



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

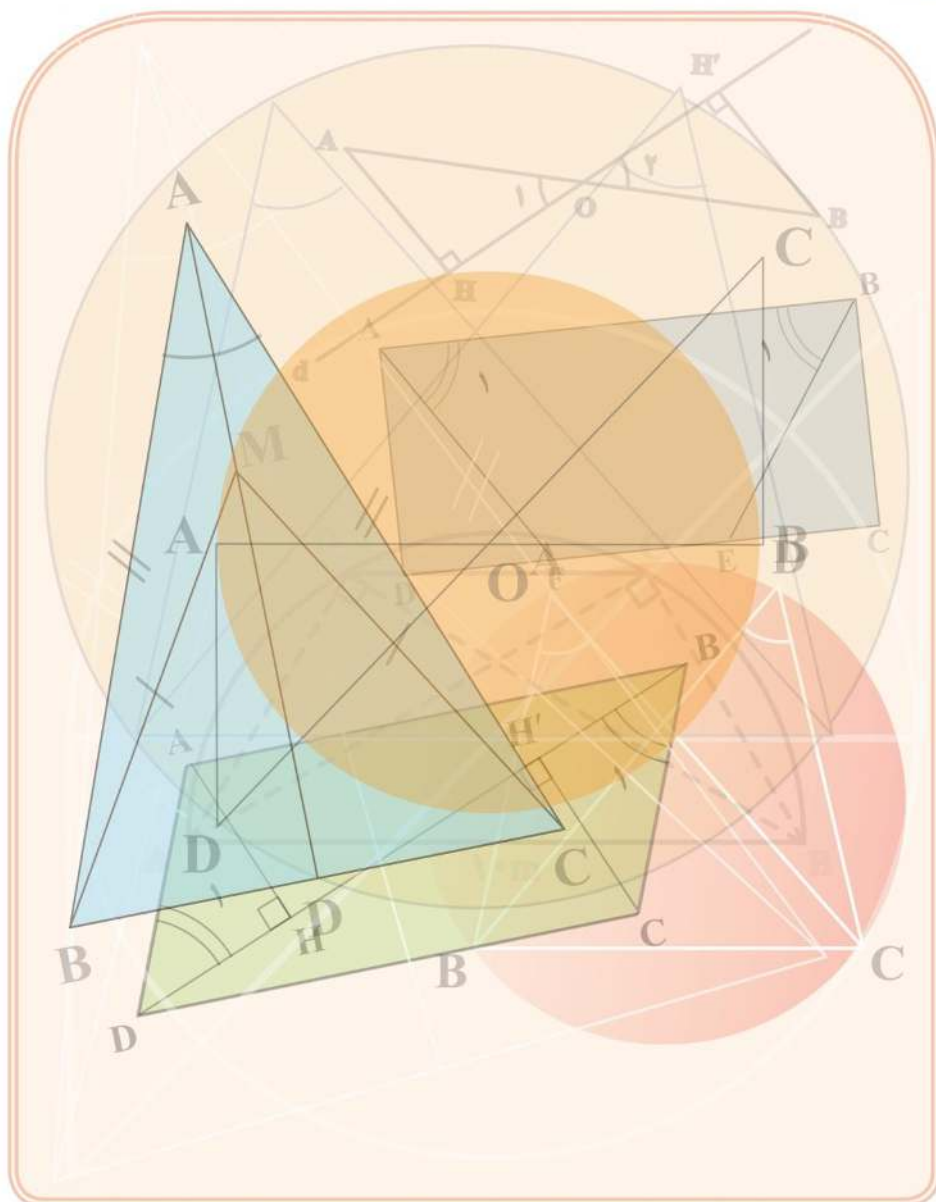
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

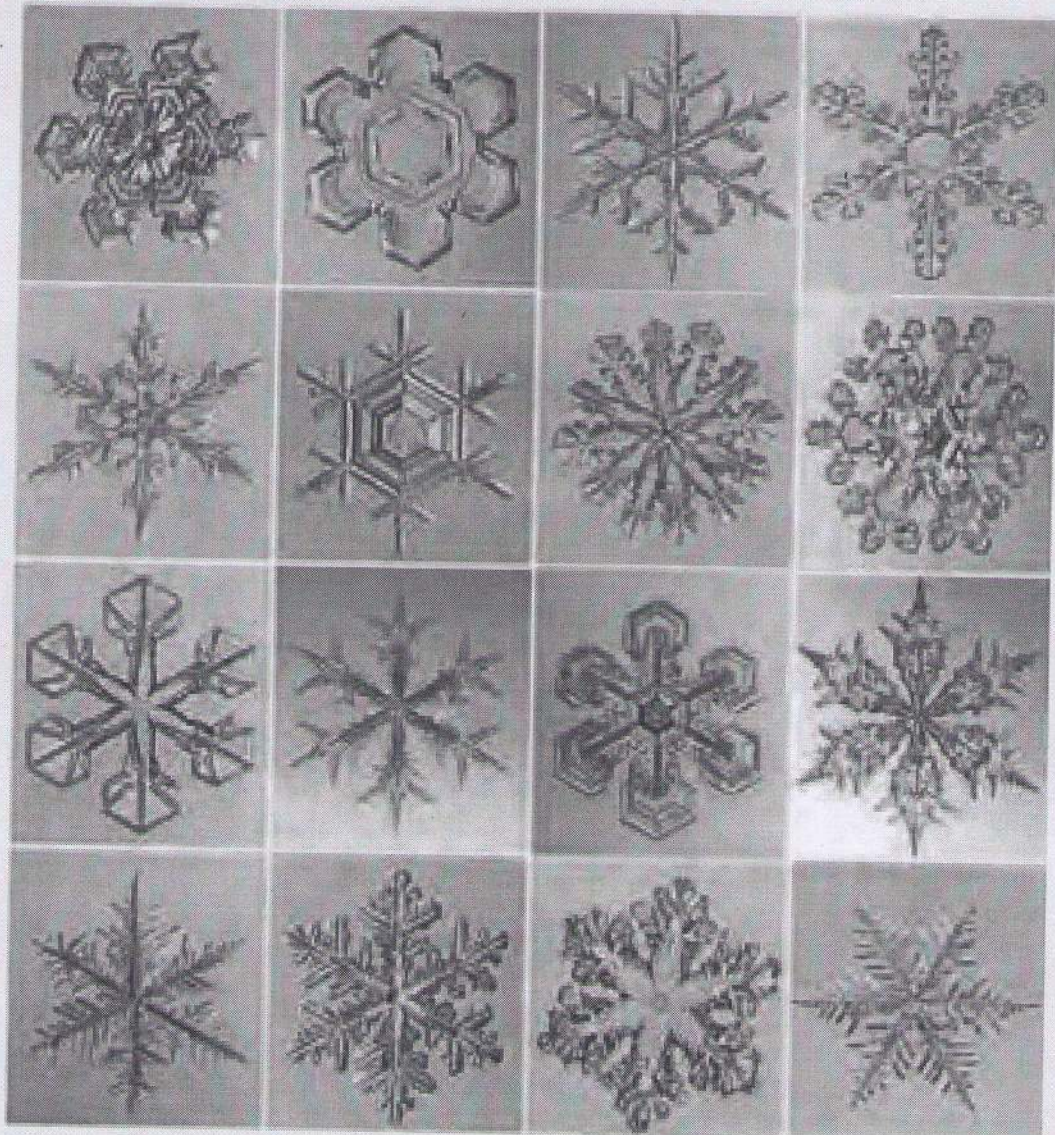
www.tafrihicenter.ir



استدلال و اثبات در هندسه



أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَجَادِلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ ...
 بِحُكْمٍ وَانْدِرْزْ نِيكُو بِي رَاهِ پَروردگارت دَعْوَتِ نَمَا وَ بَا آنِهَا بِي نِيكوترين روشِ اسْتَدْلَالِ وَ
 مَنَازِرِهْ كُن! (سُورَةُ نَحْلِ، آيَةُ ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی رغم آنکه میلیاردها دانه اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

متن های زیر را بخوانید و به سؤال ها پاسخ دهید :

۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ **خیر، زیرا رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باشد**
۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است.

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی، برای معلوم کردن

موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

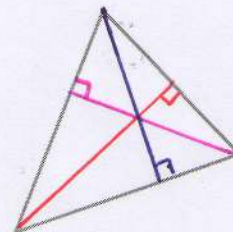
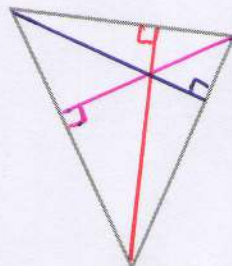
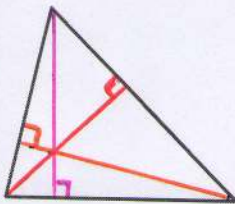
همان گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می کنیم. راه های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گوئیم.

کار در کلاس

۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه ای

می گیرد که درست نیست. **هر وقت تکالیف ریاضی نویسم، معلم تکالیف را می بیند**

۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث های زیر، رسم کنید :



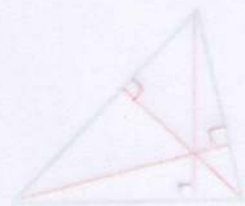
فعالیت ۱- رفتن محسن به ورزشگاه یعنی تواند علت یافت نیم مورد علاقه ای او باشد و بدین تیم به عوامل متعددی بستگی دارد که مهم ترین آن ها روحیه و آمادگی بازیکنان تیم و ضعف تیم مقابل می تواند باشد

۲- با توجه به صفات یکسان بیکسکویتی ها، مقدار بیکسکویتی فردی بیش تر است که مساحت بیش تری داشته باشد
 $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$ باقر
 $8 \times 4 = 32 \text{ cm}^2$ عباس
 $36 > 32 \Rightarrow$
 بنابراین مقدار بیکسکویتی باقر بیش تر است

۳ در فعالیت اول محسن بر اساس نتایج قبل، نتیجه گیری کرد وی مادر فعالیت دوم بر اساس یافته هایی که درسی آن ها از قبل اثبات شده است نتیجه گیری کردیم

کار در کلاس ۱- **الف) هر وقت** درسم راضی خوانم معلم از من امتحان می گیرد
ب) هر وقت دیر به مدرسه می روم مدیر من راضی بیند
ج) وقتی چتر ندارم، باران می بارد
د) اگر ما شینم را تمیز کنیم حتما فردا باران می بارد
و) ماکه شانس نداریم تا سرمان را بلند می کنیم آما متوجه می شود (یعنی تو نمی تقلب کنیم)

۲- **نتیجه نادرست**: چون ارتفاع ها در این سه مثلث همدیگر را درون مثلث قطع کردند لذا نتیجه می گیریم در هر مثلث سه ارتفاع همدیگر را درون مثلث قطع می کنند

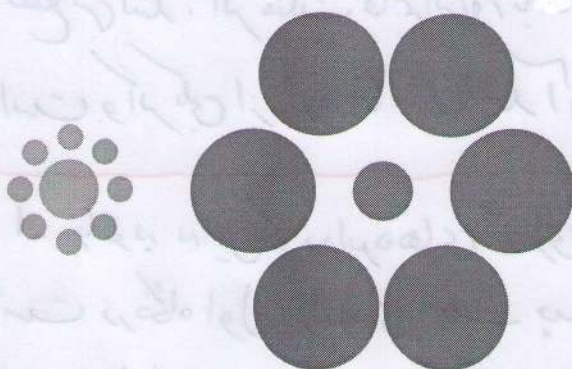


آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ **خیر**

یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند. **پیچ ۳۴/۱**

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ **قسمت اول (فعالیت ۱)**

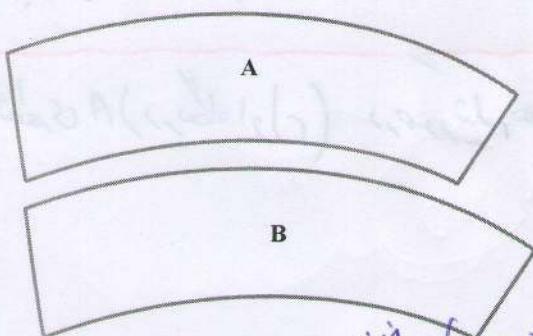
فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ **'ظاهرًا مساوی می‌باشند'**

