



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

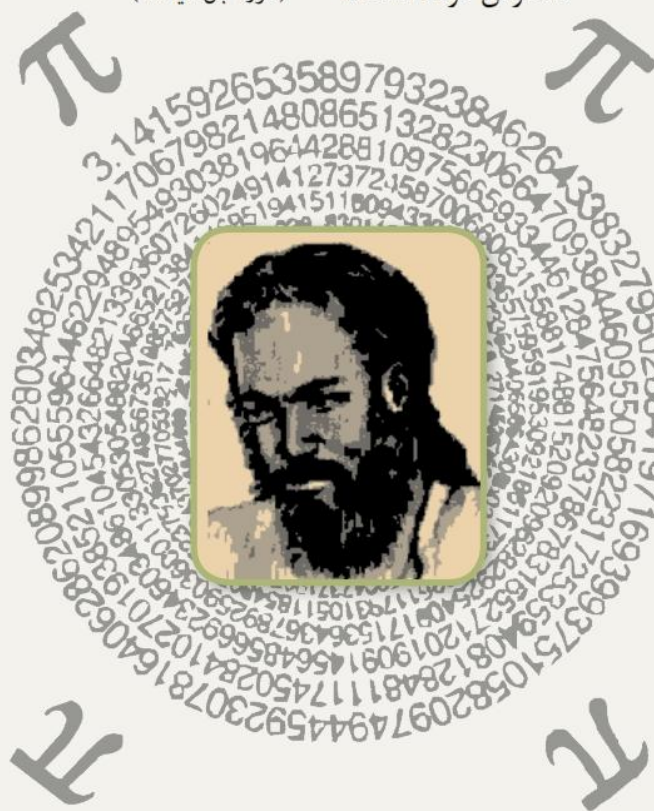


عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد

شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی و گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچکتر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ اعداد ۳، ۴ و ۵
 نادرست ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰

۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} \quad \frac{5}{12}$$

$$\frac{6}{18} \quad \frac{7}{18}$$

روش مردم

۱. ابتدا هر دو کسر را همخرج کرده و سپس اعداد $\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}}$ و $\frac{2}{6} = \frac{1}{\frac{6}{2}}$ را روی محور مشخص کرده است

۲. برای به دست آوردن یک عدد بین این دو عدد هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، لذا یک واحد

به دوازده قسمت مساوی تقسیم می شود بنابراین $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ و $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ می باشد و کسر $\frac{5}{12}$ طبق

شکل بین این دو عدد قرار می گیرد

۳. در این مرحله به جای تقسیم هر کدام از قسمت های کوچک به ۲ قسمت مساوی، هر کدام از آن ها

را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می کند؛ لذا واحد به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم می شود

بنابراین $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ و $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ می باشد و دو کسر $\frac{7}{18}$ و $\frac{8}{18}$ بین این دو عدد قرار می گیرد

روش چهار

بهار دقیقاً کار مردم را انجام داده است ولی عدد رسم نکرده است. روش مردم مفهومی تر

ولی روش بهار سریع تر می باشد

می توانیم بگوییم روش بهار نتیجه ی روش مردم می باشد

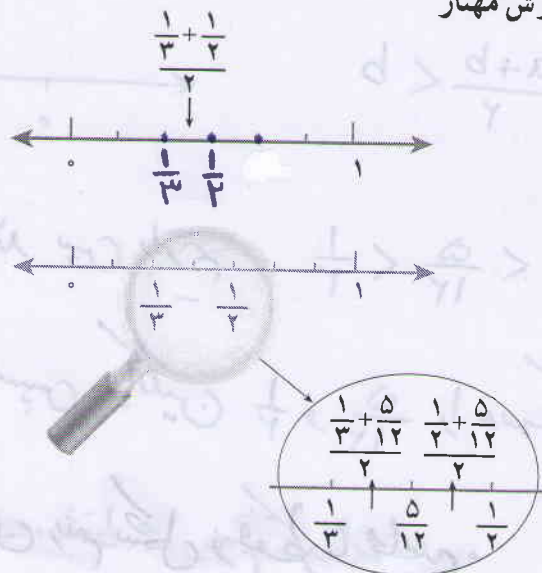
روش عطیه

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

روش مهناز



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار کسر پیدا کرد. صفحه ۲۰/۱

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوهای نشان داد؟ چرا؟ **خیر، چون بین دو عدد گویا**

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ **خیر، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد**

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

کار در کلاس

صفحه ۲۰/۱

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲- بین $-\frac{1}{2}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

$$-1 = -\frac{2}{2} = -\frac{2 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6} < -\frac{1}{2} = -\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = -\frac{3}{6}$$

روش دوم
صفحه ۲۰/۲

فعالیت

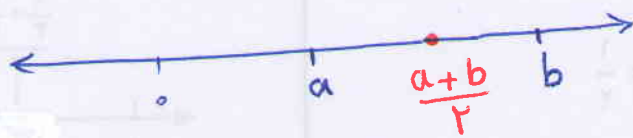
۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.

