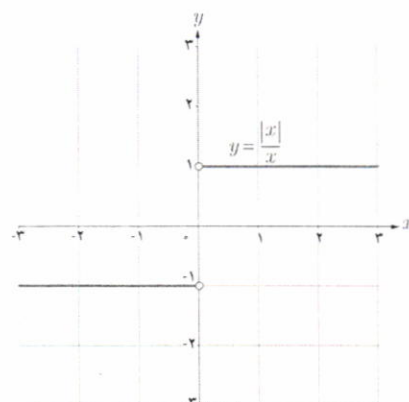
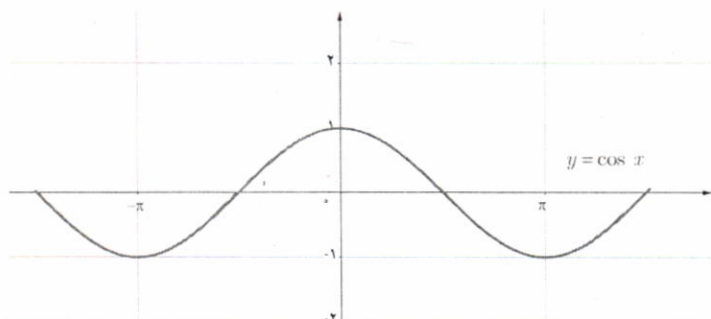
(ب) حد تابع  $f$  در  $a$  موجود باشد.

(پ) مقدار حد تابع  $f$  در  $a$  با مقدار  $f(a)$  برابر باشد.

هنگامی که تابع  $f$  در نقطه  $x=a$  پیوسته نیست، گوییم  $f$  در  $x=a$  ناپیوسته است.

♣ مثال: در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه  $a$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ . پس توابع  $y = \sin x$  و  $y = \sqrt{x}$  در هر عدد  $a$ ، پیوسته‌اند.

همچنین توابع  $y = \cos x$ ،  $y = |x|$  و  $y = x^2$  و نیز چند جمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی  $a$  پیوسته‌اند. اما توابع  $y = \frac{|x|}{x}$  و  $y = [x]$  این چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.



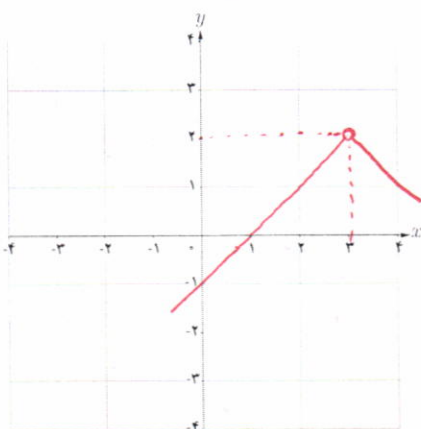
♣ مثال: توابع  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  و  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$  داده شده‌اند. درباره پیوستگی  $f$  و  $g$  در نقطه ۳ بحث کنید.

♣ حل: از آنجایی که  $f$  در ۳ تعریف نشده است، پس تابع  $f$  در ۳ پیوسته نیست.  
در مورد تابع  $g$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6 = g(3)$$

پس تابع  $g$  در ۳ پیوسته است.

### کاردر کلاس

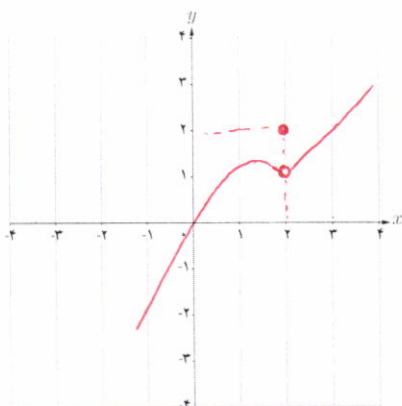


(۱)

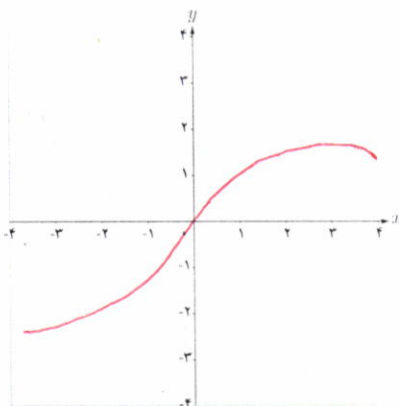
- ۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در  $x=3$  وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در  $x=3$  پیوسته نیست)
- ۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه  $a$  موجود باشد اما با مقدار تابع در  $a$  برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در  $a$  پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

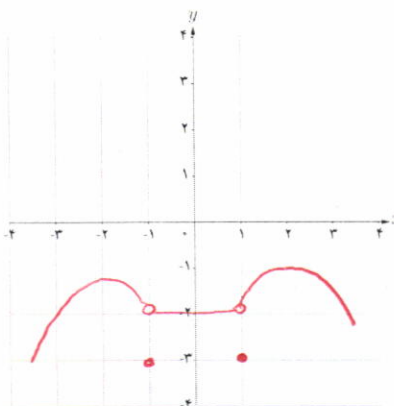
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه.



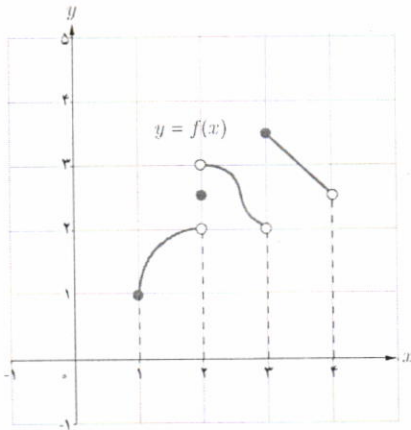
(۲)



(۳)



(۴)



نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع  $f$  در کدام یک از نقاط مجموعه  $\{1, 2, 2.5, 3, 4\}$  ناپیوسته است. ۲، ۳

ب) آیا تساوی  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$  برقرار است؟ خیر

پ) آیا تساوی  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$  برقرار است؟ خیر

ت) در کدام نقطه  $a$  از مجموعه  $\{1, 2, 2.5, 3, 4\}$  تساوی  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  برقرار است؟ ۱ و ۳

### تعریف

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

گوییم تابع  $f$  در  $a$  از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

گوییم تابع  $f$  در  $a$  از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

بنابراین، هرگاه تابع  $f$  در یک همسایگی (دوطرفه)  $a$  تعریف شده باشد:

$f$  در  $a$  پیوسته است اگر و تنها اگر  $f$  در  $a$  هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

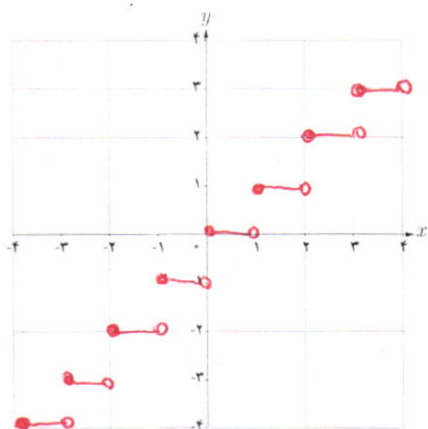
$$\clubsuit \text{ مثال: تابع } f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2\cos x - \sin x & x > 0 \end{cases} \text{ داده شده است. پیوستگی تابع } f \text{ در صفر را بررسی کنید.}$$

$\clubsuit$  حل: داریم  $f(0) = 2$ . همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + x) = 0 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\cos x - \sin x) = 2\cos(0) - \sin(0) = 2 = f(0)$$

بنابراین  $f$  در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.



الف) بارسم نمودار تابع  $f(x) = [x]$  مشخص کنید که در کدام یک از

نقاط مجموعه  $\{0, \frac{1}{4}, 2\}$

۱) تابع  $f$  پیوسته است.  $\frac{1}{4}$

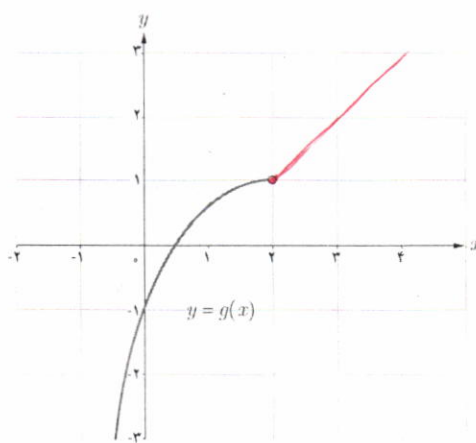
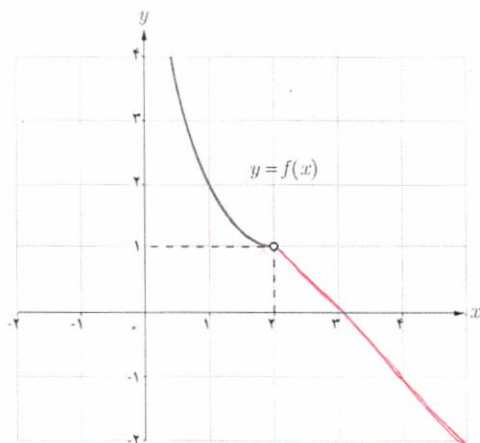
۲) تابع  $f$  پیوستگی راست دارد. ۲, ۰

۳) تابع  $f$  پیوستگی چپ دارد. هیچکدام

ب) در شکل های زیر نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده اند. در نقطه  $x=2$  و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱) تابع  $f$  در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲) تابع  $g$  در نقطه ۲ پیوسته باشد.



### تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع  $f$  را بر بازه باز  $(a, b)$  پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه  $(a, b)$  پیوسته باشد.

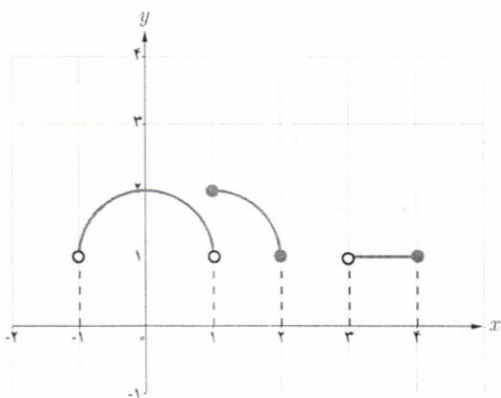
تابع  $f$  را بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته گوئیم هرگاه تابع  $f$  در هر نقطه  $(a, b)$  پیوسته باشد و در  $a$  از راست پیوسته و در  $b$  از چپ پیوسته باشد.

پیوستگی روی بازه‌های  $[a, b]$  و  $(a, b)$  را به طور مشابه تعریف کنید.  
 تابع  $f$  را در بازه‌ی  $(a, b)$  پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشد و در  $a$  پیوستگی راست داشته باشد.  
 تابع  $f$  را در بازه‌ی  $[a, b]$  پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشد و در  $b$  پیوستگی چپ داشته باشد.

❖ مثال :

(۱) تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  بر بازه  $[0, 2]$  پیوسته است.

(۲) تابع  $f(x) = [x]$  بر بازه  $(0, 1)$  پیوسته است، اما بر بازه بسته  $[0, 1]$  پیوسته نیست.



در شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f$  رسم شده است. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

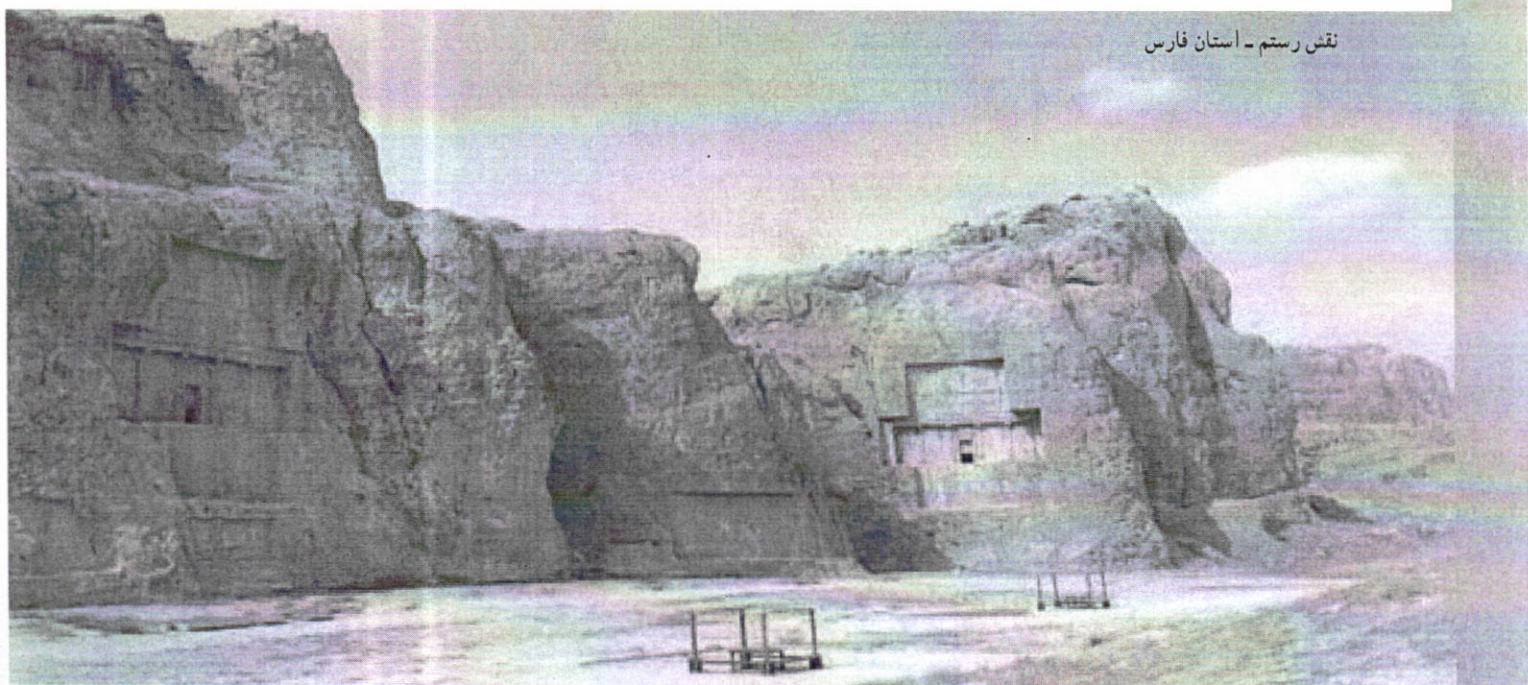
الف) تابع  $f$  بر بازه  $[1, 2]$  پیوسته است. **درست**

ب) تابع  $f$  در هر نقطه از  $[1, 2]$  پیوسته است. **نادرست**

پ) تابع  $f$  بر بازه  $[3, 4]$  پیوسته است. **نادرست**

ت) تابع  $f$  بر بازه  $[0, 2]$  پیوسته است. **نادرست**

نقش رستم - استان فارس



۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف)  $y = |x - 1| + 2$

ب)  $y = x - [x]$

ت)  $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$

پ)  $y = [x] + [-x]$

۲ در توابع زیر مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه  $x=1$  پیوسته باشد.

ب)  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$

الف)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$

ت)  $k(x) = ([x] - a)[x]$

پ)  $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 < x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای  $a$ ، توابع زیر در  $x=0$  پیوسته نیستند.

ب)  $g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

الف)  $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.  
 ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.  
 پ) ضابطه یک تابع  $f$  را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع  $f(x) = [x]$  در بازه  $(2, k)$  پیوسته است. حداکثر مقدار  $k$  چقدر است؟

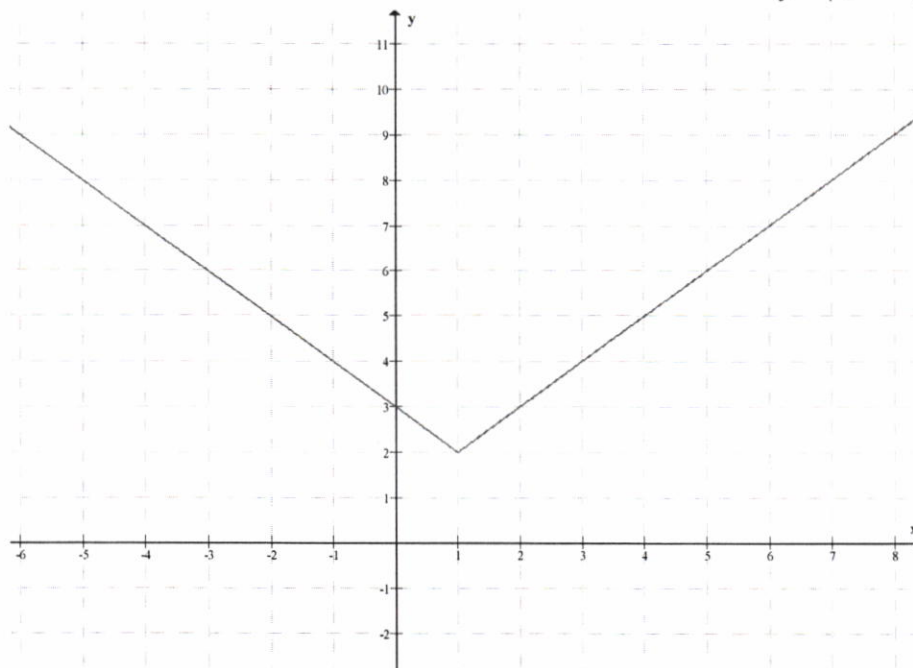
۶ بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$  بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases}$  در  $x=0$  پیوسته باشد.

## حل کاردر کلاس صفحه ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

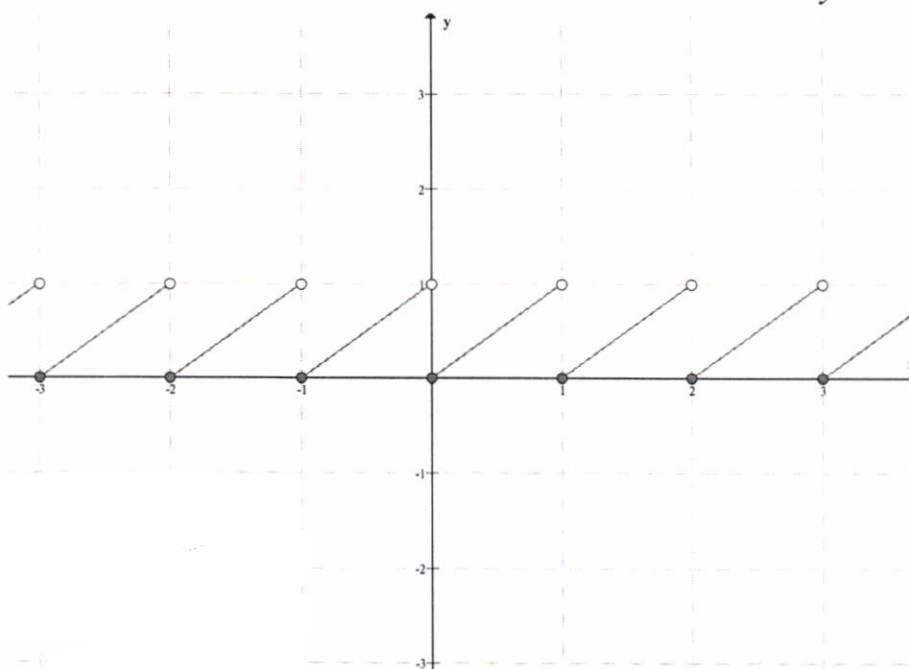
۱ :