الف) با مشاهده تشخیص دهید. **سمت چپ**

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. **با هم برابرند**

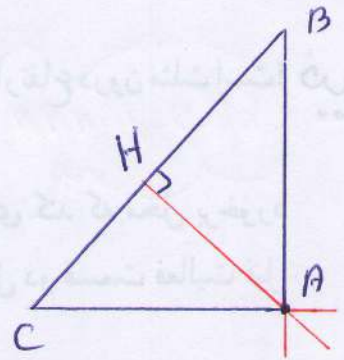
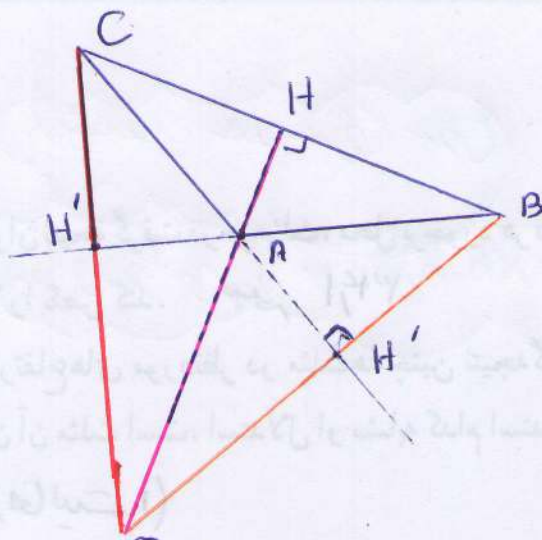


۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی مورد علاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) **A**

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ **خیر، هم اندازه می‌باشند**

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ **خیر، چون مشاهده به تنهایی به نتایج درست نمی‌شود**

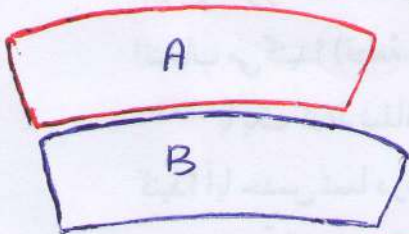
هرچند به طور معمول در ریاضیات و به ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به طور کامل اطمینان کنیم.



نتیجه: اگر هر سه زاویه یک مثلث تند (حاد) باشد آنگاه ارتفاع‌ها داخل مثلث بیرون افتاده قطع می‌کنند. اگر مثلث قائم الزام باشد محل برخورد ارتفاع‌ها رأس زاویه قائم‌الزاویه مثلث است و اگر یکی از زاویه‌ها باز باشد آن‌گاه محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث است

فعالیت ۱- با توجه به این که دایره‌های کناری درست چپ کوچک‌تر از دایره‌های کناری درست راست است در نگاه اول دایره‌ی سمت چپ بزرگ به نظر می‌آید در صورتی که هر دو دایره با هم برابر می‌باشند (منظور دایره‌ی مرکزی است)

۲ قطعه‌ی A (در نگاه اول) در صورتی که هر دو قطعه با هم برابر می‌باشند



۱- سراب یک پدیده فیزیکی است که در اثر خطای چشم و انعکاس نور از یک هوای گرم در حال حرکت به سمت بالا در مجاورت شن یا زمین سنگی ایجاد می شود

۲- وقتی از بیرون به آب نگاه می کنیم عمق آن را کم تر از عمق واقعی آن می بینیم

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می کند. در مورد نتایجی که از این مثال ها می گیرید با یکدیگر بحث کنید. صفحه ۳۵/۱

تمرین

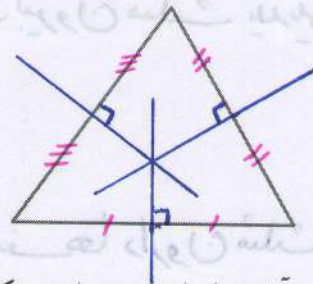
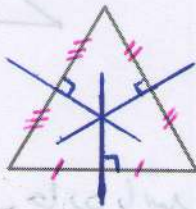
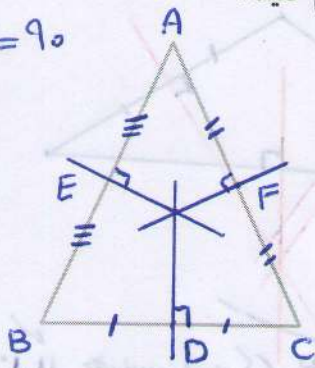
۱- در شکل های زیر عمود منصف های سه ضلع مثلث ها را رسم کنید :

$$\hat{E} = \hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$$

$$AE = BE$$

$$AF = CF$$

$$BD = CD$$



آیا فقط با توجه به این شکل ها، می توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف های هر مثلث

همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ **خبر صفحه ۳۵/۱**

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام. او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال ها بحث کنید. **استدلال نیما صفحه ۳۵/۱**

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال های زیر است؟ **استدلال "ج"**

(الف) چون برخی مثلث ها قائم الزاویه هستند پس مثلث های متساوی الاضلاع هم قائم الزاویه اند.

(ب) همه فیلم های جنگی که تاکنون دیده ام، جذاب بوده اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

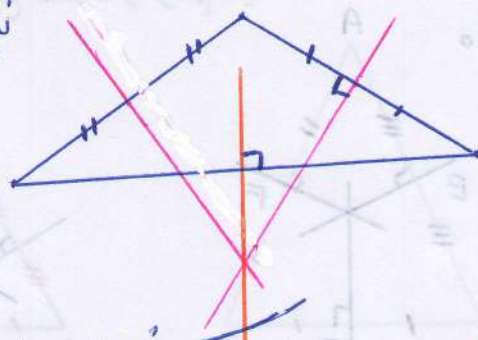
کاردرکلاس ۱- وقتی به ریل قطار نگاه می‌کنیم، احساس می‌کنیم ریل‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر همداد خود را داخل آب یک لیوان فرو ببرید، آن را کوتاه‌تر می‌بینید

۳- سه ظرف محوی آب سرد، آب گرم و آب ولرم داریم. اگر هم زمان دست راست خود را در آب سرد و دست چپ خود را در آب گرم فرو بردن پس از مدتی هم زمان هر دو دست را درون آب ولرم فرو ببریم، دست راست آب ولرم را گرم، دست چپ آب ولرم را سرد احساس می‌کند

۴- چای داغ چندان تلخ احساس نمی‌شود ولی اگر همان چای سرد شود تلخ‌تر احساس می‌شود

نتیجه: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم عمود منصف‌ها ممکن است بیرون مثلث یکدیگر را قطع کنند



نکته مهم ۱- اگر هر سه زاویه یک مثلث خارج باشد عمود منصف‌ها بیرون مثلث هم‌دیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر یکی از زاویه‌های مثلث 90° درجه باشد (مثلث قائم الزامی) آن گاه عمود منصف‌ها یکی و در مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۳- اگر یکی از زاویه‌های مثلث بیش‌تر از 90° درجه باشد آن گاه عمود منصف‌ها بیرون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۲ استدلال هیچ‌کدام کاملاً دقیق نیست، ولی استدلال پنجم منطقی‌تر است زیرا وقتی یک نفر با قدریات بهتر، نتوانسته است وزنی ۹۰ کیلوگرمی را بلند کند، پس با احتمال زیادی وزنی ۱۰۰ کیلوگرمی را هم نمی‌تواند بالا ببرد، استدلال پیرامان، دلیل منطقی ندارد

۳- مشابه استدلال «ج» است. زیرا هر دو بر اساس یافته‌های قبلی، آئینده را پیش‌بینی می‌کنند تصادف نکردن یک فرد نمی‌تواند دلیلی محکم برای اتفاقات در سفر آئینده باشد. همچنین دختر بودن می‌چیزهای قبلی نمی‌تواند دلیل محکم و قوی برای دختر یا پسر بودن فرزند خاله‌ی کوچک باشد

پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه‌ی خاله‌ی کوچکم هم دختر خواهد بود.

(د) چون همه‌ی قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث

خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دو نفر درباره‌ی چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین

بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر

است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند

بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن

بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۴ استدلال نقراول غیر منطقی است اگر در چند خانواده چنین حالتی باشد دلیل

بر تعمیم آن نیست زیرا ممکن است خانواده‌هایی باشند که پسر بزرگ‌تر را حسن و کوچک‌تر را علی نام گذاری کرده باشند

اما استدلال نفر دوم کاملاً درست است

$$\left. \begin{array}{l} \text{حسن} > \text{حسین} > \text{علی} \\ \text{حسن} > \text{حسن} > \text{حسین} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حسن} > \text{حسن} > \text{علی}$$

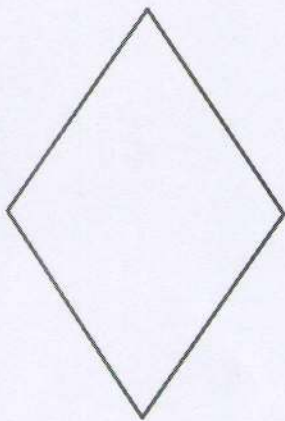
چون حسن علی از حسین بیش‌تر و حسن حسین هم از حسن حسن بیش‌تر است

لذا نتیجی که می‌گیریم حسن علی بیش‌تر از حسن حسن است

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟
سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

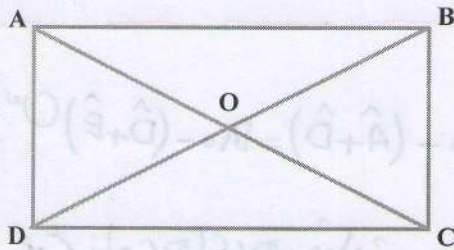
فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است.

استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. } در لوزی زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است. $\Rightarrow$
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو ^{با هم} برابر است.

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :



فرض: ABCD مستطیل است.

حکم: قطرهای مستطیل، مساوی است.

فرض:
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC, & AD = BC \\ AB \parallel DC, & AD \parallel BC \end{cases}$$

حکم: $AC = BD$

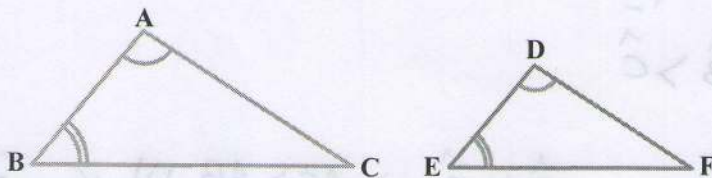
صفحه ۳۸۱

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:

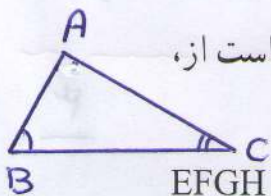
۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم

از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض:
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D} \\ \hat{B} &= \hat{E} \end{aligned}$$

حکم: $\hat{C} = \hat{F}$

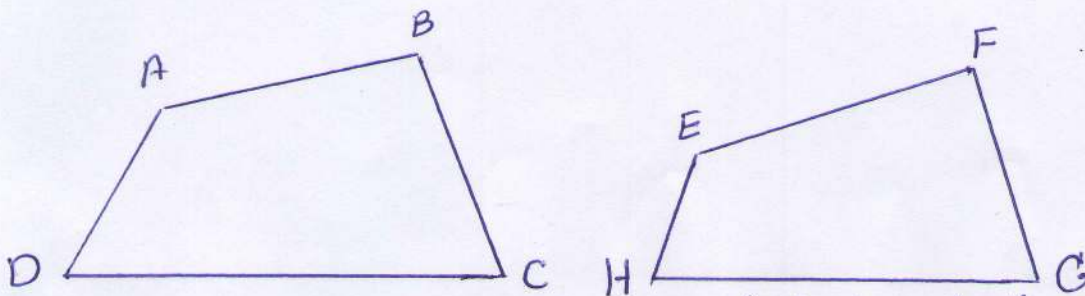


۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از،

ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. حکم: $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow c > AB$ فرض

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH

برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است.