مختار پس از مشخص کردن جای دو عدد روی محور از خاصیت میانگین دو عدد نگه گرفته است

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$



میانگین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{5}{12}$ می باشد پس داریم $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$

در مرحله ی دوم ابتدا میانگین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ و سپس میانگین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{12}$ را بدست آورده است
عطیه هم دقیقاً از روش مختار استفاده کرده است، فقط محور رسم نکرده است.

(الف)

تعداد زیادی

روش مردم

مردم می توانند یک واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کند و تعداد زیادی کسر بین این دو عدد بنویسد
اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{300}{600} \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{200}{400}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{1}{2}$$

اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می تواند بنویسد

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{3000}{6000} \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2000}{4000}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{2001}{4000}, \frac{2002}{4000}, \frac{2003}{4000}, \dots, \frac{2999}{4000} < \frac{1}{2}$$

در روش مختار نیز می توانیم به دفعات زیادی میانگین دو عدد را محاسبه کنیم
نتیجه: بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad , \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{3}{4}$$

کاربرد کلاس

دو کسر را هم مخرج می کنیم پس $\frac{8}{20} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$ را می نویسیم

کاردرکلاس 1:

می دانیم $a < \frac{a+b}{2} < b$ لذا داریم

$$\text{کسر ۱} \quad \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{23}{20}}{2} = \frac{23}{40} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{23}{40} < \frac{3}{4} \quad (1)$$

با ادا مدی روش بالا داریم

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{23}{40}}{2} = \frac{\frac{39}{40}}{2} = \frac{39}{80} \quad , \quad \frac{\frac{23}{40} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{53}{40}}{2} = \frac{53}{80} \quad (2)$$

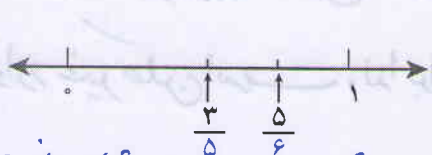
$$(1), (2) \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{39}{80} < \frac{23}{40} < \frac{53}{80} < \frac{3}{4}$$

کاردرکلاس 2:

$$\text{کسر ۱} \quad \frac{-\frac{1}{2} + (-1)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{-1 + (-\frac{3}{4})}{2} = \frac{-\frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{8} \quad , \quad \frac{-\frac{3}{4} + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{-\frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -1 < -\frac{7}{8} < -\frac{3}{4} < -\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$$



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرها $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده

از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ **خیر، این روش مناسبی برای مقایسه نیست**
روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را

مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می آید. کار مرتضی را کامل کنید: $[9, 8, 4, 5] = 360$

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55$$

$$\frac{7}{8} = 0.87$$

$$\frac{5}{6} = 0.83$$

$$\frac{3}{5} = 0.60$$

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید. **صفحه ۲۱۱**
۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرها را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{7} = 0.14$$

$$\frac{1}{9} = 0.11$$

$$\frac{7}{6} = 1.16$$

$$\frac{1}{5} = 0.20$$

$$\frac{1}{3} = 0.33$$

$$\frac{3}{8} = 0.37$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می دهد؟ **پاسخ یاز - ۸ رقم**
ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ **صفحه ۲۱۱**

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم های اعشار آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666\ldots = 1.\overline{16}$$

تعالیت 1 برای مقایسه‌ی اعداد گویا با مخرج‌های مساوی و کوچک استفاده از محور روش

مناسبی است. در صورتی که مخرج‌ها بزرگ باشد تقسیم یک واحد به قسمت‌های مساوی کار دشوار حتی در خیلی موارد غیر ممکن است. لذا برای این سؤال روش شاهد روش مناسبی نیست

* یکی از روش‌های مناسب برای مقایسه‌ی کسرها هم مخرج کردن آن‌ها باشد ولی این روش نیز به نوبه‌ی خود محدودیت‌های دارد و در صورتی که مخرج کسرها بزرگ باشد بدست آوردن «ک.م.م» آن‌ها بسیار وقت‌گیر است

* مجید از ابزار استفاده کرده است و ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و اعشاری آن‌ها را بدست آورده و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کرده، استفاده از ماشین حساب در زندگی روزمره و کسرهای واقعی بسیار مناسب‌تر از دو روش بالاست

این روش هم محدودیت‌هایی دارد چون ممکن است ماشین حساب نداشته باشیم نتیجه: برای شروع کار روش شاهد مناسب‌ترین روش است و در انتها روش مجید در صورت داشتن ماشین حساب بسیار مناسب‌تر است

