



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

**کلیک کنید**  [www.tafrihicenter.ir/edu](http://www.tafrihicenter.ir/edu)

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

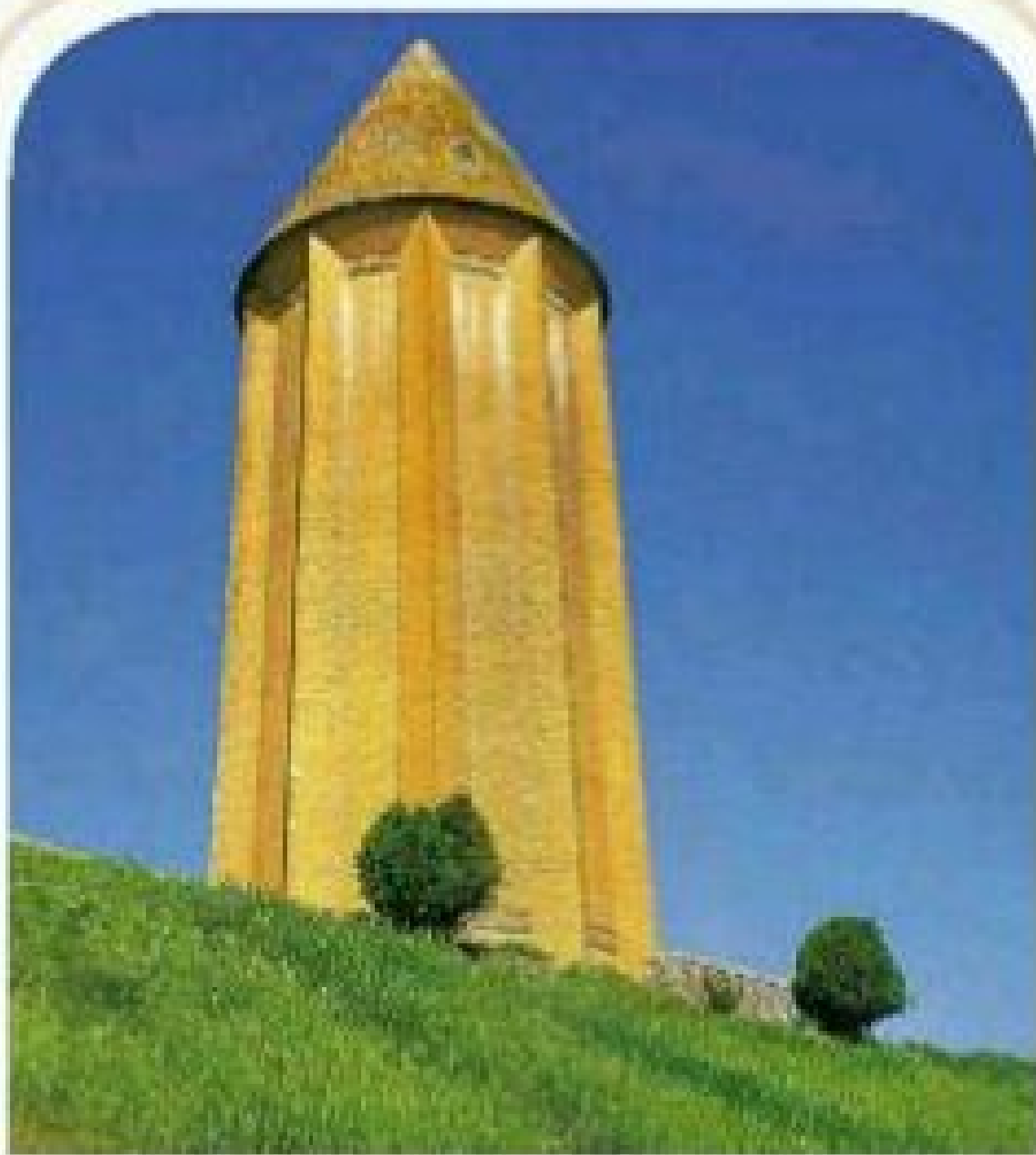
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

[www.tafrihicenter.ir](http://www.tafrihicenter.ir)



# حجم و مساحت



کنبد قابوس پدای تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبد گنبد قابوس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج **استوانه‌ای** که گنبدی **سفره‌ای** شکل روی آن قرار گرفته است ۸۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل **منشور** روی بدنه استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شط‌در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

## درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شد: منشوری، کروی و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید. پرتقال - هندوانه - گردو

### فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.



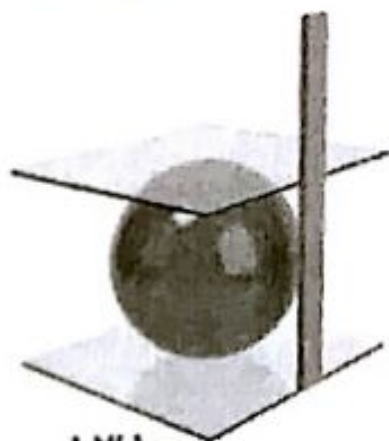
فاصله آن نقطه از

کره مجموعه نقاطی از فضا است که مرکز آن به یک اندازه ثابت هستند. به این اندازه ثابت شعاع کره می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

• یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

• مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.







• مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توب کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن معاس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره  $R$  باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب  $R$  نشان دهید.

$$2R = \text{ارتفاع استوانه}$$

$$R = \text{شعاع کره} \quad \text{حجم استوانه} : V = \pi R^2 \times h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

• توب را از استوانه خارج کنید و بادقت آن را بپرسید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را بادقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده بر از آب می‌شود.



الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟  $\frac{4}{3}$  برابر

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟  $\frac{8}{3}$  برابر یا  $\frac{4}{3}$

ج) بنابراین حجم کره  $\frac{2}{3}$  برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع  $R$  را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای به شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می‌آید.}$$

### کار در کلاس

$$R = 5, h = 10$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.

$$\text{الف } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\text{ب) } V = Sh = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\text{ج) } V_{\text{فضای بین کره و استوانه}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$\text{۲- حجم نیم کره ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000}{3}\pi$$



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره ای را که از نصف کردن توب پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ بله در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. در بعضی ها کاغذ چروک می شود.



۲- ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع  $R$ ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).  
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با:  $2\pi R^2$   
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $S = 4\pi R^2$

## کار در کلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع  $10$  سانتیمتر را پیدا کنید.  $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 400\pi$

۲- می خواهیم یک نیم کره جویی توپر به شعاع  $10$  سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت

رنگ شده را پیدا کنید.  $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره جویی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیم کره جویی توپر  $3$  برابر مساحت دایره هر یک  $100\pi$  و در مساحت عرق چین  $2$  برابر مساحت دایره محاسب می شود.



ع)  $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^6 = 1,73184\pi \times 10^8$   
 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times (4,2 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^6 = 1,73184\pi \times 10^8$  مترمربع  
 $\frac{1,73184 \times 10^8}{1,73184 \times 10^8 \pi} = \frac{1,73184}{1,73184 \times 10^8 \pi} = 10^{-8} = 1,7 \times 10^{-3}$   
 $1,7 \times 10^{-3} \times 10^8 = 1,7 \times 10^5$

تشریح

قطر =  $1,78 \times 10^4$   
 شعاع =  $7,4 \times 10^3$

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

(الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

(ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید. - قطر  $1,78 \times 10^7$  شعاع  $7,4 \times 10^6$

(ج) مساحت تقریبی رويه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

(د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود  $1,64 \times 10^6$  کیلومتر مربع است. مساحت

ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

ارتفاع  $h = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ m}$

$V = \pi \times 7^2 \times 0,7 = 107,8 \pi$

$V = \frac{4}{3} \pi \times 7^3 \times \frac{1}{4} = 107,8 \pi$

$= \frac{4}{3} \pi \times 7^3 \times \frac{1}{4} = 107,8 \pi$

$V = 107,8 \pi + 107,8 \pi = 215,6 \pi$

حجم کیسول



۲- یک کیسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک

استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده

کیسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کیسول را بر

حسب متر مکعب به دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این کیسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم

رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم

رنگ نیاز داشته باشد. دریا



۳- پیمانه ای به شکل نیم کره و به قطر

دهانه ۲۴ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در

لیوانی استوانه ای شکل با همان قطر خالی

می کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا

می آید؟

$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 12^3 \times \frac{1}{4} = 144 \pi$   
 $\Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \pi \times 12^3}{\pi \times 12^2} = \frac{4}{3} \times 12 = 16$   
 ارتفاع آب = ۱۶  
 $V = \pi \times 12^2 \times 8 = 1152 \pi$

مساحت نیم کره =  $4\pi R^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi \times 12^2 = 288 \pi$

مساحت جانبی استوانه =  $2\pi R \times 8 = 2\pi \times 12 \times 8 = 192 \pi$

مساحت دایره دهانه =  $\pi R^2 = \pi \times 12^2 = 144 \pi$

مساحت کل =  $288 \pi + 192 \pi + 144 \pi = 624 \pi$

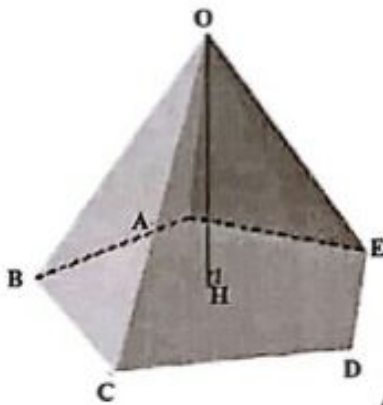
نیاز به رنگ =  $624 \pi \times 100 = 62400 \pi$  گرم

سؤال ۲ قسمت ب

۱۳۴



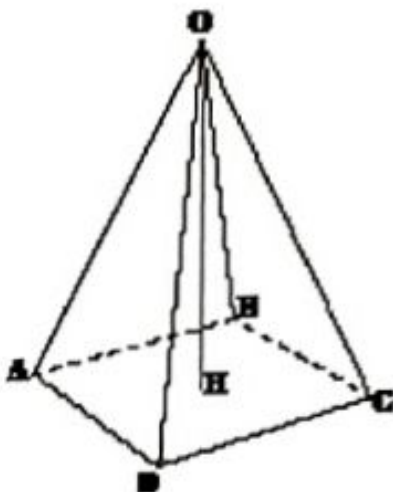
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چادر، عرشه، پالت سیر  
پاستوریزه سوسیس، کوه‌ها، درختان  
کاج -



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: ...، تعداد وجه‌ها: ...، شکل وجه‌ها: ...، شکل قاعده: ...، نام قاعده: ABCDE.

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده ABCDE عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت OABCDE خوانده می‌شود.

## فعالیت

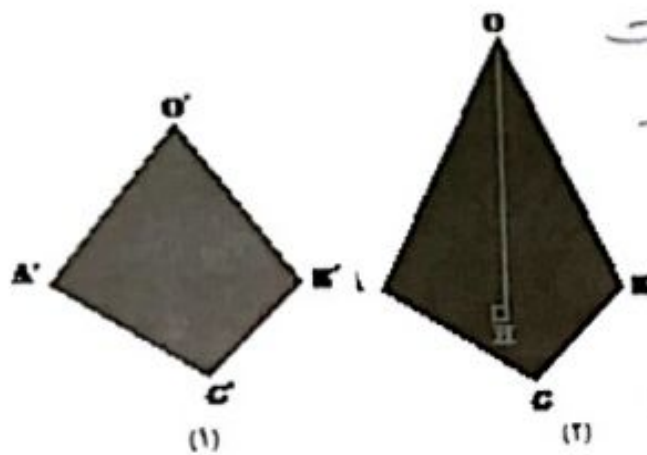


۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: O، ارتفاع: OH، شکل قاعده: چهارضلعی منتظم، وجه‌های جانبی: ...، تعداد وجه‌ها: ....

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



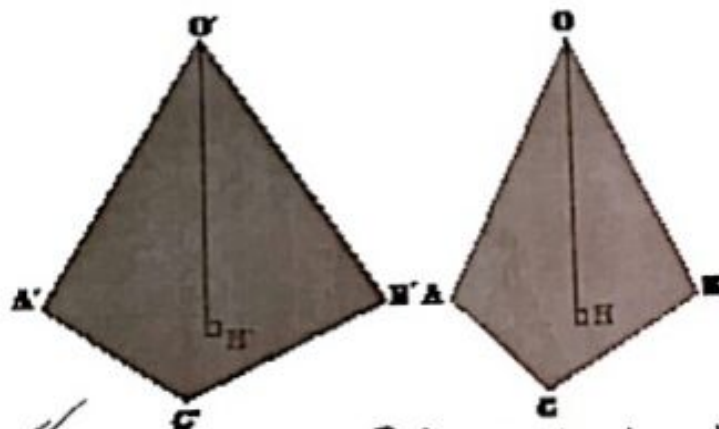


نمک‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قائمه هم نه

شکلند

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است

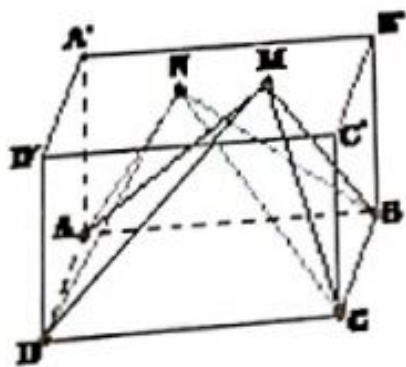


$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقداری وابسته است؟ به مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارد.  
ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقداری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم.  
د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟ حجم‌ها برابر می‌شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

### کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می‌باشند.

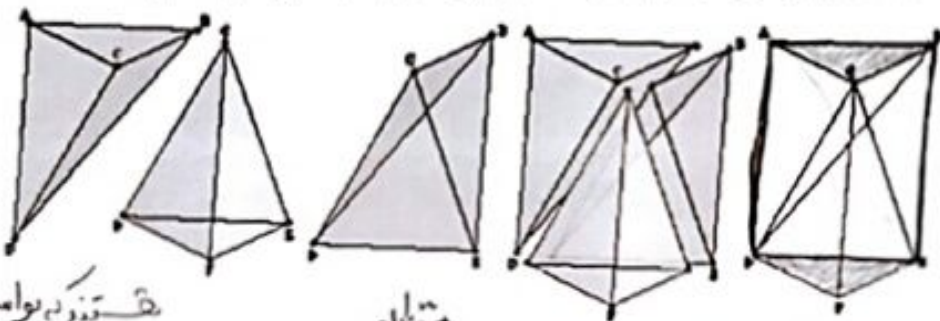
بسیار هرم که با تغییر نقطه‌های M و N می‌توان حجم‌های متفاوت داشت.



## تثابته

### محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو قاعده  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  را ملاحظه می‌کنید. نقطه  $C$  را به نقطه‌های  $E$  و  $D$  و نقطه  $B$  را به نقطه  $D$  وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارند و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



نقطه  $D$  را به واسطه قطر مستطیل ایجاد می‌کنیم.

۱- چهار ضلعی  $ABED$ ، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث‌های  $ABD$  و  $BDE$  هم مساحت دارند؟ چگونه دو مثلث هم‌بهره هستند؟

۲- چرا هر دو هرم  $CBED$  و  $CBAD$  دارای حجم‌های برابر است؟ چگونه می‌توانید دو مثلث‌های  $ABD$  و  $BDE$  را با هم مقایسه کنید؟

۳- چرا مثلث‌های  $DEF$  و  $ABC$  هم مساحت دارند؟ چون دو قاعده منشورند، به هم برابرند.

۴- چرا هر دو هرم  $CDEF$  و  $DABC$  دارای حجم‌های برابر است؟ چون قاعده‌ها هم‌بهره هستند و ارتفاع‌ها هم برابرند.

۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ پس هر دو هرم  $CBED$ ،  $CBAD$  و  $CDEF$  دارای حجم‌های برابرند.

حجم هر هرم با مساحت قاعده  $S$  و ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

## کار در کلاس



در شکل مقابل هرم  $OABC$  دارای قاعده  $\triangle ABC$  است که در

آن  $AC = 6\text{ cm}$  و  $BC = 10\text{ cm}$  و زاویه  $\angle ACB = 90^\circ$  و ارتفاع  $OH$

هرم مساوی  $5\text{ cm}$  است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 20 \times 9 = 60 \text{ cm}^3$$

## فعالیت

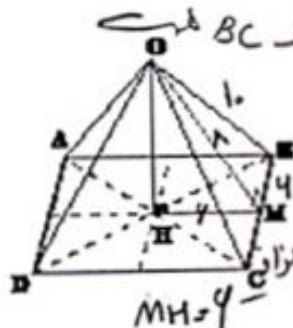
در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.

۱- باره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم الزامی

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس  $OM^2 = OB^2 - MB^2$   
 $OM^2 = 10^2 - 4^2 = 96$   
 $OM = 8 \text{ cm}$  در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 - MH^2 \\ OH^2 &= 96 - 4^2 = 80 \\ OH &= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$



MH = 4

۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم الزامی

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را

به دست آورید.  $OH = 4\sqrt{5}$

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.



هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چند ضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... . چال تعداد ضلع‌های این چند ضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط



مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S_b = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

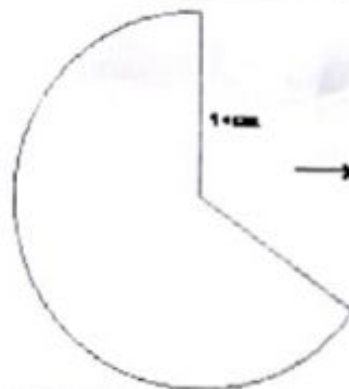


### کار در کلاس

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = \sqrt{84}$$



علی با قسمتی از دایره به شعاع ۱۰ cm مخروطی به قطر قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید.

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times \sqrt{84} = 94 \pi \text{ cm}^3$$

### تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۵ و ۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های ۸ cm باشد. در پاسخ

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 48 \pi$$

طرف مخروطی



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می کنیم: آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = S_b h = \pi R^2 h$$

$$48 \pi = 36 \pi h$$

$$h = \frac{48}{36} = 1.33 \text{ cm}$$

$$x^2 = 4$$

$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$OM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

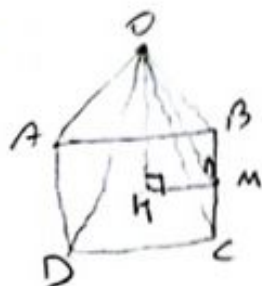
$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$OH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_b h =$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{12} \text{ cm}^3$$

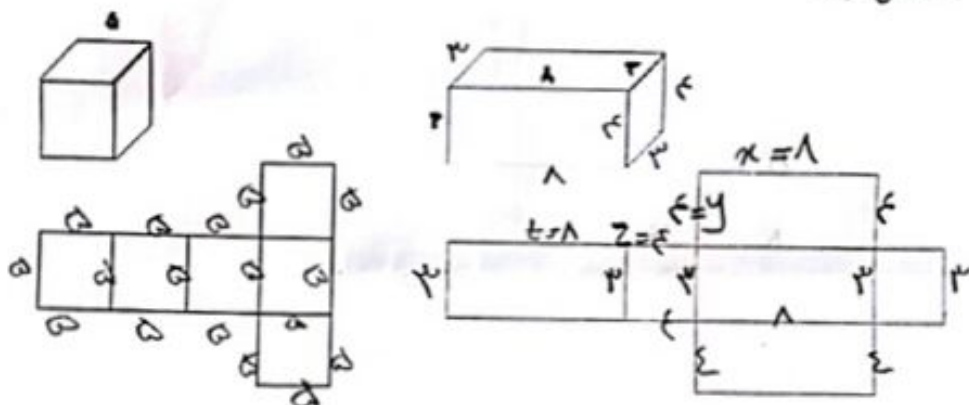




### مثالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام

مشخص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

$$S = 4 \times 4 = 16$$

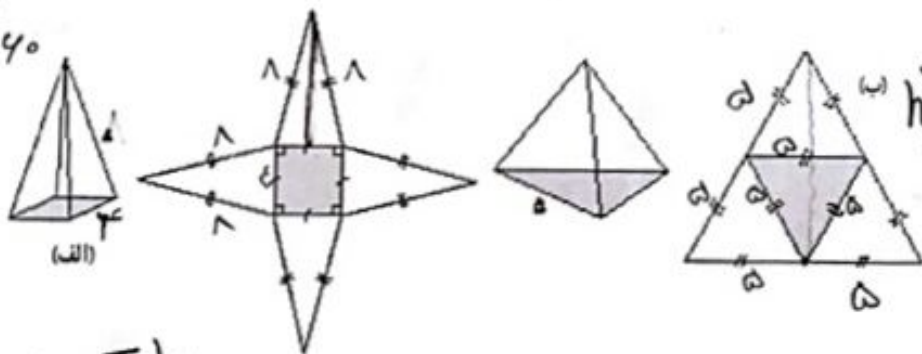
$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$S = 4 \times 2\sqrt{15} \times 4$$

$$= 14\sqrt{15}$$

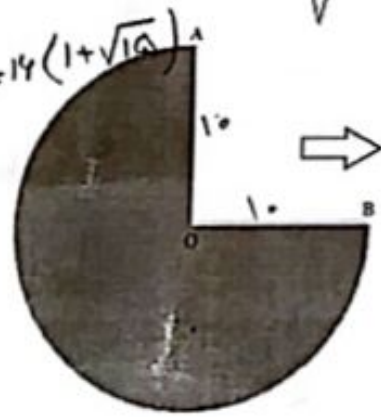
$$S_{\text{کل}} = 16 + 14\sqrt{15} = 14(1 + \sqrt{15})$$



$$h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$$

$$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$$



۲- دایره‌ای به شعاع  $\frac{3}{4}$  ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید. با هم برابرند.

$$P = 2R\pi = 2\pi \times 10 = 20\pi$$

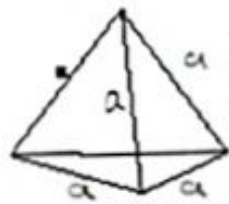
$$P_{\text{مخروط}} = 5\pi$$

$$5\pi = 2\pi R$$

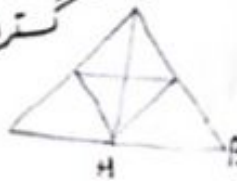
$$R = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$20\pi \div 4 = 5\pi$$

$$\text{طول کمان AB} = 5\pi$$



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال های آن  $a$  است.  
 $OH = OB' - BH$

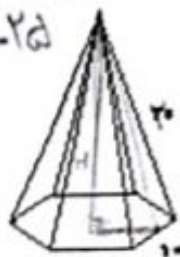


$$OH^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$OH = a\sqrt{3}, S = \frac{a\sqrt{3} \times 2a}{2} = a^2\sqrt{3}$$

$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$$

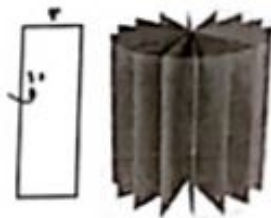
$$h = \sqrt{375}$$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده نش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

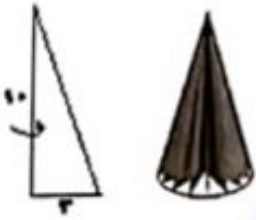
$$= \frac{4 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 20\sqrt{375} \approx 580,9$$

### فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه

شعاع قاعده شکل حاصل:  $\dots\dots\dots$  ارتفاع شکل حاصل:  $\dots\dots\dots$

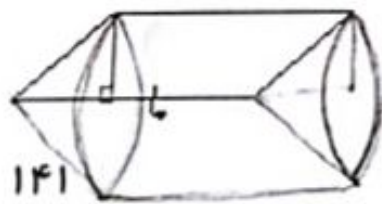


۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط

شعاع قاعده شکل حاصل:  $\dots\dots\dots$  ارتفاع شکل حاصل:  $\dots\dots\dots$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \times 10 = 30\pi \dots\dots\dots$$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.

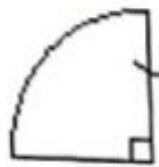


کره حاصل می شود



شکل لولای درخت می شود

استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروطی اضافه شده



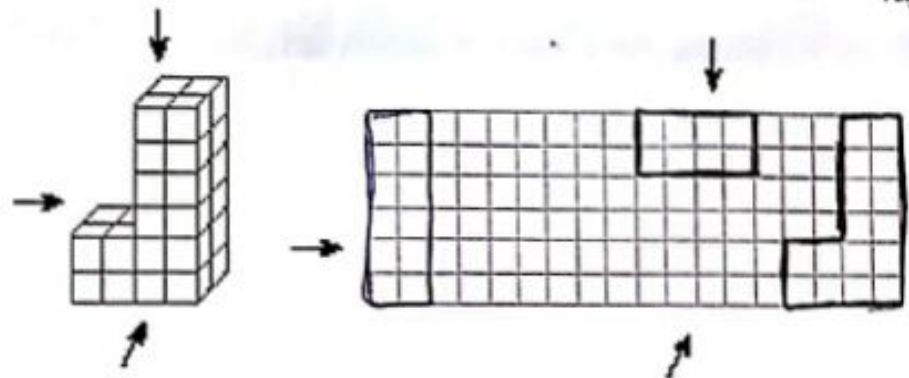
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید  
 شماره حاصل می شود  

$$\frac{1}{4} \pi R^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \pi \times 5^2$$

$$= \frac{25 \cdot \pi}{8}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی  
 الف شش ضلعی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ دایره - اگر دو نیم کره مساوی تقسیم شود



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟  
 از نیم کره با ۵ براد ۱/۵ آن برداشته شده  
 ۱۴۲ ۵ ۱/۴ = ۱/۸ از کره می باشد



## کاردر کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $a$  را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی مستطیل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x = a' + a' = 2a'$$

$$x = a\sqrt{2} \text{ طول مستطیل}$$

$$a = \text{عرض مستطیل}$$

## تمرین

شکل سوم استوانه

مکعب به ضلع  $a$   $S = 2\pi a \times a = 2\pi a^2$  جانبی

$$S_{\text{کل}} = 2\pi a^2$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

کره به شعاع  $a$



$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده  $a$



$$V = \pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع و قطر قاعده  $a$



$$V = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$S_{\text{جانبی}} = \pi a \times a = \pi a^2$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi a^2$$

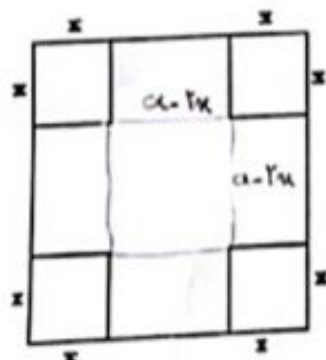
$$\textcircled{1} \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

$$\textcircled{2} \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

$$\textcircled{3} \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\textcircled{4} \frac{\frac{1}{2}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح  $(\frac{V}{S})$  را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۱۴۳

۲- از یک مقوا به ضلع  $a$  گوشه های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقی مانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین  $a$  و  $x$  باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع  $x$  داخل این جعبه جای داد.

$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x = 6x$$

پس  $a$  باید ۶ برابر  $x$  باشد.