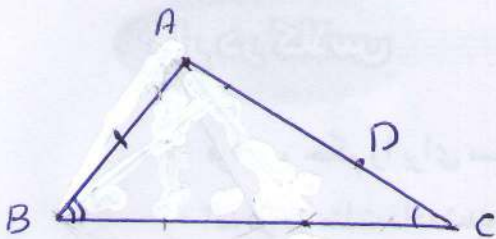
فرض: $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H} \Rightarrow$ حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{G}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ \text{فرض } AD = BC \\ DC = DC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(من و فرض)}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD \quad \text{فعالیت}$$

$$\begin{array}{l} \text{فرض } \hat{A} = \hat{D} \\ \text{فرض } \hat{B} = \hat{E} \end{array} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E} \Rightarrow 180^\circ - (\hat{A} + \hat{D}) = 180^\circ - (\hat{D} + \hat{E})$$

مردانیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است

$$\Rightarrow \underbrace{180^\circ - (\hat{A} + \hat{D})}_{\hat{C}} = \underbrace{180^\circ - (\hat{D} + \hat{E})}_{\hat{F}} \Rightarrow \hat{C} = \hat{F}$$



$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \quad \text{فرض} \quad \text{هم}$$

روی ضلع بزرگ‌تر یعنی AC به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم

$$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C} \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C} \quad \left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

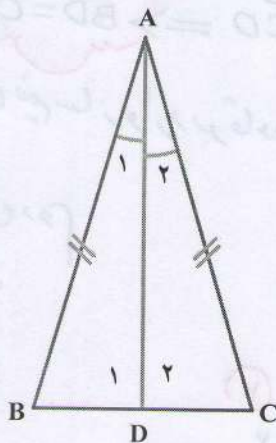
عکس قضیه‌ی بالا $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$

برهان خلف اگر $AB = AC$ باشد آن گاه داریم $\hat{B} = \hat{C}$

اگر $AB > AC$ آن گاه طبق قضیه‌ی بالا داریم $\hat{C} > \hat{B}$ ، بنابراین داریم $AC > AB$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } \hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H} \\ \text{مردانیم } \hat{B} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{C} = 360^\circ \\ \hat{F} + \hat{H} + \hat{E} + \hat{A} = 360^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{A}$$

فعالیت



۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید :

مثلث ABC متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است.

ثابت کنید AD میانه نیز هست :

فرض : $AB = AC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم : $BD = CD$

استدلال : چون AD نیمساز زاویه A است، پس : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و

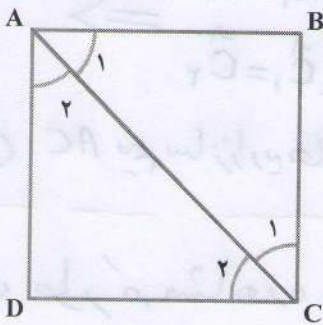
$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث های ADB و ADC به حالت دو زاویه

و ضلع بین (ز ض ز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه : $BD = DC$ صفحه ۳۹/۱

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده،

میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن

است؟ به عبارتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. **خیر، خیر**



۲- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که

قطر AC از مربع $ABCD$ نیمساز زاویه های A و C است. چون

دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای

متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC

نیمساز است. صفحه ۳۹/۱

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر

نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ **بله**

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در

فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام

ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد،

می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

۳۹ با عوض شدن نیم ساز شرایط متفاوت بوجود می آید و نمی توان
میانه بودن را ثابت کردن ولی وقتی قطر عوض می شود شرایط تغییر نمی کند

① فعالیت پاره خفا AD نیم سازهست پس می توانیم نتیجه بگیریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ولی نمی توانیم تساوی بین دوزاوی $\hat{D}_1, \hat{D}_2$ را نتیجه بگیریم پس

(این نتیجه ی نادرست است) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow AD$ نیم سازهست

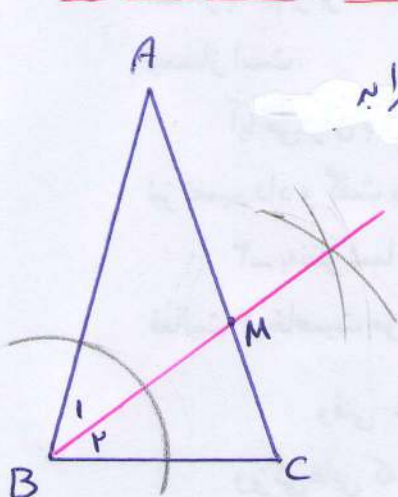
پس نیم سازهست $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$
 پس نیم سازه وارد بر قاعده میانه نیز می باشد
 روش دوم

$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \triangle ABC$ متساوی الساقین
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{C} + \hat{A}_2$
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

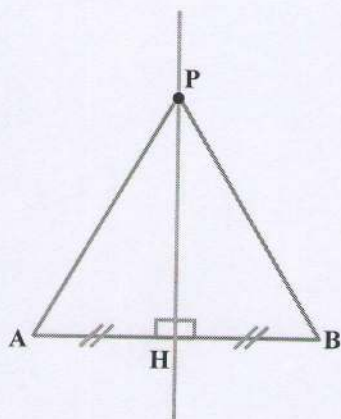
$\Rightarrow 180 - (\hat{B}_1 + \hat{A}_1) = 180 - (\hat{C} + \hat{A}_2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$
 $AD = AD$
 $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$

این خاصیت قابل تعمیم به بقیه زاویه ها نمی باشد

$AB = AD$ خاصیت مربع
 $CB = CD$
 $AC = AC$ ضلع مشترک
 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
 پس AC نیم سازه زاویه های $\hat{A}, \hat{C}$ می باشد



همان طور که مشاهده می کنیم نیم سازه زاویه ی $\hat{B}$ ضلع AC را به دو قسمت مساوی تقسیم نمی کند پس میانه نمی باشد



۴- نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره خط AB

در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ض) هم‌نهشت است، نتیجه می‌شود پاره خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمودمنصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر»

نقطه روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟ چون نقطه P دلخواه می‌باشد یا تغییر مکان نقطه P روی عمودمنصف باز هم شرایط برقرار است، بنابراین برای هر نقطه‌ی روی عمودمنصف قابل تعمیم می‌باشد (نقطه‌ی P عا بنده‌ی عام نقاط روی عمودمنصف است)

کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئله زیر آورده‌اند:

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

استدلال حامد: حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه

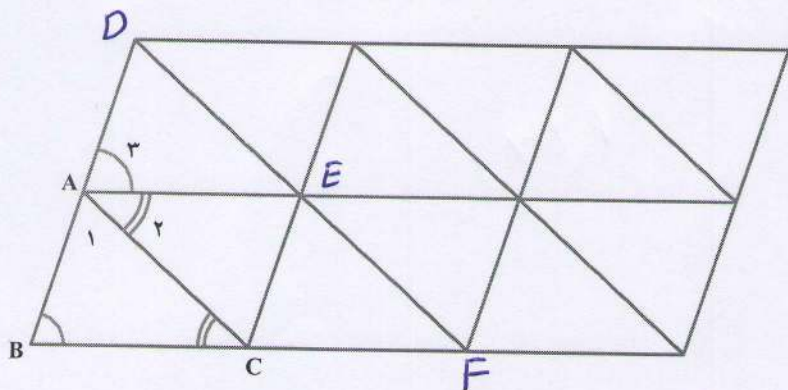
دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. نادرست است، زیرا یک مثلث خاص در نظر گرفته شده است

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را شده است

اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع

زوایای داخلی هر مثلث 180° است. با بررسی مجموع زاویه‌ها در چند مثلث می‌توان آن تعمیم داد، اما نادرست است

استدلال مهدی: مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است را کشید و باشد



با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد:

این استدلال نیز نادرست است

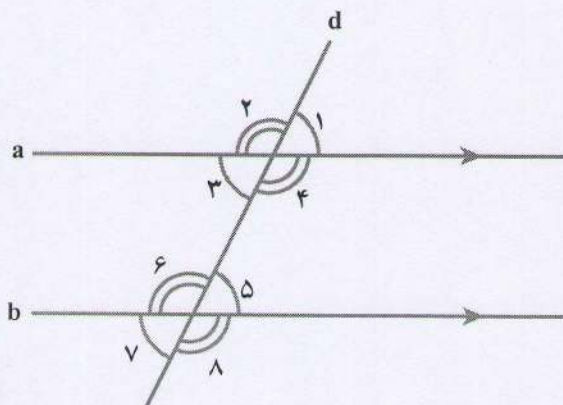
$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

زیرا در مورد این که نقاط A, B, D در یک است

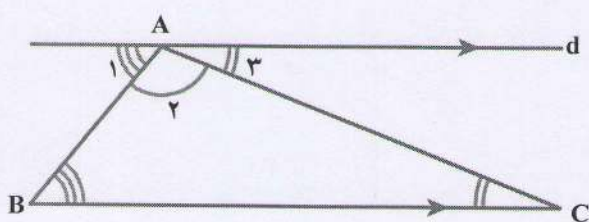
(در راستا) می‌باشند صحبتی نشده است همچنین نقاط (B, C, F)

۴۰

سؤال: آیا پاره خط AB، در یک راستا می‌باشند؟



استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_3$ به ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت

نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا کاملاً درست است

و می‌توانیم آن را برای بقیه مثلث‌ها نیز تعمیم دهیم

فعالیت

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = 5000 \\ \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = \text{پول بهرام} + \text{پول سعید}$$

$$\Rightarrow \text{پول حمید} = \text{پول سعید}$$

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟ هر دو از یک استدلال استفاده می کنند.

مسئله: نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابر است.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

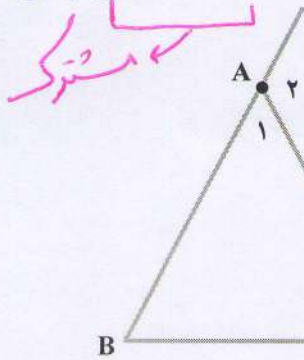
① دو مقدار مساوی با یک مقدار خودشان نیز با هم مساوی می باشند

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = b \end{array} \right\} \Rightarrow a = c$$

تشریح ۲) وقتی در دو عبارت مساوی دو مقدار برابر داریم آن گاه دو مقدار دیگر نیز با هم

مساوی می باشند

$$a + b = c + b \Rightarrow a = c$$



۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل

بیاورید. خیر، معتبر نیست، چون از حالت خاص استفاده شده است

مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع

اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن برابر است.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.

می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای

$\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است، بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

صفحه ۴۲/۱

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چند ضلعی محدب را

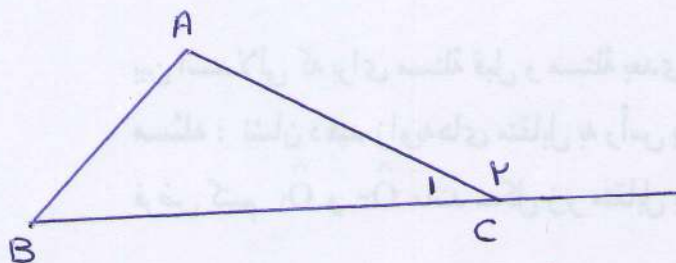
می توان بدین صورت هم آورد: «یک چند ضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون

آن چند ضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که

محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چند ضلعی های

زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

تمرین برای اثبات یک مسئله باید آن را در یک شکل دلخواه انجام دهیم و اثبات در یک شکل خاص مورد قبول نباشد



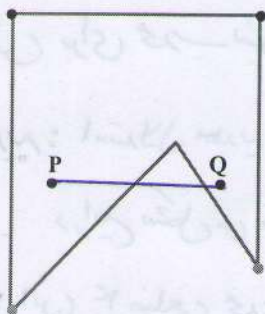
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 &= 180 \\ \hat{C}_2 + \hat{C}_1 &= 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B + \cancel{C_1} = \hat{C}_2 + \cancel{C_1}$$

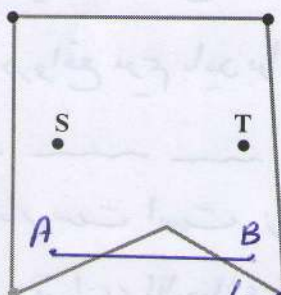
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$$

در اثبات های هندسی نباید از شکل خاص مکمل بگیریم



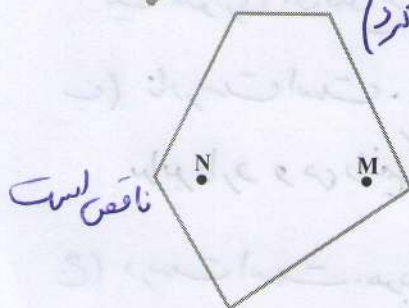


نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. کاملاً درست است و یک مثال ناقص برای محدب بودن این چهار ضلعی است، چون تمام نقاط این پاره خط درون ۴ ضلعی نیست