تعالیت 2 (ب) برخی اعداد تعداد رقم‌های اعشاری محدودی دارند مثلا $\frac{1}{5} = 0.2$ که فقط یک رقم اعشاری دارد. در برخی دیگر رقم‌ها تکرار می‌شود مثلا $\frac{1}{3} = 0.3333$ که رقم ۳ تکرار می‌شود و برخی از آن‌ها برخی ارقام تکرار و برخی تکرار نشده‌اند مثلا $\frac{1}{6} = 0.1666$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$$\frac{5}{11} = 0,45$$

$$\frac{7}{9} = 0,7$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

$$\frac{7}{22} = 0,3\bar{18}$$

$$\frac{3}{20} = 0,15$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید :

$$1 + \frac{3}{2} = 2,5$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -0,25$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24} = 0,29\bar{16}$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{3} = 1,6\bar{6}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}) \div (-1 - \frac{1}{9}) = -\frac{3}{5} = -0,6$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}} \times \frac{3}{14} = -\frac{5}{14} = -0,357\bar{142857}$$

صفحه ۲۲/۱ $-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} = -2\frac{4}{12} - 3\frac{4}{12} + 4\frac{7}{12} = -1\frac{3}{12} = -1,25$$

صفحه ۲۲/۱ $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \div \frac{-6}{5})$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب) $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}$

ب) $0, -\frac{1}{3}$ صفحه ۲۲/۱

$$\frac{10}{11} = \frac{130 \times 2}{143 \times 2} = \frac{260}{286} < \frac{261}{286}, \frac{262}{286}, \frac{263}{286} < \frac{12}{13} = \frac{132 \times 2}{143 \times 2} = \frac{264}{286}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}}_{(1)} = -\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{5}{14} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}}_{(2)}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = -0.\overline{3}$$

نکته: ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق اویست دارد ولی چون تقسیم ابتدا آمده مرحله اول تقسیم و سپس ضرب و در مرحله سوم جمع و تفریق را باید انجام دهیم

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \underbrace{\left(2 \div \frac{-4}{5}\right)}_{(1)} = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \left(2 \times \frac{-5}{4}\right) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \underbrace{\left(-\frac{5}{2}\right)}_{(2)}$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{6} + \frac{7}{20} = \frac{143}{120} = 1,358\overline{3}$$

سؤال ۳ قسمت الف) $[-1, 3, 4, 1, 2] = 24$, $-\frac{35}{4} = -\frac{23}{4}$

$\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, $-\frac{2}{3} = -\frac{14}{24}$, $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, $\frac{1}{1} = \frac{24}{24}$, $-\frac{23}{4} = -\frac{92}{24}$

$$\Rightarrow -\frac{92}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{24}{24} \Rightarrow -\frac{35}{4} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2$$

قسمت ب) $\frac{14}{5} = 2\frac{2}{5} = 2\frac{18}{45}$, $-\frac{5}{6} = -\frac{10}{12}$, $-\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}$, $\frac{54}{13} = 4\frac{2}{13} = 4\frac{20}{95}$

$4\frac{3}{5} = 4\frac{39}{95}$, $2,75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4} = 2\frac{21}{28}$

$$-\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < 2\frac{18}{45} < 2\frac{21}{28} < 4\frac{20}{95} < 4\frac{39}{95} \Rightarrow -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{14}{5} < 2,75 < \frac{54}{13} < 4\frac{3}{5}$$

روش دوم استفاده از ماشین حساب

$$-\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots < 0$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{0}{3} \xrightarrow{x \neq} -\frac{4}{12} < \frac{0}{12} \Rightarrow -\frac{4}{12} < -\frac{3}{12}, -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12} < \frac{0}{12} = 0$$

A number line with points A, B, C, D, and E marked. Point A is at 0, B is at 1, C is at 2, D is at 3, and E is at 4.

$$A = \frac{V}{Y}, B = \frac{A}{Y}, C = \frac{9}{Y}, D = \frac{10}{Y}, E = \frac{11}{Y}$$

۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی $1/4$ است، آن را روی محور نشان دهید.

توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب های مختلف استفاده می کردند، تعداد رقم هایی که نوشته

سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

1.41421356237

چرا این تفاوت در ماشین حساب های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی شود؟

رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟

1.414213562373095

آبادر
اعدادند

اعشاری آنها بی شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید. صفحه ۲۳۱

★ با توجه به اینکه رقم نهم ۶ می باشد وقتی این رقم حذف می شود یک واحد به رقم هشتم یعنی عدد

اضافه می شود (چون ۹ > ۵ است) $1,4142135\overset{+1}{\boxed{6}} \rightarrow 1,4142136$

★ چون رقم یازدهم برابر ۳ می باشد وقتی این رقم حذف می شود رقم قبلی تغییری نمی کند

(چون ۳ < ۵ است) $1,4142135\boxed{3} \rightarrow 1,4142135$

اثبات کنید چرا $\sqrt{2}$ گنگ است

اثبات: فرض می کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد پس وجود دارد کسری مانند $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)

به طوری که داریم $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده است یعنی $(a, b) = 1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ $\Rightarrow$ a^2 عددی زوج است $\Rightarrow$ a عددی زوج است $\Rightarrow$ $a = 2k$ (۱)

چون a^2 زوج است لذا a عددی زوج است پس $a = 2k$ (۱) $\Rightarrow$ $(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$

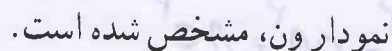
بنابراین b^2 عددی زوج است پس b هم عددی زوج است (۲)

از (۱) و (۲) داریم $(a, b) \neq 1$ چون هر دو زوج می باشند پس کسر $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده نشده

است. چون فرض گرفته بودیم $\frac{a}{b}$ ساده شده می باشد پس فرض مان باطل است

یعنی کسر ساده شده نمی داریم که $\sqrt{2}$ یا آن برابر باشد پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ است

مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.



کار در کلاس

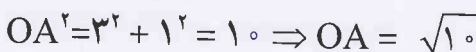
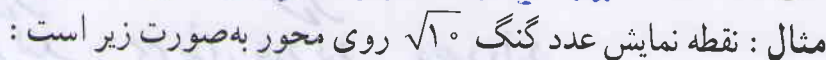
($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ است)

تاریخ ۱۳۰۲

فعاليات

صفر ۲۴/۱

را پیدا کنید.



الف) بین هر دو عدد گویا، بیشمار عدد گویا وجود دارد

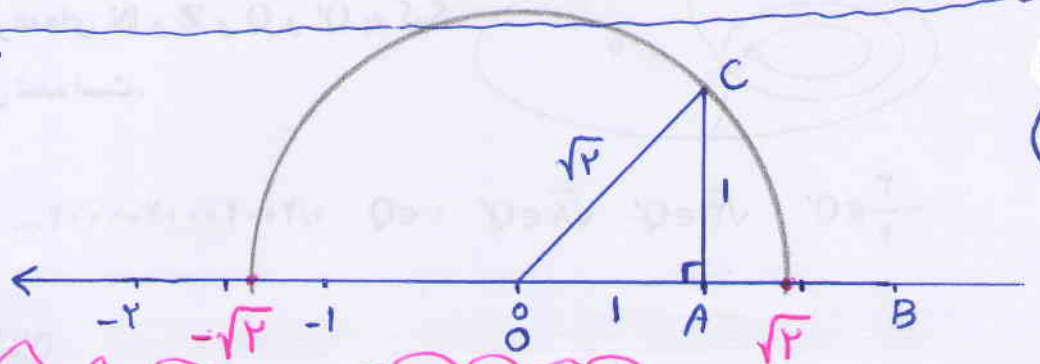
$$1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n} < 2$$

$$1 < \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2} < 2$$

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$$OC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$OC = \sqrt{2}$$



$$\Rightarrow -1,5 < -\sqrt{2} < -1, \quad 1 < \sqrt{2} < 1,5$$

د) بین دو عدد ۱ و ۲، بیشمار عدد گویا وجود دارد. و بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد. وقتی نقاط متناظر با اعداد گویا بین ۱ و ۲ را رنگ می کنیم نقاط متناظر با اعداد گویا رنگ نشده باقی می ماند در نتیجه این نقاط نمی توانند با خط بوجود آورند.

نکته

★ بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★ بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★★ بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★★★ بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

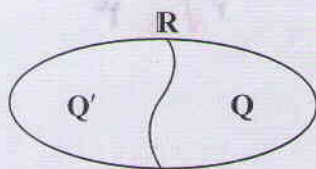
کار در کلاس

- ۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.
 $\sqrt{5.1}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$
 ۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.
 $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$

۳- الف) مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به



صورت زیر درست است؟ **خیر صفر ۲۵/۱**
 ب) نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.



عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته بندی می شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم. تساوی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ بین سه مجموعه Q و Q' و $\mathbb{R}$ برقرار است.

مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{1} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.02022022202222... \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

کار در کلاس

۱- داخل $\bigcirc$ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید:

$$2 \in \mathbb{Z}$$

$$0.2 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$-5 \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$5 = \sqrt{25} \notin \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{0}{6} = 0$$

$$\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9}{-1} = -9$$

۲۵

$$\sqrt{0/9} = 0$$

(۱)

کار در کلاس

$$\sqrt{5} < \sqrt{5/1}, \sqrt{5/2}, \sqrt{5/3}, \dots, \sqrt{4}, \sqrt{4/1}, \dots, \sqrt{4/9}, \sqrt{4/1}, \sqrt{4/2}, \dots$$

تذکره: $\sqrt{9}$ گنگ نیست

این سؤال پاسخ باز است

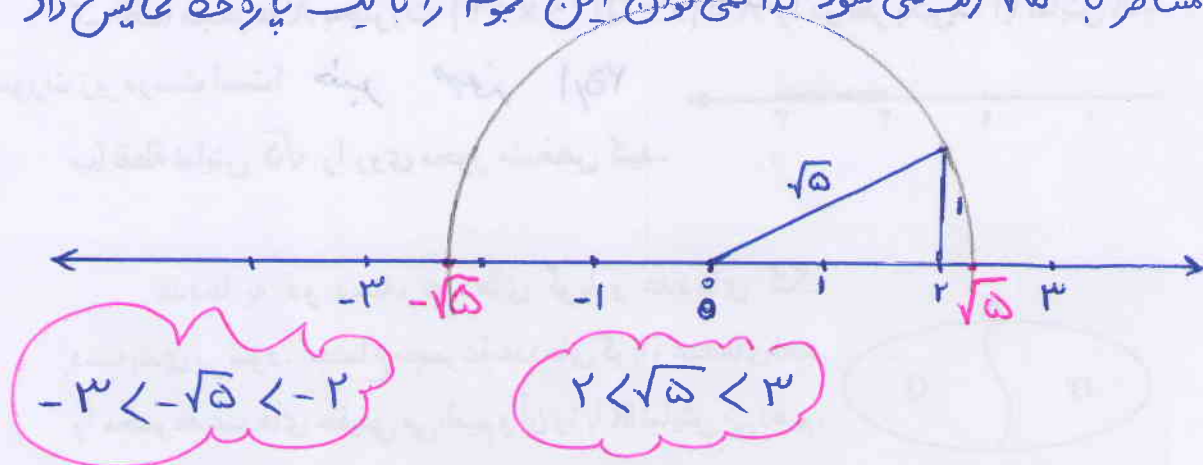
۲

این سؤال پاسخ باز است

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4/1}, \sqrt{4/2}, \sqrt{4/3}, \sqrt{4/4} < \sqrt{9} = 3$$

۳

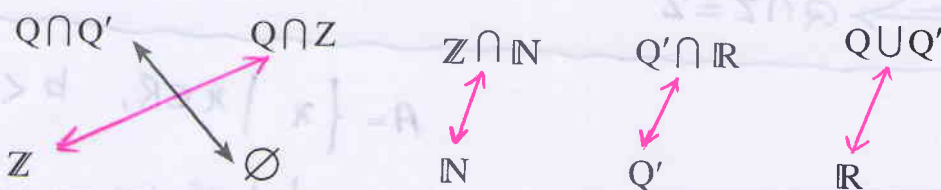
مجموعه A شامل تمام اعداد گویا از ۲ تا ۳ می باشد (دو سره را نیز شامل می شود)
 و می شامل اعداد گنگ نمی شود مثلاً $2 < \sqrt{5} < 3$ یک عدد گنگ است و نقطه ی
 متناظر با $\sqrt{5}$ رنگ نمی شود لذا نمی توان این مجموعه را با یک پاره خط نمایش داد



نکته

۱- دو مجموعه Q و Q' جدا از هم می باشند زیرا $Q \cap Q' = \emptyset$ ۲- $R - Q' = Q$ و $R - Q = Q'$ ۳- اجتماع این دو مجموعه، مجموعه ی اعداد حقیقی را درست می کند یعنی: $Q \cup Q' = R$

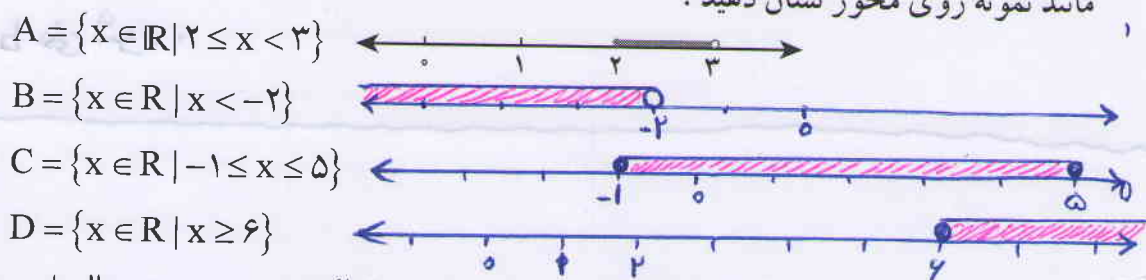
۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را

مانند نمونه روی محور نشان دهید:

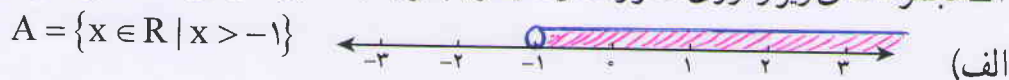


با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

نامساوی $x < 3$ به این معنی است که x باید از ۳ کم تر باشد و مجموع شامل عدد ۳ نمی باشد و نامساوی $2 \leq x$ یعنی مجموع شامل ۲ و اعداد بزرگ تر از آن می باشد

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:



۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$0.75 \in A$ ☒	$0.252552555... \in B$ ☒	$\sqrt{3} \in A$ ☒
$\sqrt{7} \in C$ ☒	$\sqrt{1} \in A$ ☒	$-1000 \in C$ ☒

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



(الف) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

(ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$ ☒

مجموعه مشخص شده شامل تمام نقاط بین -۲ و ۳ است

یعنی تمام اعداد حقیقی بزرگ تر از -۲ و کوچک تر از ۳.

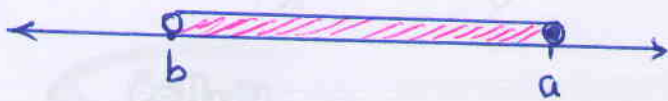
نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه داریم: $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$

$$Q' \subseteq R \Rightarrow Q' \cap R = Q'$$

$$N \subseteq Z \Rightarrow Z \cap N = N$$

$$Z \subseteq Q \Rightarrow Q \cap Z = Z$$

نکته: $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, b < x \leq a\}$

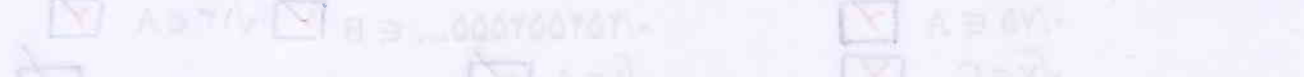


نامساوی $x \leq a$ یعنی تمام اعداد

کوچک تر و مساوی a ، پس این

مجموعه شامل عدد a نیز می شود و نامساوی $b < x$ به این معنی است که x بزرگ تر از b است

و شامل عدد b نمی شود.



تمرین

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	π	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\ldots$	-10	$\frac{6}{2}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی	x	x	✓	x	x	x	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	x	x	✓	x	x	✓	✓
$\mathbb{Q}$ گویا	x	✓	✓	x	✓	✓	✓
$\mathbb{Q}'$ گنگ	✓	x	x	✓	✓	x	x
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ $2, 3$

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- (الف) ۶ و ۷ (ب) $\sqrt{3}, 6$ (ج) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$ (د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بنویسید.

۱) ☒ عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. تمام اعداد صحیح گویا هستند.

۲) ☒ عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳) ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

۴) ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. تمام اعداد طبیعی، حقیقی هستند. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{11}$ چه تفاوتی هست؟

$\frac{3}{11} = 0.272727\ldots$, $\sqrt{10} = 3.162277660148379$

در نمایش اعشاری $\frac{3}{11}$ دوری تناوب وجود دارد و ۲۷ تکرار می‌شود.

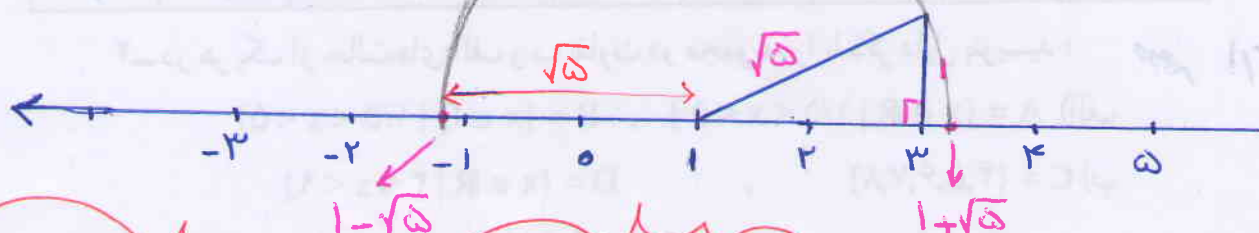
ولی در نمایش اعشاری $\sqrt{10}$ دوری تناوب وجود ندارد.