الف  $y = |x - ۱| + ۲$



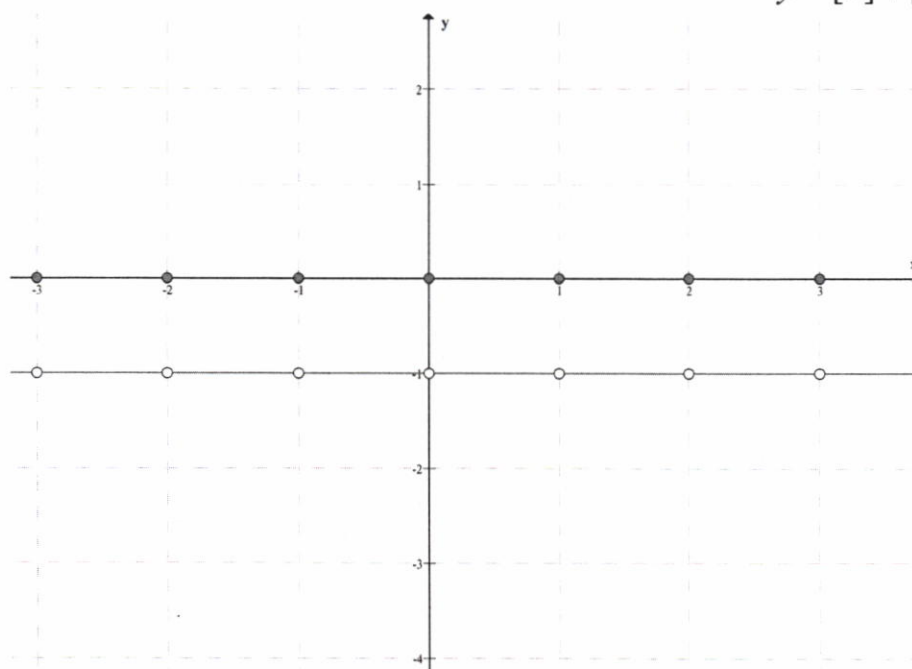
تابع در تمام نقاط پیوسته است.

ب  $y = x - [x]$



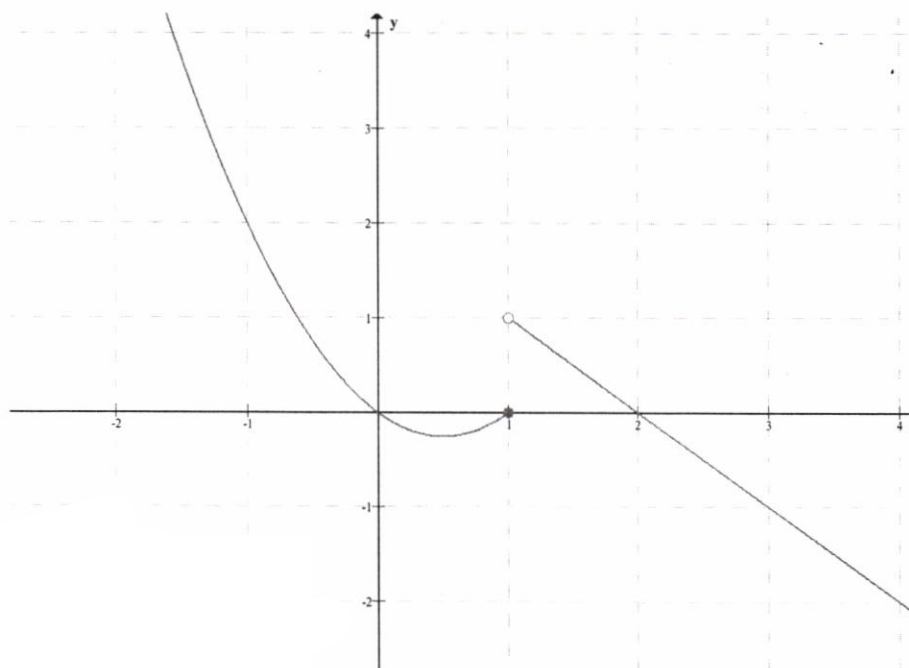
تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد .

پ)  $y = [x] + [-x]$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

ت)  $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$



تابع در نقطه‌ی  $x = 1$  پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

\*\*\*

:۲  
(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2(1) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1) + 2 = 1$$

$$f(1) = a$$

$$\rightarrow a = 1$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

$$g(1) = a$$

$$\rightarrow a = 3$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$h(1) = 1 + a$$

$$\rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = 0$$

$$k(1) = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\rightarrow 1 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

۱۵۱، ۳

۳:

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای  $a$  در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

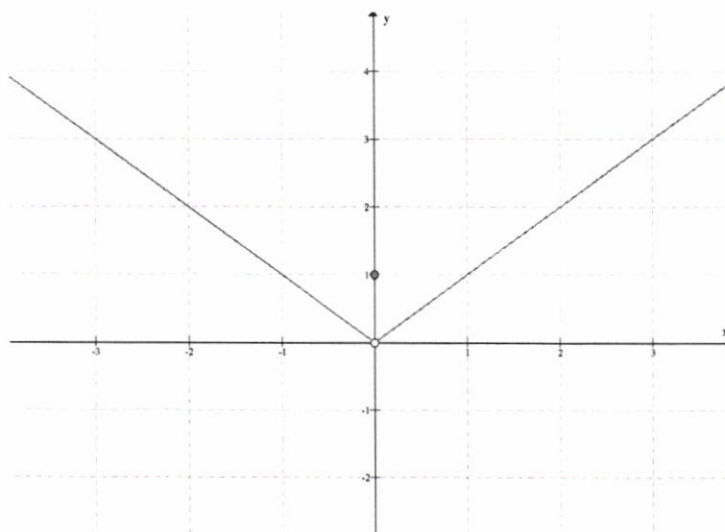
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$g(0) = 1$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه ی صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای  $a$  در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

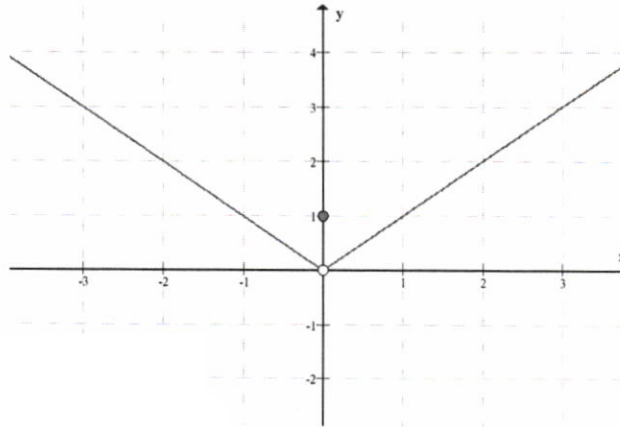
\*\*\*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{(الف: ۴)}$$



۱۵۱، ۴

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 2 \\ 3 & 2 < x < 3 \text{ (ب)} \\ x - 2 & x \geq 3 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{1}{|x| - 2} \text{ (پ)}$$

۵: باید  $k < 3$  باشد.

۶:

$$3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

تابع در بازه‌ی  $(-\infty, 3]$  پیوسته است.

۷:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2a) = -2a$$

$$f(0) = b - 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ b - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۵۱, ۵