مهديه : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، زیرا این خاصیت را باید برای

هر دو نقطه ای دلخواه بررسی کرد برای مثال تمام نقاط پاره خط AB درون ۴ ضلعی نمی باشند (باید مثال یا چند مثال دیگر نشان بشه گیری کرد)



مریم : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال

۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{مستطیل ABCD است.}$

صفر ۴۳/۱

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{همه ضلع های ABCD، با هم برابر نیستند.}$

صفر ۴۳/۱

ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهار ضلعی ABCD ضلع ها برابر نیستند.} \end{array} \right. \Rightarrow \text{ABCD مربع نیست.}$

صفر ۴۳/۱

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط

عمود می شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز

مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این

نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

تمرین نرگس: برای اثبات محذب بودن باید وضعیت هر دو نقطه دلخواه را بررسی کنیم ولی یک مثال نقض برای محذب نبودن کافی است و در واقع نرگس پاره خط pq را به عنوان مثال نقض برای محذب نبودن آورده است

مهدیه: استدلال مهدیه نادرست است. زیرا این خاصیت باید برای هر دو نقطه دلخواه بررسی شود در این شکل می توان پاره خطی رسم کرد که نادرستی استدلال را نشان دهد (مثال: AB)

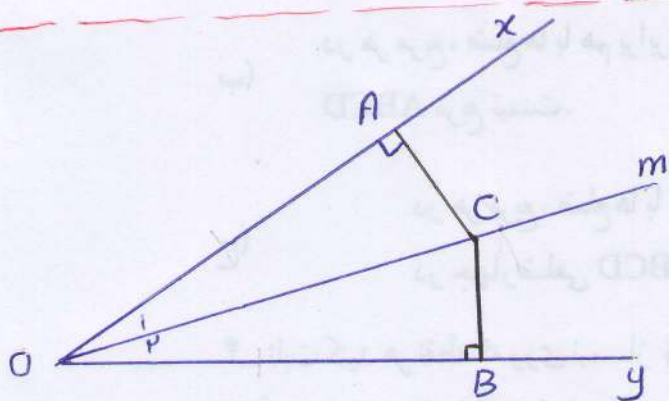
هریم: این ۴ ضلعی محذب است ولی استدلال هریم ناقص است (درست نیست) در واقع هریم باید برای هر دو نقطه دلخواه این خاصیت را بررسی کند

۳ الف نادرست است. زیرا هر متوازی الاضلاع لزوماً یک متبیل نیست در صورتیکه هر متبیل یک متوازی الاضلاع است

ب نادرست است. زیرا این ۴ ضلعی می تواند لوزی باشد. لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد و می دانیم یک لوزی لزوماً یک مربع نیست در صورتیکه تمام مربع ها لوزی می باشند

ج درست است. مربع یک چهار ضلعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه ی مساوی دارد چون چهار ضلع این چهار ضلعی برابر نیست لذا می توان نتیجه گرفت $ABCD$ مربع نمی باشد

۴ زاویه ی دلخواه $\angle xoy$ را در نظر می گیریم و نیم ساز آن را رسم می کنیم. نقطه ی C را به دلخواه روی آن در نظر می گیریم و از نقطه ی C دو عمود بر اضلاع ox و oy رسم می کنیم

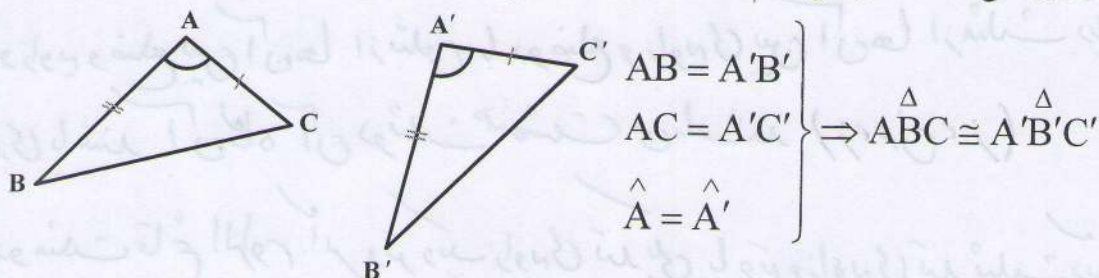


$$\left. \begin{array}{l} \text{تقریب} \\ OA = OB \text{ نیم ساز است} \\ OC = OC \text{ وتر مشترک} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(و.ز)} \triangle OAC \cong \triangle OBC \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} AC = BC$$

چون نقطه ی C دلخواه است. بنا بر این نتیجه می گیریم برای هر نقطه ی دلخواه روی نیم ساز این خاصیت برقرار است پس هر نقطه روی نیم ساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می خواهیم این حالت ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را این گونه نمایش می دهیم:



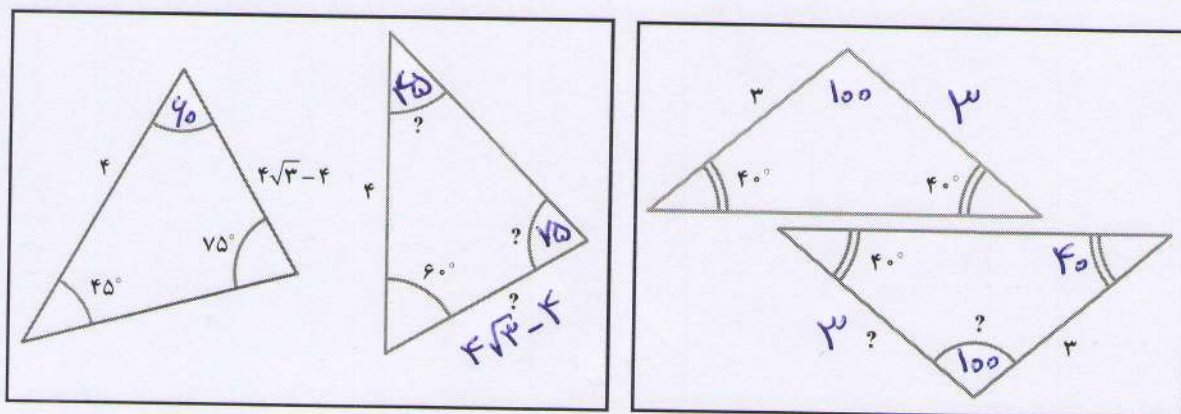
برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث های

قائم الزاویه را به همین صورت بیان کنید. صفحه ۴۴/۱

فعالیت
(ض ض ض)، (ض ض ز)، (ض ز ض)، (ز ض ز)، و (ض ض ض) (ض ض ض) و (ض ض ض) (ض ض ض)

۱- در شکل های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت اند. اندازه پاره خط ها و

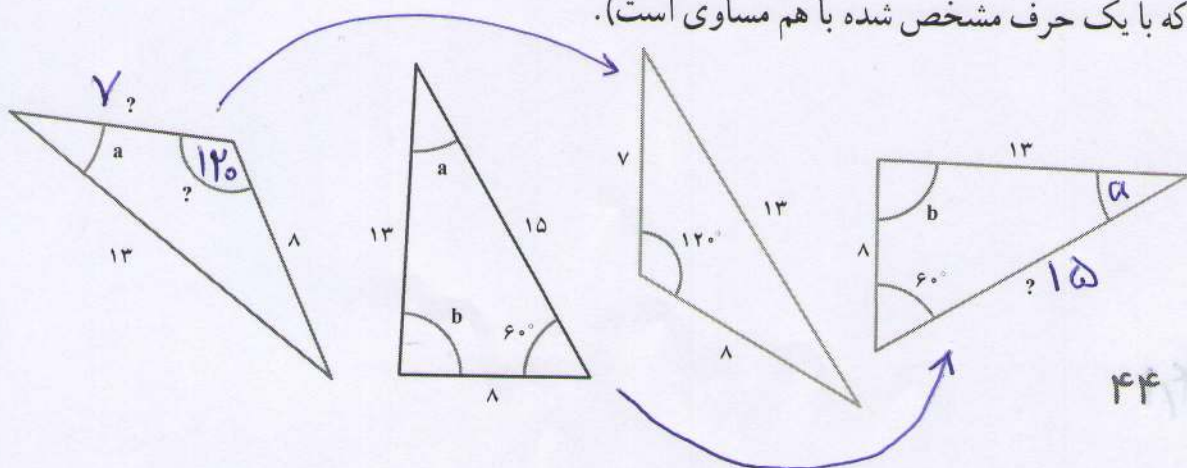
زاویه های مجهول را روی شکل مشخص کنید:



۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت اند. ابتدا مثلث های

همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه هایی

که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



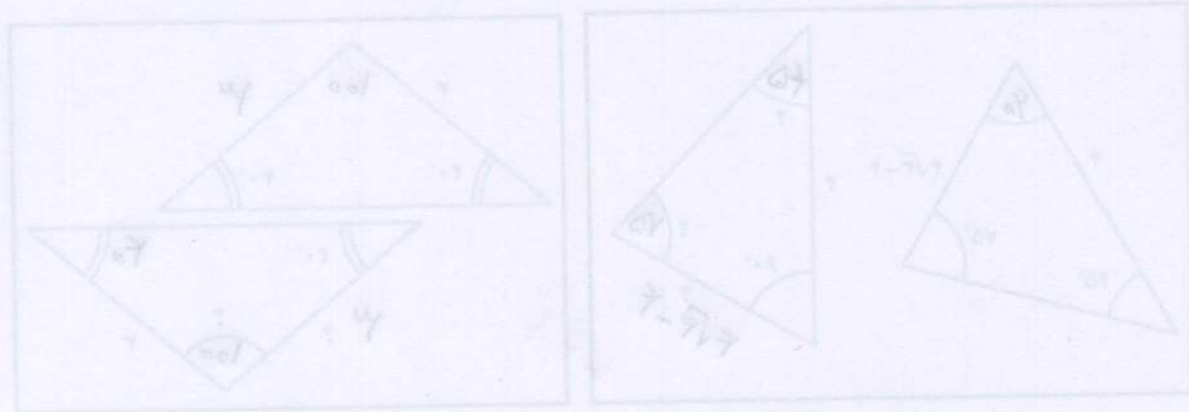
یادآوری ۱- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث باهم همبستگی می باشند (ض ض ض)

۲- اگر دو ضلع و زاویه ی بین آن ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه ی بین آن دو ضلع از مثلث دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث باهم همبستگی می باشند (ض ز ض)

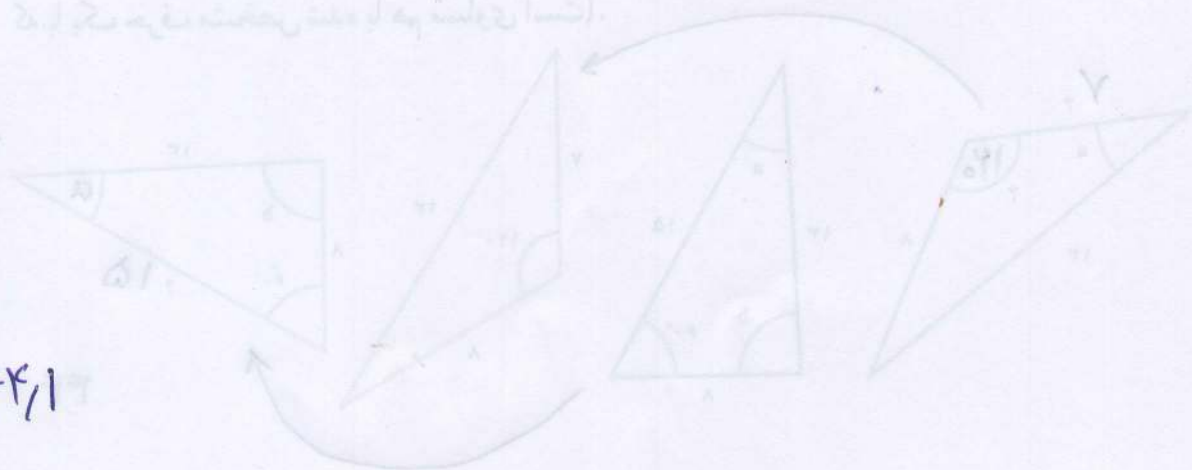
۳- اگر دو زاویه و ضلع بین آن ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه ی بین آن ها از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن گاه آن دو مثلث همبستگی می باشند (ز ض ز)

۴- در دو مثلث قائم الزامی اگر وتر و یک زاویه ی تند یکی با وتر و زاویه ی تند دیگری برابر باشند آن دو مثلث همبستگی می باشند (و ز)

۵- در دو مثلث قائم الزامی اگر وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه با وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه دیگری برابر باشند آن گاه آن دو مثلث همبستگی می باشند (و ض)



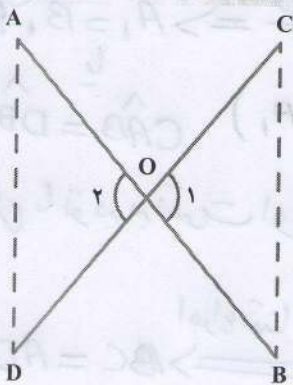
در مثلثات ابتدا با مثلث متساوی الساقین شروع می کنیم و به آن مثلث متساوی الساقین می گویند. در این مثلث دو ضلع برابر است و دو زاویه برابر است. (شکل ۱)



فرض مسئله اطلاعاتی نیست که طرح سؤال به ما می دهد و ما بدون چون و چرا سازی آنچه را می بینیم، در واقع مسئله را برای حالتی حل می کنیم که فرض درست باشد

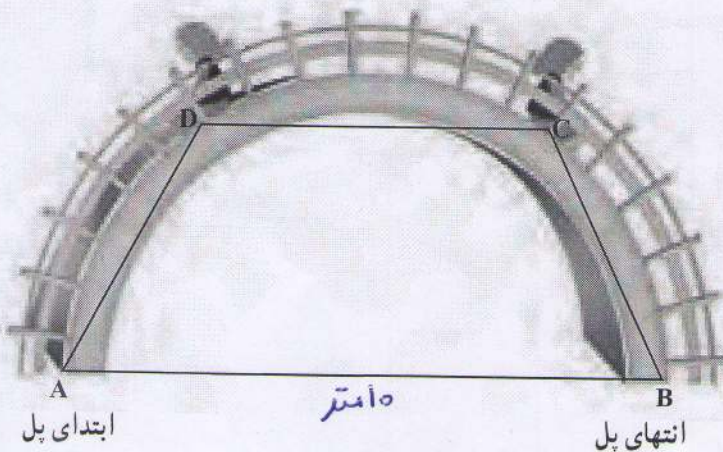


مثال: با رُحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه چوبی آن از وسط هم گذشته است. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که: $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است که: $AD=BC$. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث های OBC و OAD همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید، یعنی:

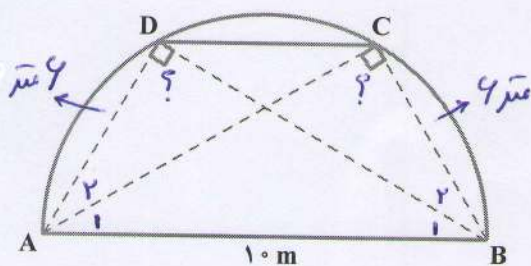


$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } OA = OB \\ \text{فرض } OC = OD \\ \text{مقابل به راس } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC \quad (\text{ض. ز. ض.})$$

فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای



پل ۶ متر فاصله دارد ($BC=6$) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

صفحه ۴۵/۱

فصلیت

$$\textcircled{1} \quad \hat{C} = \hat{D} = \frac{180}{2} = 90^\circ \Rightarrow AB \text{ قطر نیم دایره است}$$

در دایره زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابل به آن می باشد بنابراین داریم

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow AC = 8$$

$$\hat{D} = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow BD = 8 \text{ cm}$$

۲

روش دوم:

در دایره کمان‌های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی اند بنابراین داریم

$$(BC = AD = 6 \text{ cm}) \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \textcircled{2}$$

$$(\hat{A}_1 \text{ و } \hat{B}_1 \text{ دو زاویه محاطی روی به کمان‌های } AD \text{ و } BC \text{ است}) \quad \hat{CAB} = \hat{DBA}$$

از طرفی با توجه به نسبت اول (سؤال ۱) داریم $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ بنابراین داریم

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ \textcircled{2} \quad \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \\ AB = AB = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC = AD$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } CD = BC \Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow DM = BN \\ \text{فرض (خواص لوزی): } \hat{D} = \hat{B} \\ \text{فرض: } AD = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(من فرض)}} \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

سؤال ۲

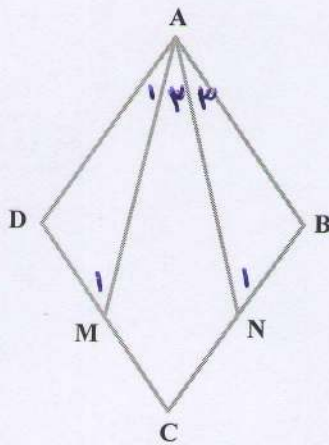
۱- نشان دهید زاویه های $\hat{D}$ و $\hat{C}$ در شکل، قائمه است. طول های AC و BD را به کمک

صفحه ۴۵/۱

قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC = BD$

۲- به کمک همنهشتی مثلث های ACB و ADB، نشان دهید $AC = BD$. صفحه ۴۵/۱

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های

اضلاع CD و CB هستند. می خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$\text{فرض} \begin{cases} AD = AB = CD = BC, & BN = \frac{BC}{2} \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D}, & DM = \frac{CD}{2} \end{cases}$$

حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

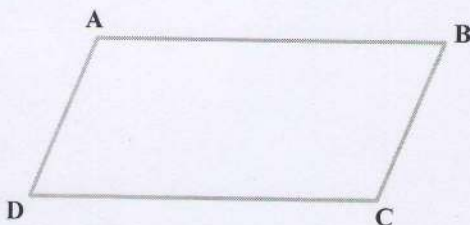
۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN

همنهشت اند. بالای صفحه

۳- حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\triangle ADM \cong \triangle ABN \Rightarrow \begin{cases} AM = AN \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_3, \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{N}_1, \hat{A}_2 = \hat{A}_4 \end{cases}$$

کار در کلاس



می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند

شکل روبه رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابر است.

مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را

بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه،

نظر چند دانش آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤال ها پاسخ دهید.

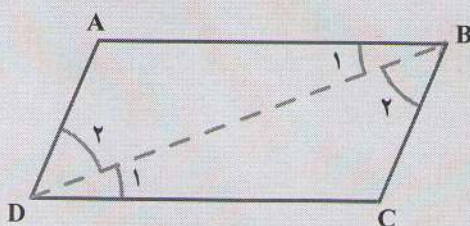
$$\text{فرض} \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$$\text{حکم} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

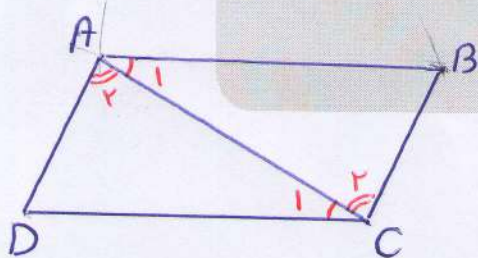
شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

شبنم: در تعریف متوازی الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ خیر، زیرا خطا داریم
- به تعریف متوازی الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ خیر، زیرا اندازه‌گیری همواره با خطا دارد (خطای انسانی، خطای ابزار)



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیاوریم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم، اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ و مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (ز ض ز)} \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \begin{cases} AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{cases}$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{خذف شود دیدیم که } \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ بنابراین داریم:} \\ \text{و } \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \text{ بنابراین داریم:} \end{array}$$

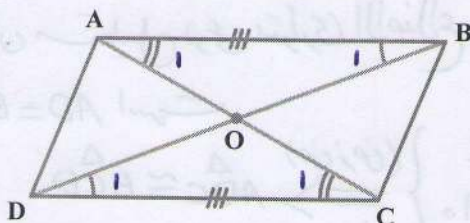
- چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون ما فقط یک ضلع برابر داریم
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم نیاز به ضلع برابر داریم

قطر AC به دست آوریم؟ بله

$$47 \quad \left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{ مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ADC \cong \triangle CBA \xrightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \begin{cases} AD = BC \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases}$$

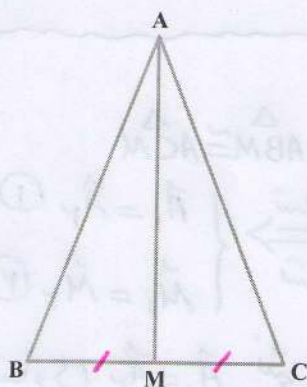
- از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم درباره زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های — روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین

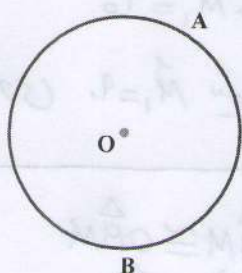


۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$. صفحه ۴۸/۱

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرهای با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!) صفحه ۴۸/۱

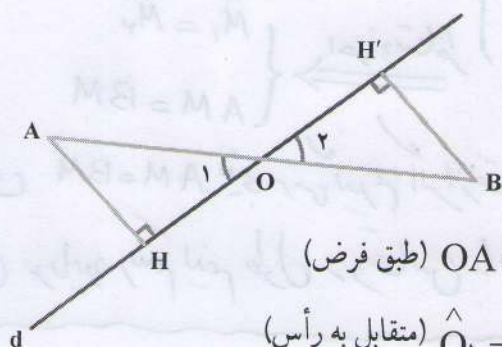


۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟ چرا AM نیمساز زاویه $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟ صفحه ۴۸/۱



۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های M، A و B وصل کنید.)

۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند (AH=BH') ثابت کنید $OH=OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH=OH'$ بحث کنید:



$$OA = OB \quad (\text{طبق فرض})$$

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{مقابل به رأس})$$

$$AH = BH' \quad (\text{فرض})$$

(ض ض ض)

$$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH' \Rightarrow OH = OH'$$

۴۸ اثبات نادرست است؛ زیرا زاویه $\hat{O}_1$ بین OA و AH نیست و زاویه $\hat{O}_2$ هم بین OH' و OB نیست

تمرین ۱

$(AB \parallel CD, \text{مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$
 $(AB \parallel CD, \text{مورب } BD) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$
 $(\text{خواص قبلی متوازی الاضلاع}) AB = DC$

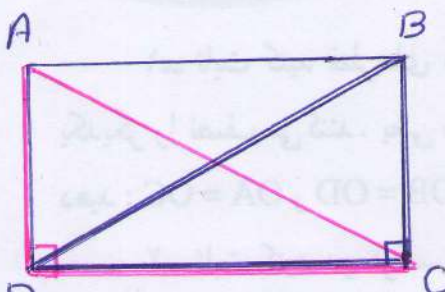
$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض ز)} \\ \text{متساوی اجزای} \\ \text{متناظر} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle ADB \cong \triangle DCA \Rightarrow \\ OA = OC \Rightarrow \text{O وسط AC است} \\ OB = OD \Rightarrow \text{O وسط BD است} \end{array}$

نتیجه: بنابراین قطرهای یکدیگر را نصف می کنند

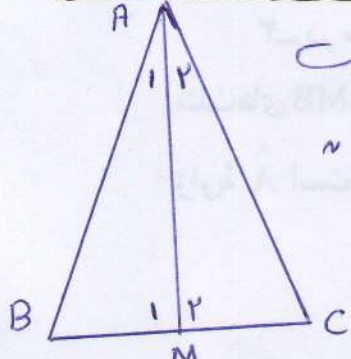
۲ چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع می باشد پس داریم

$AD = BC$ است
 فرض $AD = BC$
 $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
 $DC = DC$ ضلع مشترک

$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض ز)} \\ \text{اجزاء متناظر} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle ADC \cong \triangle BCD \\ AC = BD \end{array}$



۳



$ABC : AB = AC$ متساوی الساقین است
 $\hat{B} = \hat{C}$
 $AM : BM = CM$ میانه است

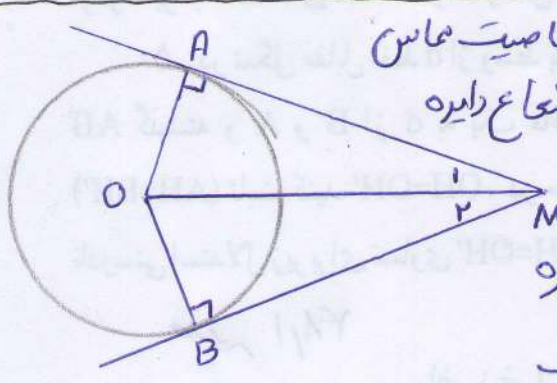
$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض ز)} \\ \text{متساوی اجزای} \\ \text{متناظر} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle ABM \cong \triangle ACM \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (۱)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (۲)} \end{array}$

از تساوی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نتیجه می گیریم که AM نیم ساز زاویه A است

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ \xrightarrow[\hat{M}_1 = \hat{M}_2]{\text{طبق رابطه ۲}} \hat{M}_1 + \hat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{M}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 90^\circ$

از تساوی $\hat{M}_1 = 90^\circ$ نتیجه می گیریم $AM \perp BC$

۴



$A = B = 90^\circ$ خاصیت مماس
 $OA = OB$ شعاع دایره
 $OM = OM$

$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \text{اجزاء متناظر} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle OAM \cong \triangle OBM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM = BM \end{array}$

از تساوی $AM = BM$ نتیجه می گیریم که M از نقطه ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است

۵

۴۸/۱

d از وسط AB گذشت است $\Rightarrow OA = OB$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_1$ متقابل به راس
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} \text{(وز)} \\ \text{اجزاء متناظر} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle AHO \cong \triangle BH'O \Rightarrow \\ OH = OH' \end{array}$

$(OA = OB, AH = BH', H = H' = 90^\circ)$ (فرض) $\Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BH'O \Rightarrow OH = OH'$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

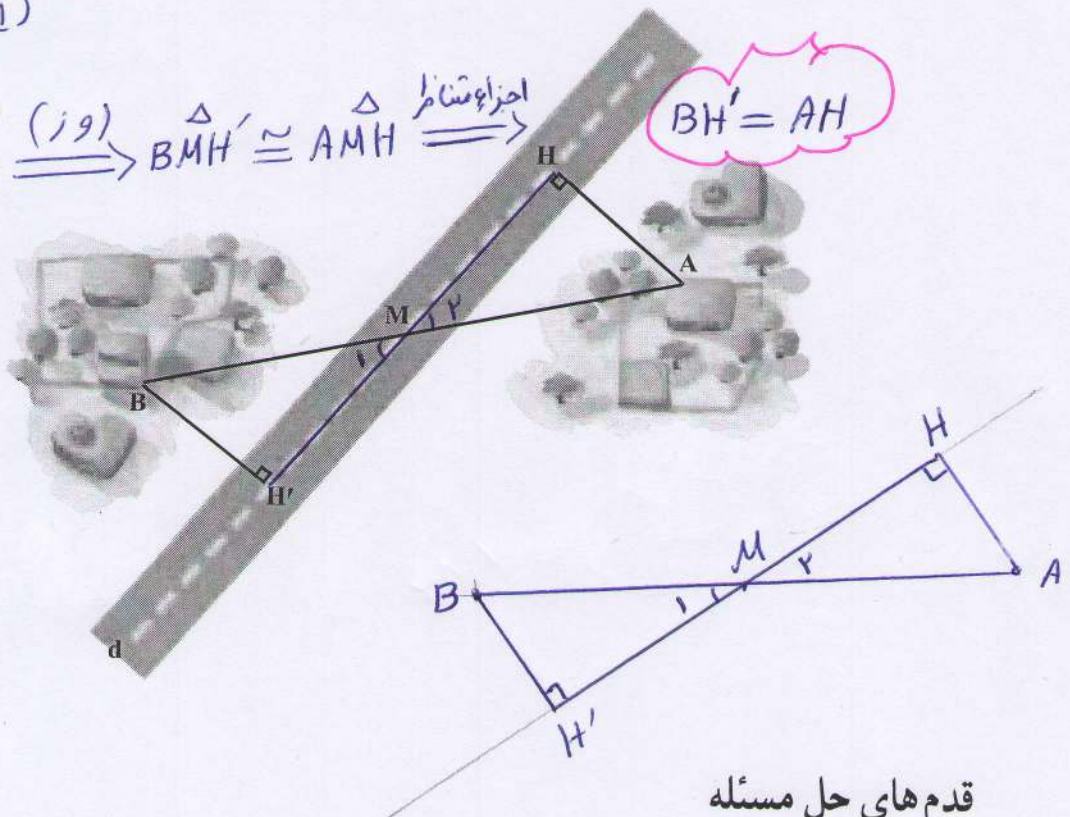
برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده آسفalte مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جاده آسفalte درست از وسط جاده خاکی عبور می کرد. اداره راه سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جاده آسفalte با کوتاه ترین فاصله ممکن تا جاده اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جاده مستقیم، عمود بر این جاده اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه های ساخت جاده دیگر از روستای B، مهندسین پیش بینی کرده اند که فاصله روستای B از جاده نیز همین مقدار

است؛ یعنی $AH = BH'$. چون جاده های آسفالت از وسط جاده های خاکی عبور می کنند داریم

$$BM = AM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad BM = AM \\ M_1 = M_2 \text{ (مقابلیه های)} \\ \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow$$



قدم های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصله نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟ آری
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید:

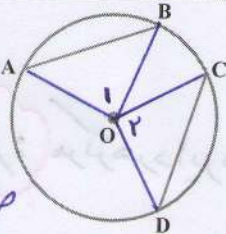
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} (MA=MB \text{ طبق فرض}) \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (مقابل به‌راس)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \triangle AMH \cong \triangle BMH' \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت



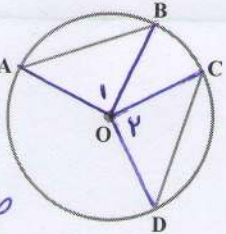
صفحه ۵۰/۱

فرض: $AB=CD$

در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ مساوی است.

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



صفحه ۵۰/۱

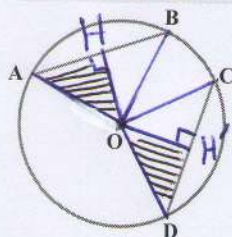
۲- در شکل مقابل کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ مساوی است. نشان

دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

حکم: $AB=CD$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر

برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



صفحه ۵۰/۱

۳- از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود

شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره

از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

نکته: هرگز هر دایره از دو وتر مساوی آن دایره، به یک فاصله است

۱ کار در کلاس

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (مقطع فرض)} \\ OA = OD \text{ (شعاع دایره)} \\ OB = OC \text{ (شعاع دایره)} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(من فرض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xRightarrow{\text{اجزاء متساوی}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AB} \\ \hat{O}_2 = \widehat{CD} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

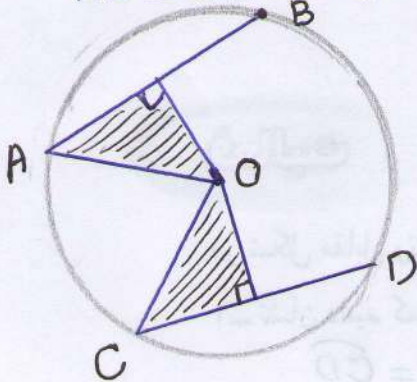
نکته: در دایره زاویه مرکزی و کمان مقابل آن با هم برابر می باشند (از نظر دایره)
نتیجه: کمان های نظیر وترهای مساوی از یک دایره با هم مساوی اند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ فرض} \\ OA = OD \text{ (شعاع دایره)} \\ OB = OC \text{ (شعاع دایره)} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(من فرض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

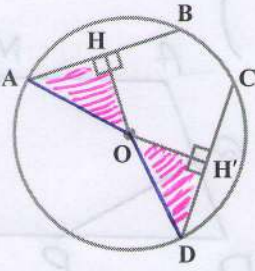
نتیجه: وترهای نظیر کمان های مساوی از یک دایره با هم برابرند.

$$AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{r} = \frac{CD}{r} \Rightarrow AH = DH' \left\{ \begin{array}{l} \text{(و فرض)} \\ OA = OD \text{ شعاع دایره} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH'$$

$$\xRightarrow{\text{اجزاء متساوی}} OH = OH'$$



نتیجه: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن، یک فاصله است.



۴- در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH=OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

$$OA = OD = \text{شعاع}$$

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$$

$$(فرض) OH = OH'$$

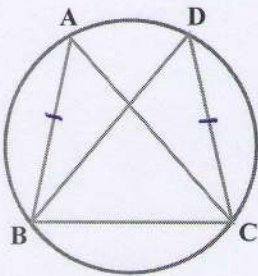
(وض)

$$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow$$

$$2AH = 2DH' \Rightarrow AB = CD$$

نتیجه: اگر دو وتر در یک دایره از مرکز به یک فاصله باشند آن دو وتر با هم مساوی اند.

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم $AB=CD$,

۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$? زیرا وترهای نظیر همان‌های مساوی با هم

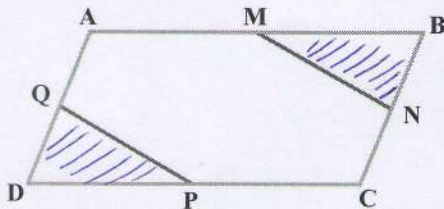
۲- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید: برابرند

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{cases}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$$

۳- چرا $AC=BD$? می‌دانیم وترهای نظیر همان‌های مساوی با هم برابرند

تمرین

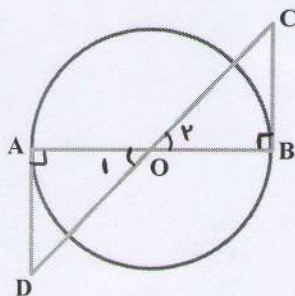


۱- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع

است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع

متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید: $MN=PQ$

صفحه ۱/۵

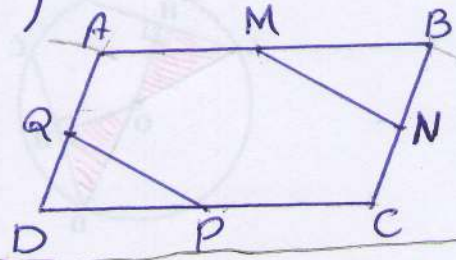


۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره

مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.

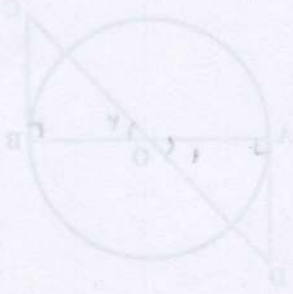
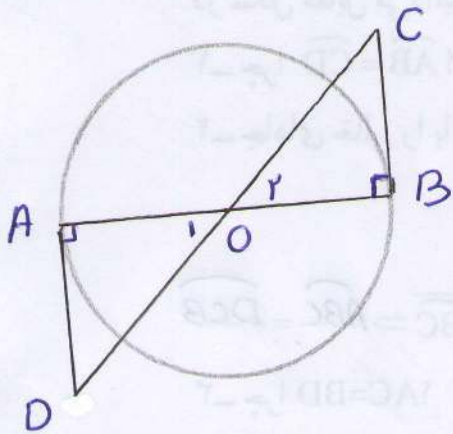
فرض $AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{r} = \frac{BC}{r} \Rightarrow DQ = BN$
 فرض $CD = AB \Rightarrow \frac{CD}{r} = \frac{AB}{r} \Rightarrow DP = BM$
 خاصیت متوازی الاضلاع: $\hat{D} = \hat{B}$

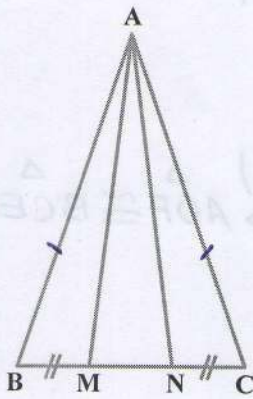
$\Rightarrow \triangle DQP \cong \triangle BNM$ $\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}}$ $PQ = MN$



$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
 $OA = OB$ (شعاع دایره)
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (مقابل بیرون)
 $\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \triangle OAD \cong \triangle OBC \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} AD = BC$

نکته: هر دایره خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس بر آن، بر شعاع دایره عمود است





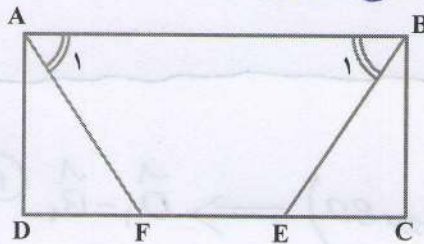
۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM = NC$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

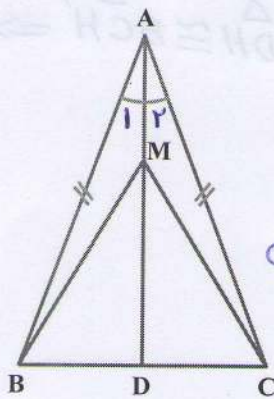
$\textcircled{1} \Rightarrow AB = AC$
 $\textcircled{1} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
 فرض $BM = CN$

$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \text{تساوی اجزاء} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle ABM \cong \triangle ACN \\ \Rightarrow AM = AN \end{array}$

از تساوی AM, AN نتیجه می‌گیریم مثلث AMN متساوی الساقین است.



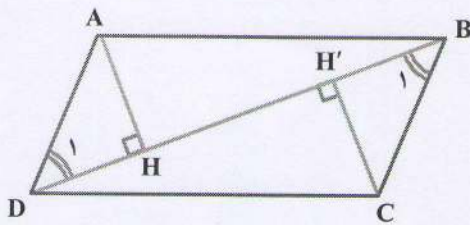
۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

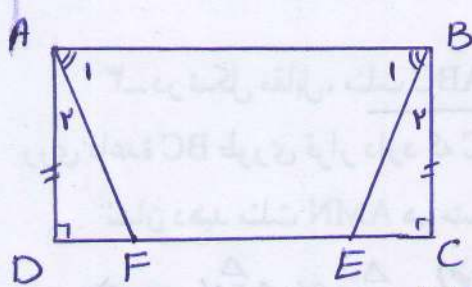
$\textcircled{1} AB = AC$ (مبتنی فرض)
 AD نیمساز است $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$
 $AM = AM$ ضلع مشترک

$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \text{تساوی اجزاء} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle ABM \cong \triangle ACM \\ \Rightarrow BM = CM \end{array}$



۶- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویه B_1 و D_1 را توضیح دهید. نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید، سپس جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قصر بین آنها به یک فاصله اند.

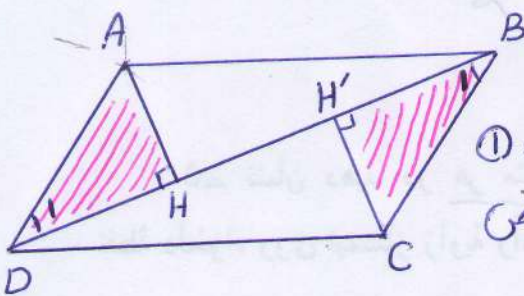


فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$ ①

① $\Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_r$
تعریف مستطیل $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
طبق فرض $AD = BC$ } (رضی) $\triangle ADF \cong \triangle BCE$

تساوی سبب
اجزای متساوی $\Rightarrow AF = BE$



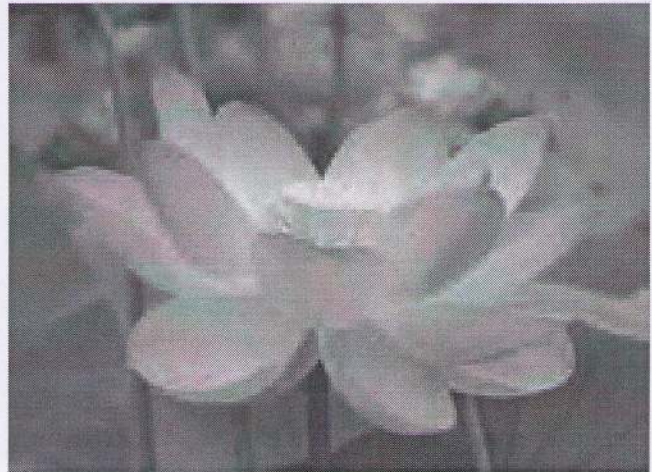
$(AD \parallel BC, BD \text{ مشترک}) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ ① ۴

① $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$
فرض $AD = BC$
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ } (رضی) $\triangle ADH \cong \triangle B'CH' \Rightarrow$

تساوی اجزای متساوی
 $\Rightarrow AH = CH'$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

— در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم است؟ *خیر*



— در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ *راندازی - تصویر*
عکس شماره‌ی (۲) تصویر کج‌شده‌ی شماره‌ی (۱) می‌باشد



— تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

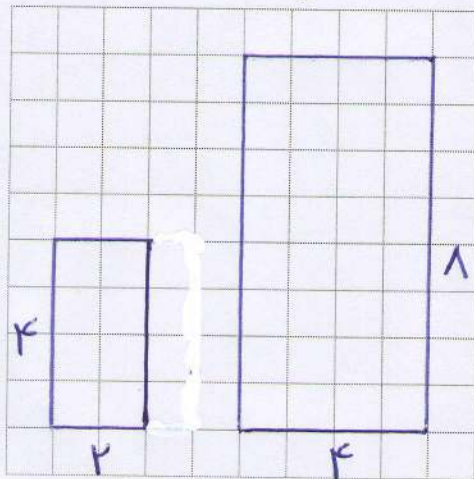
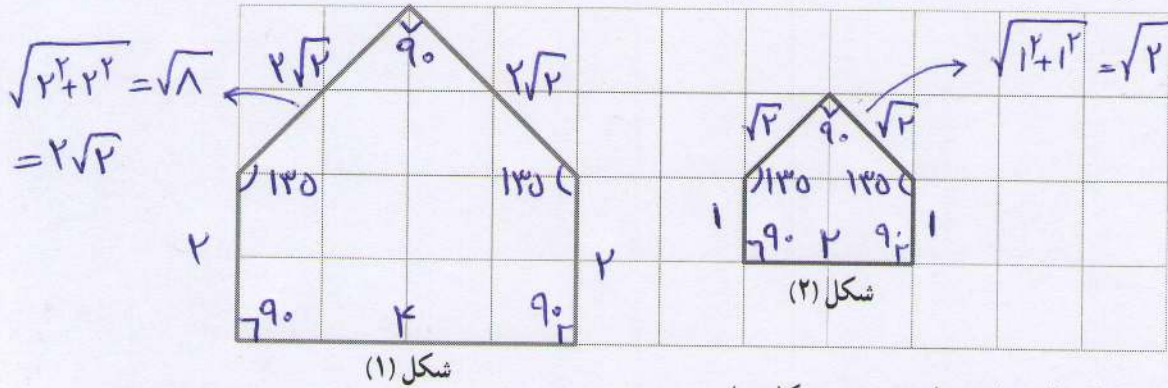
تصویر سمت چپ شبیه‌تر است



اصلاح شکل سمت راست (۲) نصف ضلع‌های متناظرشان سمت چپ (۱) می‌باشند

فعالیت

۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است:

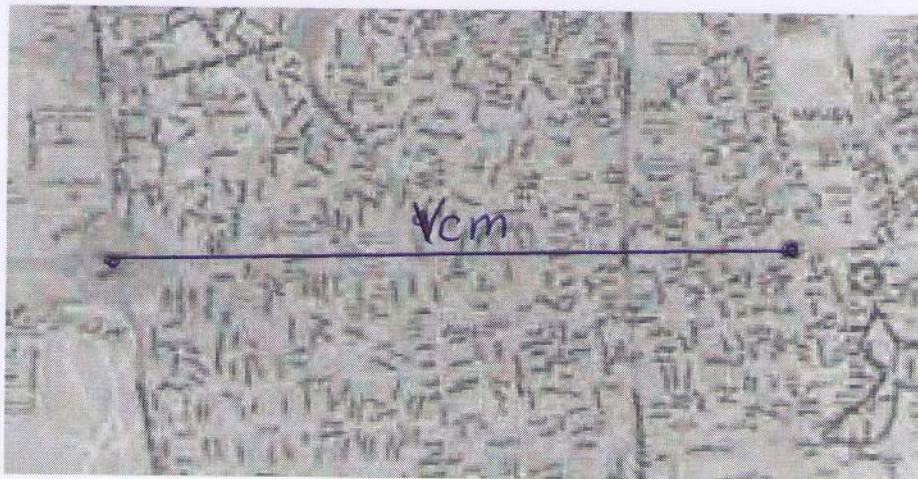


→ بالا اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید:
چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟
→ برابر می‌باشند چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟
اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های

شکل (۲) است؟ دو برابر

در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید
و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه
ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛
یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب
و آزادی را پیدا کنید. فاصله در کتاب پنجم حدود ۷ سم است

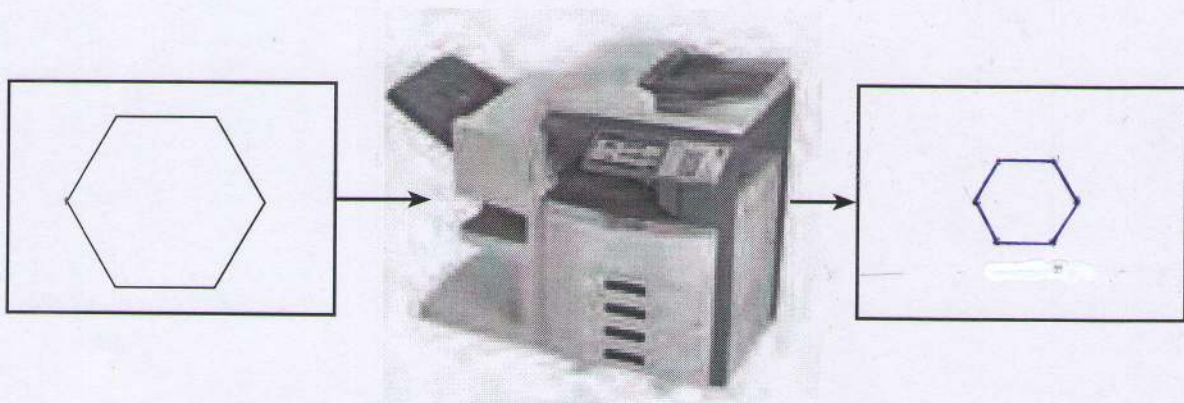


$$7 \times 100,000 = 700,000 \text{ سانتی متر}$$

$$700,000 \div 100 = 7000 \text{ متر}$$

$$7000 \div 1000 = 7 \text{ کیلومتر}$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی با هم

متشابهند. ۱- فرض کنیم دو مربع دلخواه به اضلاع a و b داریم چون همه زاویه‌ها برابر 90° است

و نسبت اندازه‌های اضلاع آن‌ها برابر $\frac{a}{b}$ می‌باشد پس این دو مربع دلخواه متشابه می‌باشند

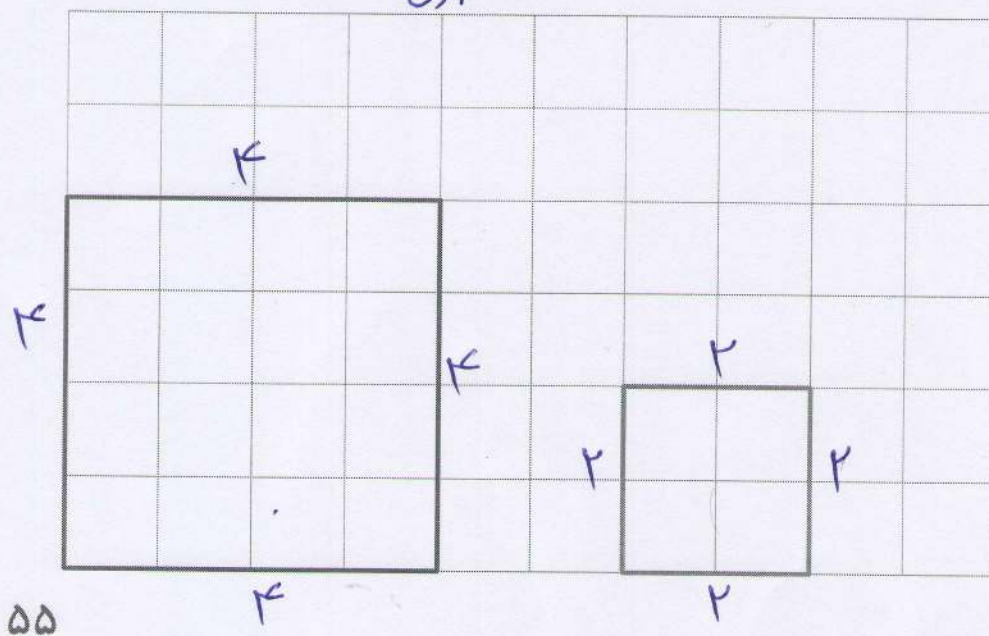
کار در کلاس

آری

۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای

بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های مربع بزرگ تر ۲ برابر ضلع‌های مربع کوچک تر است آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

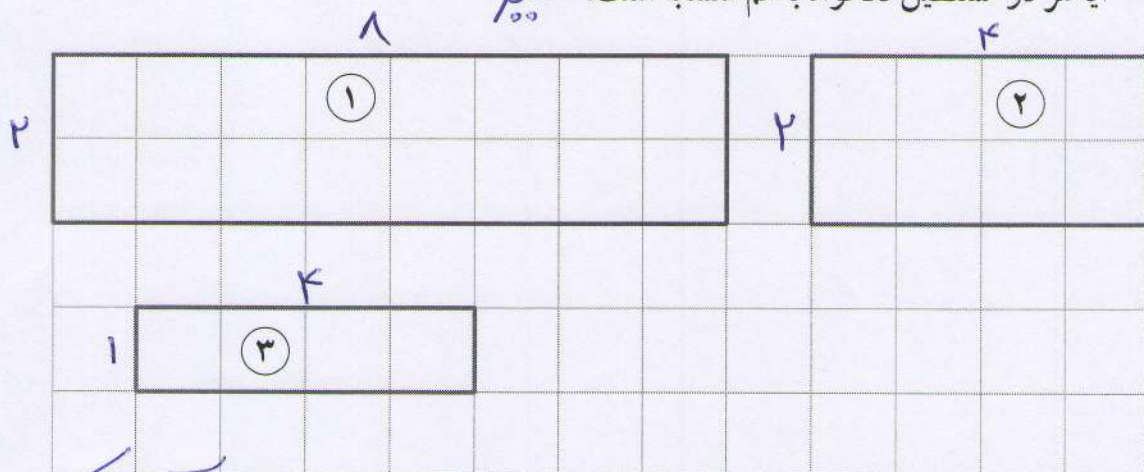
آری



۱۲. زیرا زاویه‌ها همگی برابر 90° است و نسبت اضلاع متناظر آنها برابر $\frac{1}{4}$ یا $\frac{2}{8}$ می‌باشد

۲- از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ شماره او ۳

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ **خیر**



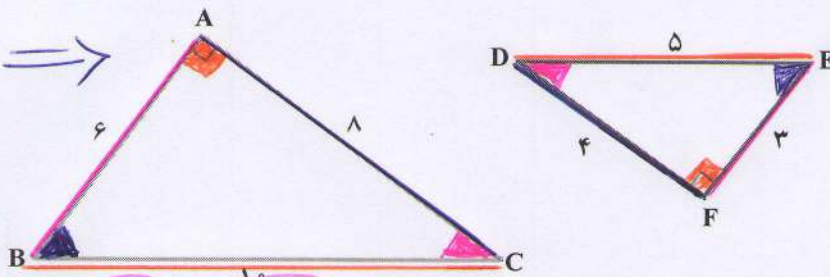
مستطیل شماره ۱، ۲ متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع متناظر آن‌ها یکی

فعالیت نیست $\frac{\text{عرض ۲ بزرگ}}{\text{عرض ۲ کوچک}} \neq \frac{\text{طول ۲ بزرگ}}{\text{طول ۲ کوچک}}$ یا $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{2}$

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت

ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{FE} &= \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{FD} &= \frac{8}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{BC}{ED} &= \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\frac{AB}{FE} = \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED} = \frac{1}{2}$$

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

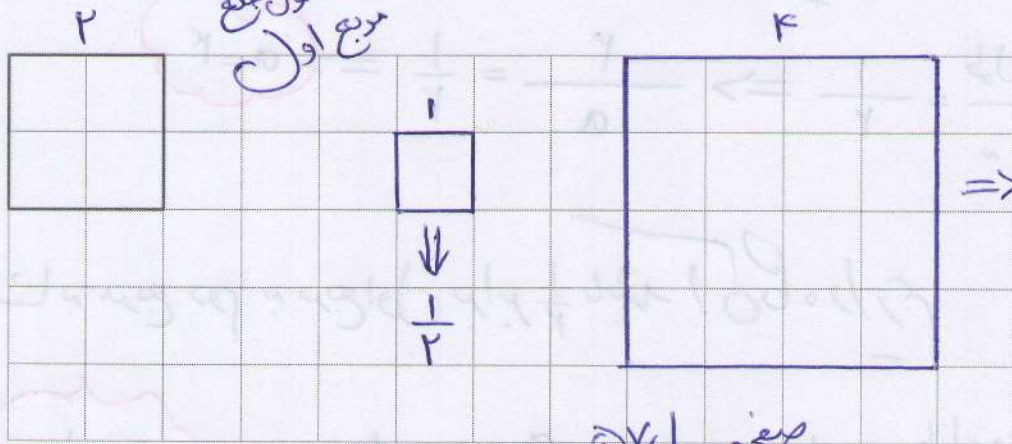
۱- با توجه به مربع صفحۀ بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{4}$

باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ دارد می‌توانیم ضلع مربع دوم را برابر

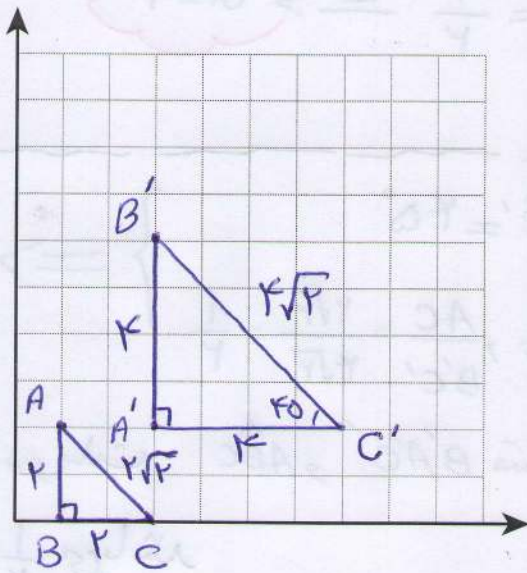
یا نصف کنیم در هر صورت نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{1}{4}$ است ۵۶

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a=1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{a} \Rightarrow a=4$$



صفحه ۵۷/۱



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

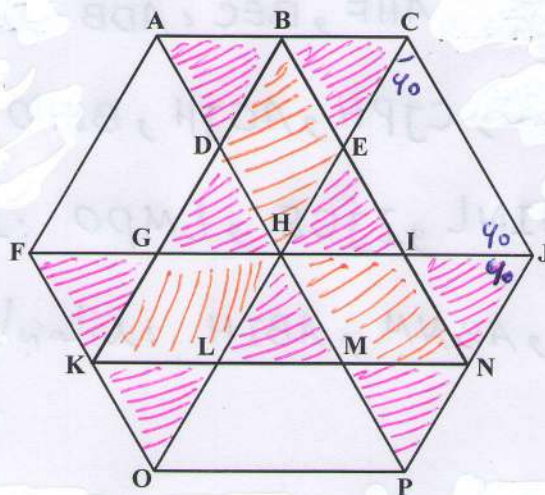
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

تمرین

۱- چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید. صفحه ۵۷/۱



کاردرکلاس $\frac{1}{2}$ اگر نسبت تناسله مربع اول به دوم $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع اول}}{\text{طول مربع دوم}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

اگر نسبت تناسله مربع دوم به مربع اول برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع دوم}}{\text{طول مربع اول}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{A}' = 45^\circ, \hat{B} = \hat{B}' = 45^\circ, \hat{C} = \hat{C}' = 45^\circ \\ \frac{AB}{B'A'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{A'C'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

پس دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متشابه می باشند و نسبت تناسله آنها برابر $\frac{1}{2}$ می باشد

تمرین در این تعداد زیاری مثلث و تعداد لوزی و دوزنقه و متوازی الاضلاع متشابه وجود دارد

- ۱- مثلث های متشابه مانند: $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ و $\triangle AHF$ و ...
- ۲- لوزی های متشابه مانند $BEHD$, $ACJH$ و $CJPH$ و ...
- ۳- دوزنقه های متشابه مانند: $LMPQ$ و $IJCE$ و $HINL$ و ...
- ۴- متوازی الاضلاع های متشابه مانند: $ABIH$ و $ABNM$ و ...

۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ **بله**
در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ **نسبت تشابه برابر است**

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ **خیر صغر ۵۸۱۱**

۴- در یک نقشه، مقیاس $1:200$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $3/5$ سانتیمتر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

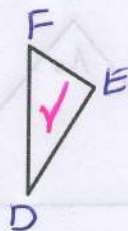
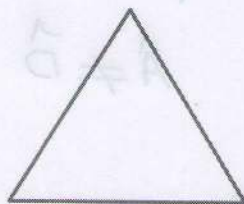
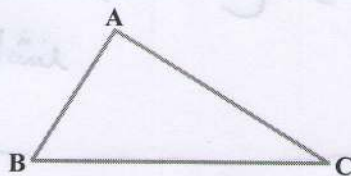
۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ **آری صغر ۵۸۱۱**

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ **خیر**

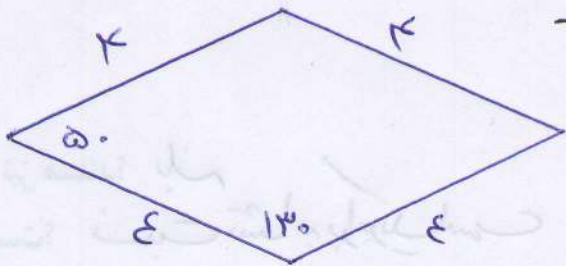
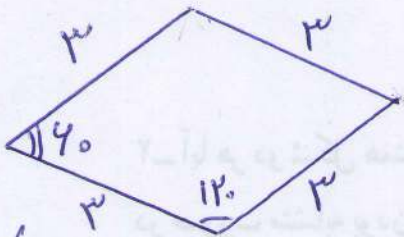
۷- مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه

هستند (اندازه ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$



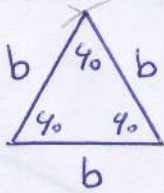
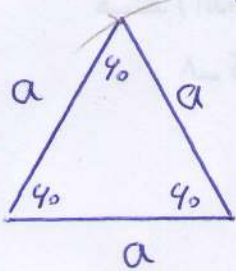
در دلتوی دلتوا نسبت اضلاع نظیر با هم برابر است و لیکن اندازه‌ی زاویه‌های نظیر لزوماً یکی نیست

۴

$$\frac{\text{مقدار روی نقشه}}{\text{مقدار واقعی}} = \frac{1}{200} = \frac{3,5}{x} \Rightarrow x = 3,5 \times 200 = 700 \text{ cm}$$

۵

در دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلتوا به اضلاع a ، b اندازه‌ی تمام زاویه‌ها



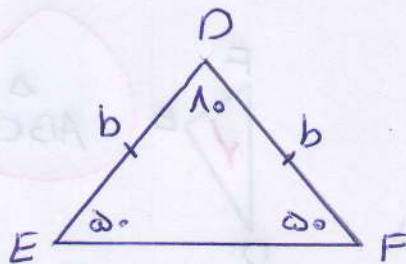
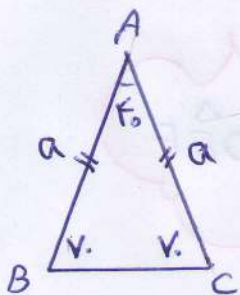
برابر $۶۰°$ است و نسبت اضلاع نظیر $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ می‌باشد لذا دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلتوا همیشه متساویه می‌باشند

۶

خیر زیرا ممکن است زاویه‌های نظیر با هم

$$\hat{A} \neq \hat{D}$$

برابر نباشد



۷

$$\Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{x+7}{1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x-1=8 \xrightarrow{+1} x=9$$

$$\frac{10}{5} = \frac{x+7}{1} \Rightarrow 10 = 5x + 35 \xrightarrow{-35} 45 = 9x \xrightarrow{:9} 5 = x$$

۵۸/۱

نویسنده: سعید جعفری صرعی