- تمرین الف) مجموعه A شامل همه اعداد بین ۵ و ۱۵ است (اعداد گویا و گنگ) و مجموعه B فقط شامل اعداد گویای بین این دو عدد می باشد
- ب) مجموعه D شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۳ و ۹ می باشد و مجموعه C فقط شامل اعداد طبیعی بین ۳ و ۹ می باشد

$$N \subseteq Z \Rightarrow \begin{cases} N \cup Z = Z \\ N \cap Z = N \end{cases}, \quad Q' \subseteq R \Rightarrow R \cap Q' = Q'$$

$$R \begin{array}{|c|} \hline Q / Q' \\ \hline \end{array} \Rightarrow R - Q' = Q$$

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \xrightarrow{+1} 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$$



$$-2 < 1 - \sqrt{5} < -1, \quad 3 < 1 + \sqrt{5} < 4$$

- الف) $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3} < \sqrt{25} = 5$
- ب) $6 = \sqrt{36} < \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \dots, \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$
- ج) $\sqrt{3} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12} < \sqrt{36} = 6$
- د) $\sqrt{2} < \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{24} < \sqrt{41}$

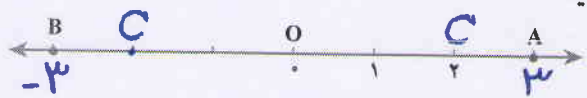
نکته مهم

مقادیر اعشاری هر عدد گویا یکی از دو حالت زیر می باشد

۱- اعشاری تحقیق (مختوم) ۲- اعشاری متناوب (ساده و مرکب)

فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ $OA = 3$

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ $OB = 3$

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان

یافت؟ **دو نقطه**

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید

قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت: $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق $-\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق

0.04% را به صورت $|0.04\%|$ نشان می‌دهیم که مساوی 0.04% است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد

است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$\text{اگر } a = -3 \Rightarrow |-3| = -(-3)$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

کار در کلاس

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| الف) $a > 0, b < 0$ | دو عدد a و b مثبت است. |
| ب) $a > 0, b > 0$ | عدد a نامنفی است. |
| ج) $a \geq 0$ | دو عدد a و b منفی است. |
| د) $a < 0, b < 0$ | عدد a مثبت و عدد b منفی است. |
| ه) $a \leq 0$ | عدد a نامثبت است. |

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- | | |
|---------------------|------------------------|
| الف) $a > 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$ |
| ب) $a < 0, b < 0$ | ۲) $ab > 0, a + b > 0$ |
| ج) $a < 0, b > 0$ | ۳) $ab > 0, a + b < 0$ |

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| الف) $a > 0$ | ۱) $ a = -a$ |
| ب) $a > 0, b > 0$ | ۲) $ a = a$ |
| ج) $a < 0$ | ۳) $ a + b = a + b$ |
| د) $a < 0, b < 0$ | ۴) $ a + b = -(a + b)$ |

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست. **صفحه ۲۹۱**
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$$

۱) $|ab| = |a||b|$

$|(-2) \times (-5)| = |-2| \times |-5|$, $|(-3) \times 4| = |-3| \times |4|$

$\Rightarrow |10| = 2 \times 5 \Rightarrow |-12| = 3 \times 4$
 $10 = 10$ ✓ $12 = 12$ ✓

$|a+b| \leq |a| + |b|$

مثال ۲ $|(-15) + 20| \leq |-15| + |20|$
 $|5| \leq 15 + 20$
 $5 \leq 35$ ✓

$|3 + 4| \leq |3| + |4|$

$7 \leq 3 + 4$

$7 \leq 7$ ✓

مثال ۳ $| -17 + 7 | \leq | -17 | + | 7 |$

$| -10 | \leq 17 + 7$

$10 \leq 24$ ✓

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل : $\sqrt{2} \approx 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می شود :

دلیل : $\sqrt{3} \approx 1/7$ پس $2 - \sqrt{3}$ مثبت می شود $1) |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

دلیل : چون $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ است $2) |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ هر دوی عدد $\sqrt{7}$ و $\sqrt{8}$ را به دست می آوریم :

دلیل : $3) |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

دلیل : $4) |-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$ هر دو عدد -4 و $-\sqrt{3}$ منفی است پس $-4 - \sqrt{3} < 0$ است

مثال : اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشد، حاصل عبارت $|a + b + c|$ را به دست می آوریم :

$$|a + b + c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2/5 + \sqrt{2} \right|$$

چون $-2/5 + \sqrt{2}$ عددی منفی است ($\sqrt{2} \approx 1/4$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-2/5 + \sqrt{2})$ یعنی $\sqrt{2} - 2/5$ است.

مثال : $|\underbrace{3 - \sqrt{5}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{-2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}}| = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	3	3	6	6	7	127	325

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل $\sqrt{a^2}$ همیشه مثبت و برابر $|a|$ می باشد

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال : برای محاسبه $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ خواهیم داشت :

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{8} < \frac{1}{16} < \dots$$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-7)^2| \oplus |-7|^2$ $| -7^2 | = |-49| = 49$, $|-7|^2 = (7)^2 = 49$

ب) $|-8+5| \otimes |-8|+|5|$ $|-8+5| = |-3| = 3$, $|-8|+|5| = 8+5 = 13$

ج) $|3-9| \otimes |3|-|9|$ $|3-9| = |-6| = 6$, $|3|-|9| = 3-9 = -6$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

مثبت $|0| = 0$ $|- \frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ $|7^3 - 7^4| = |0/25 - 0/26| = 0/25 - 0/26 = 0/25 < 0/26$
 ۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید : $|7^3 - 7^4| = -(7^3 - 7^4) = 7^4 - 7^3$

الف) $\sqrt{(-2595)^2} = |-2595| = 2595$ ب) $\sqrt{(1394)^2} = 1394$

ج) $\sqrt{(-3 + \sqrt{10})^2} = |-3 + \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$ د) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$
 منفی

تمرین

۱- اگر $a = 0/25$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

الف) $|-3\sqrt{5}|$ ب) $|7-5\sqrt{3}|$ ج) $|0+\sqrt{5}|$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$$|5-12| > 1 + \square$$

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a = -2$, $a = 0$ و $a = 2$ به دست آورید. آیا می‌توانید

عدد حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ **خیر**

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید : $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$

$$|a+b|+2|a-b-c| = \left| \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) \right| + 2 \left| \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) - 2\frac{1}{4} \right| = 1 + 2 \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = 1 + 2 \left| -\frac{1}{2} \right| = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$|-3\sqrt{5}| = -(-3\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} \quad , \quad |v-5\sqrt{3}| = |\sqrt{49}-\sqrt{20 \times 3}|$$

$$= |\sqrt{49}-\sqrt{75}| = -(\sqrt{49}-\sqrt{75}) = \sqrt{75}-\sqrt{49} = 5\sqrt{3}-7$$

منفی

$$v = \sqrt{49} \quad , \quad 5\sqrt{3} = \sqrt{20} \times \sqrt{3} = \sqrt{75} \Rightarrow v < 5\sqrt{3} \Rightarrow |v-5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3}-v$$

ج) $|0+\sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

پس $\square$ هر عدد کوچکتر از 4 می تواند باشد $\Rightarrow 4 > \square$

$$|5-12| > 1 + \square \Rightarrow v > 1 + \square$$

a	-2	0	2
$ a +a$	$2+(-2)=0$	0	$2+2=4$

$$a < 0 \Rightarrow |a|+a = -a+a = 0 \Rightarrow |a|+a \geq 0$$

$$a \geq 0 \Rightarrow |a|+a = a+a = 2a$$

$$\sqrt{a^2} = a \xrightarrow{a=v} \begin{cases} \sqrt{(-v)^2} = \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{(-v)^2} = -7 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2} \neq a$$

زیرا $\sqrt{2} > 1$ است و $\sqrt{2}-1 > 0$ است

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = -|1-\sqrt{10}| = -1+\sqrt{10} = \sqrt{10}-1$$

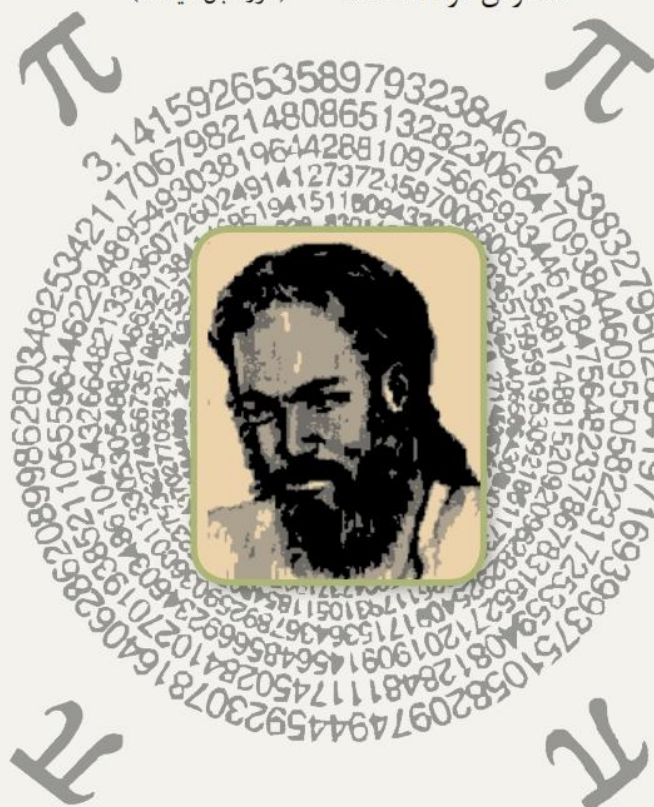
زیرا $\sqrt{10} > 1$ پس $1-\sqrt{10} < 0$ است



عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی