



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

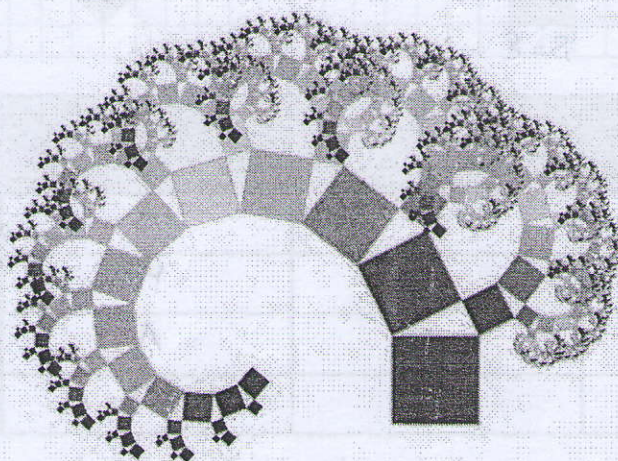
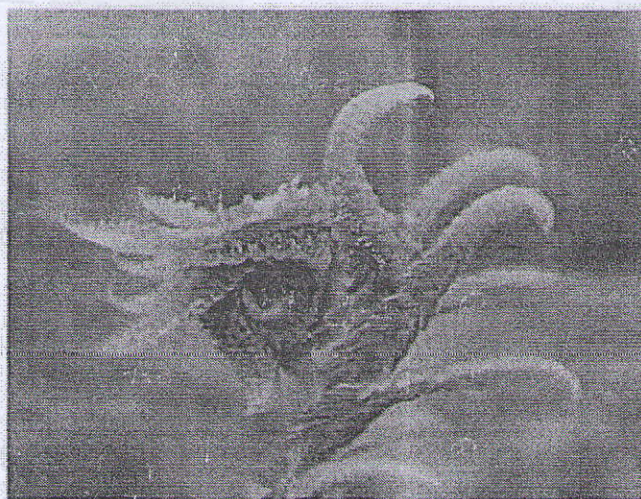
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

مثلث

فصل ۶

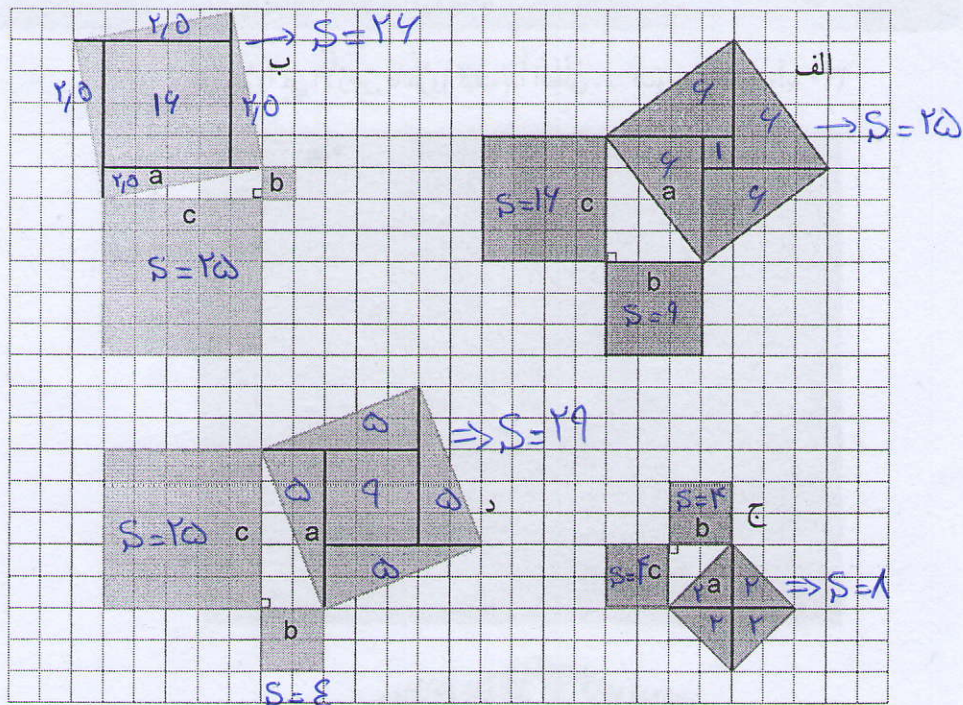
قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت آیه ۲۰)



خداوند در جهان هستی نشانه‌هایی خلق کرده است و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.



۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر): a^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2	
۲۵	۹	۱۶	الف
۲۴	۱	۲۳	ب
۸	۴	۴	ج
۲۹	۴	۲۵	د

بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

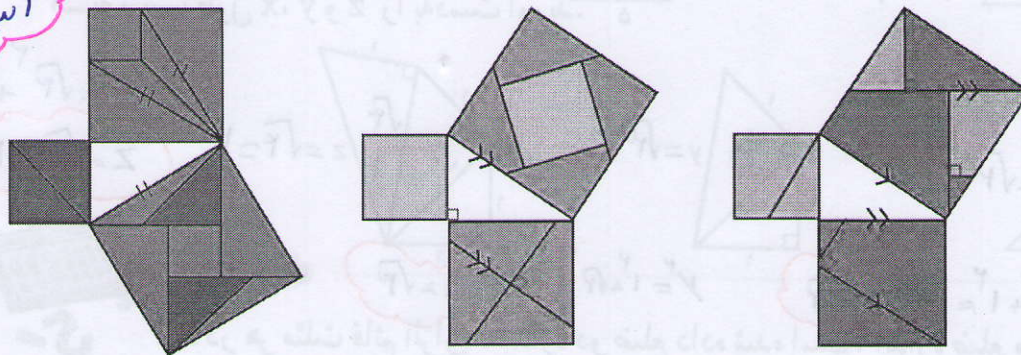
$$۲۵ = ۹ + ۱۶, ۲۴ = ۱ + ۲۳$$

$$۸ = ۴ + ۴, ۲۹ = ۴ + ۲۵$$

عدداول هر سطر برابر مجموع دو عدد دیگر همان سطر است

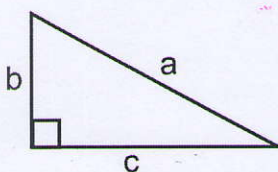
دست وری

اثبات شہودی



راہی فی شاخو رس

این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

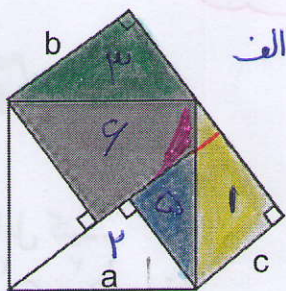
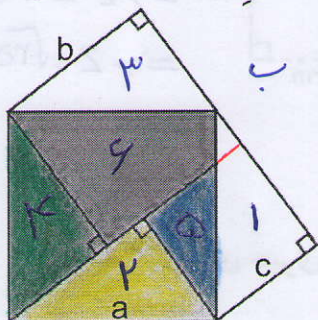


$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی‌دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم الزاویه
هم نهشت^۱ دیده می شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع‌های زاویه قائمه مثلث ساخته شده‌اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده‌ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

الف
در شکل الف داریم
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

ب
در شکل ب داریم
 $S = S_2 + S_4 + S_5 + S_6$

① $\rightarrow S_1 = S_2$

① $\rightarrow S_3 = S_4$

۵. مثلثی = دگرش الف $\rightarrow$ پس مجموع مساحت مربع‌ها را که روی دو ضلع زاویه قائمه خفته می‌شود با مساحت مثلثی که روی وتر ساخته می‌شود برابر است.

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{aligned} 7^2 + 5^2 &= 49 + 25 = 74 \\ 9^2 &= 81 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7^2 + 5^2 = 9^2$$

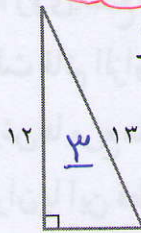
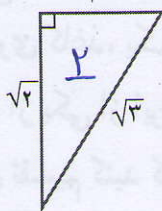
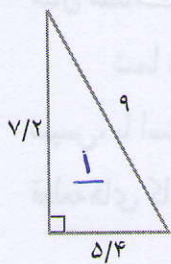
$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} 1^2 + \sqrt{2}^2 &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt{3}^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \\ 13^2 &= 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$$

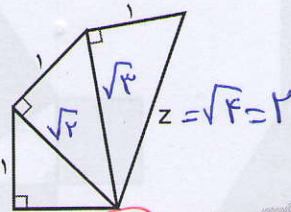
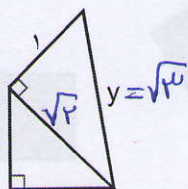
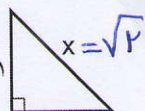
کار در کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر بررسی کنید.



۲- به ترتیب طول x , y و z را به دست آورید.



$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{2}^2 + 1^2 = 4 \\ z &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

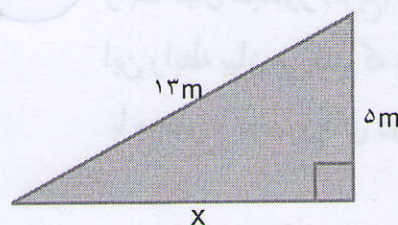
$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ y^2 &= 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3} \end{aligned}$$

فعالیت

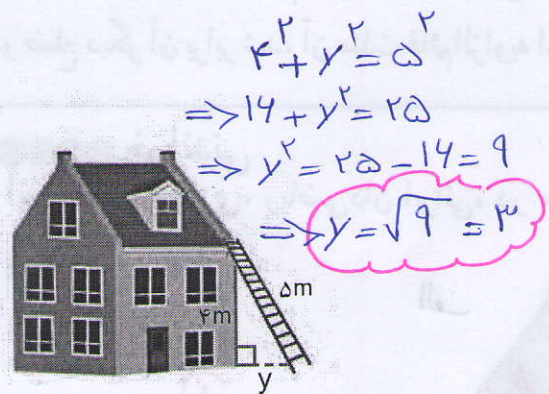


۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

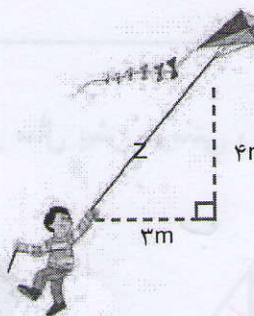
مانند نمونه پیدا کنید.



$$\begin{aligned} 13^2 &= x^2 + 5^2 \\ 169 &= x^2 + 25 \\ x^2 &= 169 - 25 = 144 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

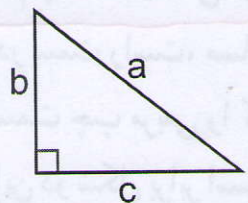


$$\begin{aligned} 4^2 + y^2 &= 25^2 \\ \Rightarrow 14 + y^2 &= 25 \\ \Rightarrow y^2 &= 25 - 14 = 9 \\ \Rightarrow y &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

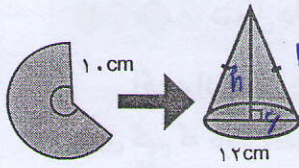


$$\begin{aligned} z^2 &= 25^2 - 14^2 \\ \Rightarrow z^2 &= 25 \\ \Rightarrow z &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$



کار در کلاس

۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی

به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

$$R = 12 \div 2 = 6$$

$$\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$$

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند.

در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های

آنها گفت‌وگو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

کلای

روش هندسی (حلزون)

مهسا:	سیم:	زهرا:
روش حسابی	روش هندسی	روش هندسی
به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم. $\sqrt{10} \approx 3.16$ حالا به کمک خط کش یک پاره خط به طول تقریباً 3.1 سانتی متر رسم می‌کنم.	مثلی قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می‌کنم. $1^2 + 3^2 = 10$ پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.	به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.

روش مهسا ساده $\Rightarrow$

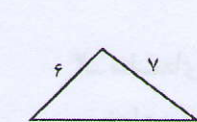
ولی به صورت تقریبی

است و از رقم‌های بعد

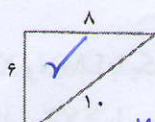
از صدم صرف نظر شده است

تمرین: روش خلاقیت (سخت)

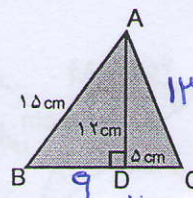
۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید. ۲- کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟



$$6^2 + 7^2 \neq 10^2$$



$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

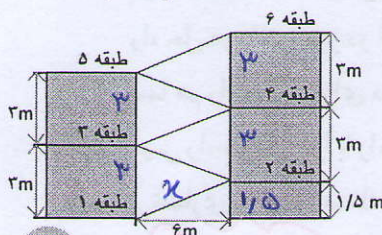


$$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 149$$

$$\Rightarrow AC = 13$$

$$BD^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$$

$$BC = 42$$



۳- شکل رو به‌رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را

نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه

بعدی می‌رساند، چقدر است؟

$$x^2 = 1.5^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 2.25 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{18.25} \approx 4.27$$

توجه: ابتدا فصل سوم کتاب هفتم مرور شود

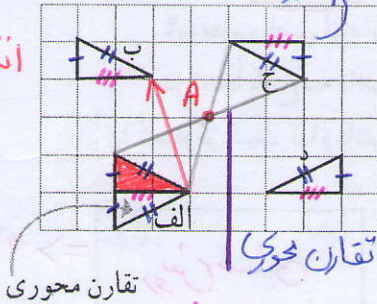
تعریف هم نهشتی

شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.

دوران 180° حول نقطه A

انتقال



خط تقارن

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

(دست ورزی) فعالیت

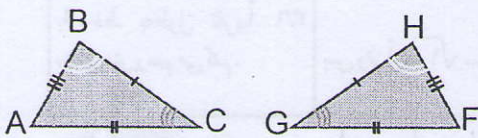


۱- در شکل روبه رو، مثلث های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده اند و با آن هم نهشت اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است. ضلع ها و زاویه های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند:

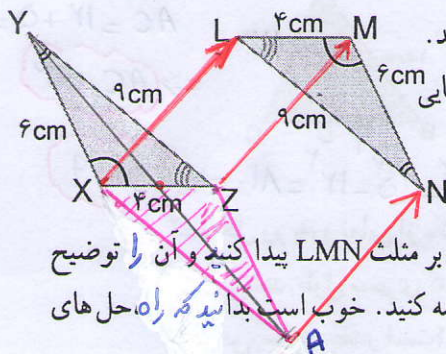
پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت های روی شکل ها، تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{F} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad \overline{AB} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{FG}$$



۳- مثلث های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت اند.

می خواهیم ببینیم مثلث XYZ با چه تبدیل یا تبدیلی

بر مثلث LMN منطبق می شود.

راه حل دو دانش آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح

دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های

درستی شماری برای این مسئله وجود دارد.

در دو مرحله



مرحله ۱ دوران حول وسط XZ مرحله ۲ انتقال با بردار $\vec{AN}$ نکته: می توانیم دوران را حول هر ضلع دیگر انجام دهیم و سپس باید انتقال مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کنیم

راه چهارم: (۱) مثلث XYZ را توسط بردار $\vec{XM}$ انتقال در دهیم
 (۲) مثلث انتقال یافته را با یک دوران 180° حول M بر مثلث $\triangle LMN$ منطبق می‌کنیم

ترتیب دوتبدیل

دست‌ورزی

راه حل حامد:

با یک دوران 180° حول نقطه X می‌توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.

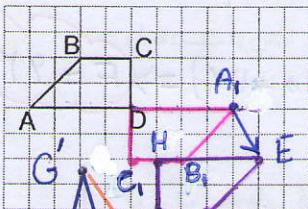
راه حل محمد:

با یک دوران 180° حول نقطه O می‌توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.

دوران حول نقطه X

دوران حول نقطه O به اندازه 180°

کار در کلاس

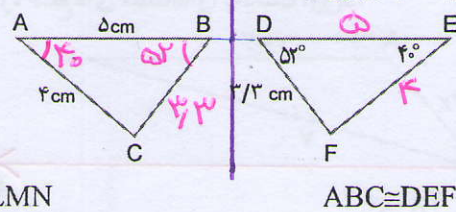


۱- تصویر دوزنقه ABCD را پس از دوران 180° حول نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید. سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید. شکل جدید را نام‌گذاری کنید و عبارت هم‌نهشتی شکل‌ها را کامل کنید.

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong EFGH$$

۲- با توجه به هم‌نهشتی شکل‌های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را

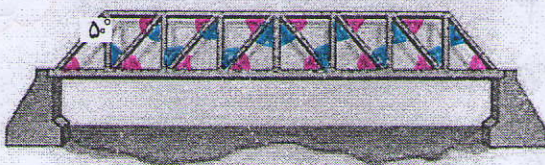
خط‌تقارن



$$GHIJ \cong KLMN$$

$$ABC \cong DEF$$

۳- دیواره‌های کنار پل از مثلث‌های قائم‌الزاویه هم‌نهشت ساخته شده‌اند.



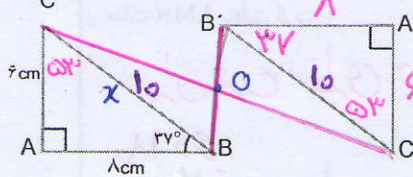
زاویه‌های مساوی را با علامت‌گذاری مشخص و اندازه هر یک از زاویه‌های یکی از مثلث‌ها را بنویسید.

$$\triangle = 40^\circ$$

$$\triangle = 50^\circ$$

دوران حول ۵ به اندازه ۱۸۰ درج

فعالیت



۱- در شکل مقابل $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = \sqrt{16 + 9} = 5$$

۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی

افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK

را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها

و زاویه‌ها معلوم است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی

را به دست آورید.

$$\hat{F} = 340 - (90 + 90 + 117) = 63 \Rightarrow F = 63$$

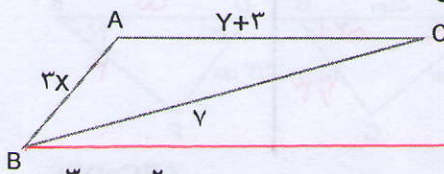
درباره رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال

استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

کلای

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



$$3x = x + 2$$

$$3x - x = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$AB = 3x = 3$$

$$A'B' = x + 2 = 3$$

$$AC = A'C' \Rightarrow$$

$$y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 1 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

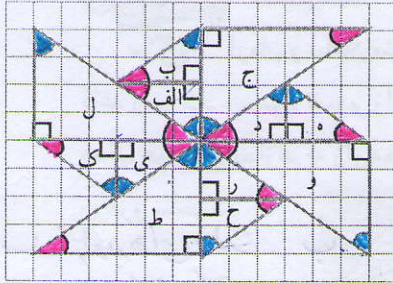
$$AC = 5, A'C' = 5$$

$$BC = B'C' \Rightarrow z = 7$$

مثلث ABC با

انتقال BB' بر روی مثلث $A'B'C'$ منطبق می‌شود

د → تقارن محوری → ه → دوران 180° → الف
 ک → تقارن محوری → ی → انتقال → ح → تقارن محوری → ه → دوران 180° → الف
 ی → تقارن محوری → ک → انتقال → الف
 و → دوران → ل → تقارن نسبت به ضلع کوچک زاویه قائمه و سپس انتقال → ط → دوران → ج



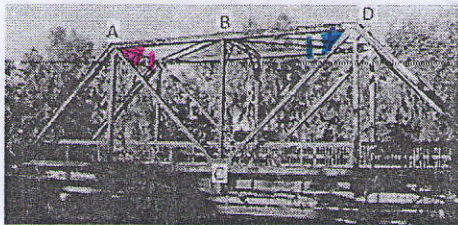
تمرین
 ۱- در شکل رو به رو زاویه های مساوی را با رنگ های یکسان مشخص کرده ایم. کدام مثلث ها با مثلث الف هم نهشت اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می توان مثلث الف را بر مثلث های هم نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ هایتان را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

جواب: مثلث های ب، ی، ک، ه، ح، و د با الف هم نهشت هستند

دوران 180° (الف) ← (ه)

تقارن انتقال (الف) ← (ب) ← (د)

۲- سازه های مثلثی که در این پل به کار رفته اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می شوند.



می دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

(الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع BC است؟ $\hat{A}_1$

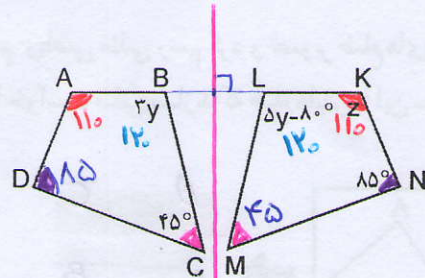
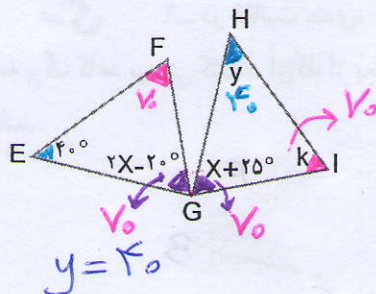
(ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع BC است؟ $\hat{D}_1$

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه $\hat{A}$ متناظر است؟ $\hat{D}_1$

۳- زاویه های مجهول را بیابید.

(الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

(ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$$2x - 20 = x + 25$$

$$x = 45$$

$$\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow K = 180 - (70 + 45)$$

$$\Rightarrow K = 70$$

$$3y = 5y - 10$$

$$\Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow 40 = y$$

$$\hat{B} = \hat{L} = 120$$

$$Z = 360 - (120 + 120 + 45) = 115$$

مثلث های هم نهشت

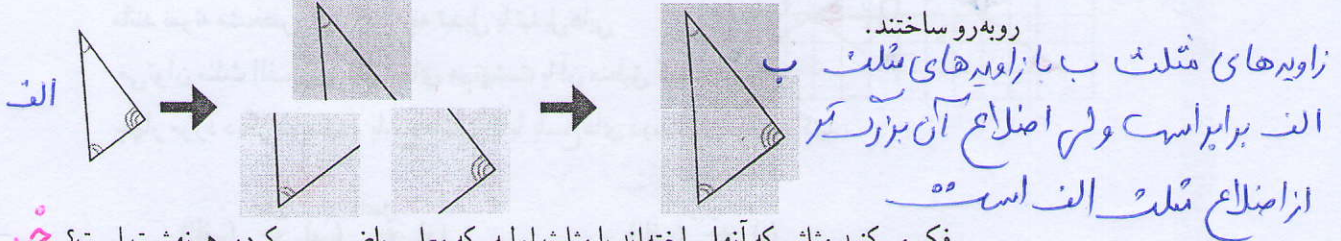
فعالیت



نتیجه: با مساوی بودن سه زاویه می توان هم نهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت

آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب

رو به رو ساختند.



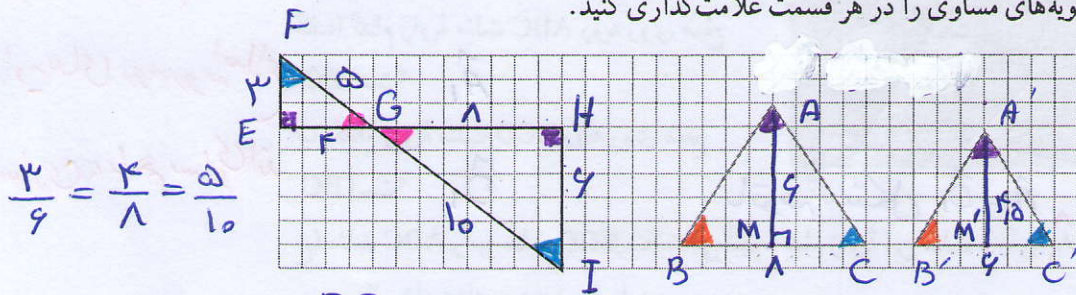
فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟ آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟

خیر (در کتاب و نتایج)

کار در کلاس



۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{C} &= \hat{C}' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

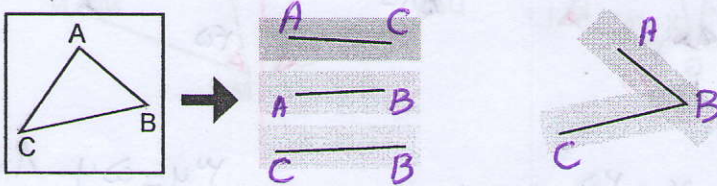
$$\frac{4}{6} = \frac{6}{10} \Rightarrow$$

فعالیت



$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AM}{A'M'}$$

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشد.

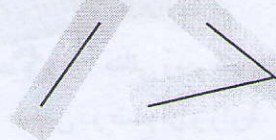


۹۳

نتیجه: اگر اضلاع دو مثلث تطبیق پذیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت آن دو مثلث هم نهشت می باشند

سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :

مرحله اول



مرحله دوم



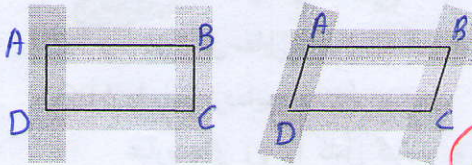
آرمان مطمئن بود مثلی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید : « فکر می کنی اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل

حتماً با یکدیگر هم نهشت اند؟ »

آرمان گفت : « نه، من می گویم اگر ضلع های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع هایشان مساوی است، با یکدیگر هم نهشت نیستند. »

سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



تعریف میان

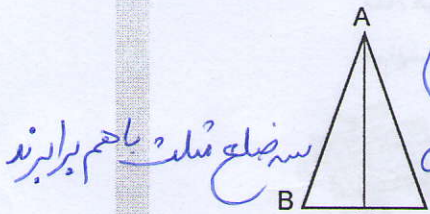
کار در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. پاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند میانه می نامیم.

عبارت های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

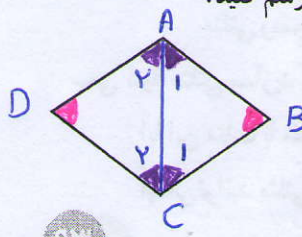
$AB = AC$ چون ساق های مثلث متساوی الساقین ABC هستند.
 $BM = CM$ چون AM میانه می باشد (M وسط BC است)



AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.
 $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ چون

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.



ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

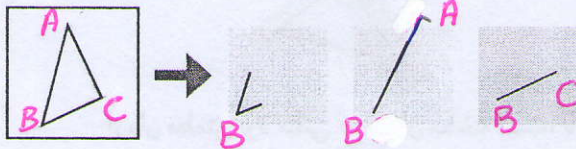
ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

ب) چون چهارضلعی ABCD لوزی است

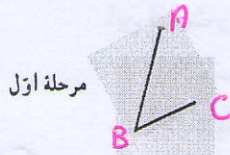
پس ضلع های دو مثلث با هم برابر می باشند

$$A_1 = A_2 = C_1 = C_2, B = D$$

اصلاح شود (اندازه AB اشتباه است)

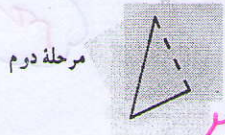


مثلی رسم کنید.
سپس دو ضلع آن و زاویه
بین آن دو ضلع را روی سه برگ
کاغذ پوستی بکشید.



اکنون سعی کنید مثلی بسازید که دو ضلع آن با این
دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم
برابر زاویه رسم شده باشد.

کلاسی توضیح داده شود
بله

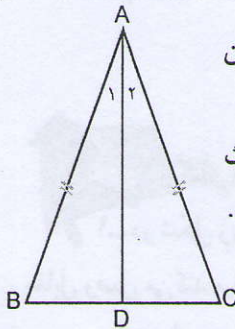


آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟
آیا با این شرایط می توانید مثلی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

کار در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبه رو به قاعده مثلث متساوی الساقین
ABC را رسم کرده ایم.



عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث
ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.
چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیمساز است.

مثلث ABC متساوی الساقین است

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. چون دو ضلع و زاویه بین آن دو از این دو مثلث

$$ABD \cong ACD \quad \text{برابرند پس}$$



مثلی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.
سعی کنید مثلی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

آیا می توانید مثلی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

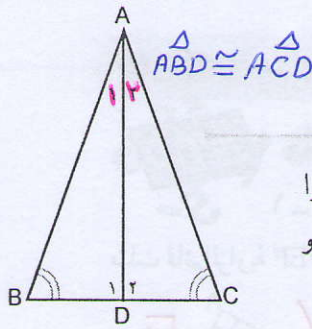
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ طبق فرض

چون AD نیم سازه است

کار در کلاس: چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ مجموع سزاویہی $\hat{C}$ و $\hat{A}_2$ و $\hat{D}_2$ برابر 180° است و مجموع سزاویہی $\hat{B}$ و $\hat{A}_1$ و $\hat{D}_1$ هم برابر 180° است پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

(۲) ضلع AD بین هر دو مثلث مشترک است

(۳) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیم سازه است



طبق دوازویہ و ضلع بین دایم



در شکل مقابل زاویہهای B و C با هم برابرند و نیمساز زاویہ A را رسم کرده ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویہ برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

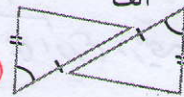
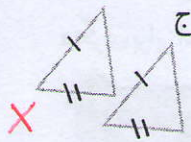
سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

- برابری سه ضلع
 - برابری دو ضلع و زاویہ بین
 - برابری دو زاویہ و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض)

تمرین

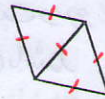


۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویہهای مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت



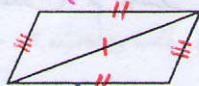
۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره خط‌ها، زاویہها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

(زا، ض، ض، ض)، (ض، ض، ض، ض)



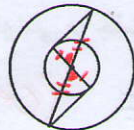
الف) هر دو مثلث متساوی الاضلاع‌اند.

(ض، ض، ض، ض)



ب) قطر متوازی الاضلاع رسم شده است.

(ض، ض، ض، ض)، (زا، ض، ض، ض)، (ض، ض، ض، ض)



ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

(ض، ض، ض، ض)

۳- شکل روبه‌رو کدام نسبت را نمایش می‌دهد؟

اگر دو زاویہ و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویہ و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند،

الف) دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند.

ب) ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

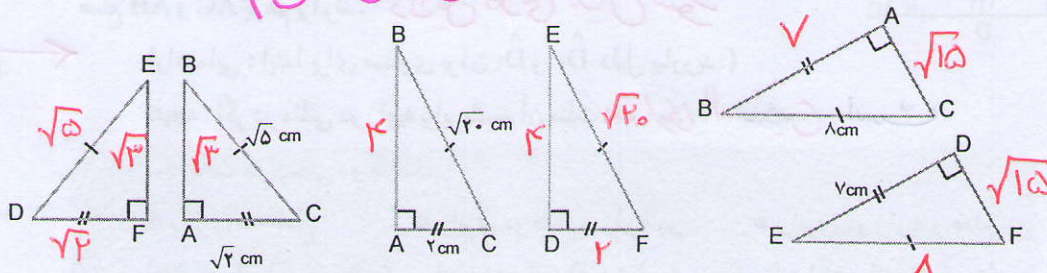


هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه

فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است. ← (ض، ض، ض)



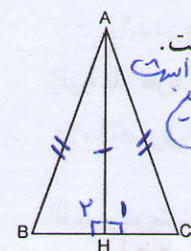
اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟ **بله**
آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بله (ض، ض، ض) یا (ض، ز، ض)**

۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه

دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بله**

از رابطه فیثاغورس ضلع سوم را هم بدست می آوریم در نتیجه سه ضلع دو مثلث با هم **کارد در کلاس**



۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.

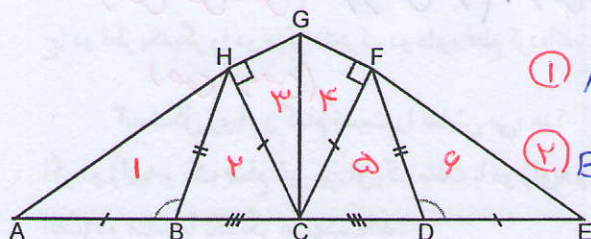
چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟

① $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ② $AB = AC$ چون ABC متساوی الساقین است

③ AH ضلع مشترک پس به حالت وتر و یک ضلع می توانیم بگوییم دو مثلث هم نهشت می باشند $\triangle ABH \cong \triangle ACH$

۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



① $\triangle ABH \cong \triangle FDE$ (ض، ز، ض)

② $\triangle BHC \cong \triangle DFC$ (ض، ض، ض)

وتر و یک ضلع زاویه قائم $\triangle CGH \cong \triangle CGF$

③ $\triangle FCE \cong \triangle HCA$ ← از قسمت ① و ② داریم (وض)

حالت (ض، ض، ض)، (ض، ز، ض)، (ز، ز، ز)

(وز) و (وض)

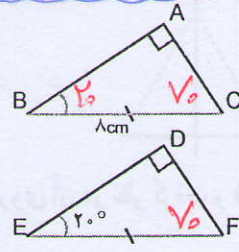
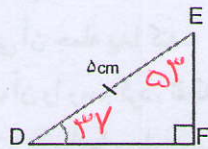
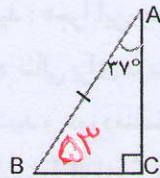
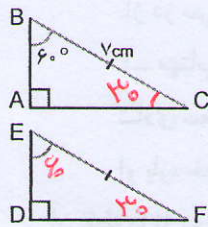
فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه

تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

(از من ز)



زاویه دیگر هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بله**، به حالت دو زاویه و ضلع بین آن دو

۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری

برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بله**، در این حالت می توانیم ثابت کنیم زاویه سوم نیز مساوی است پس به حالت دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

(از من ز) دو مثلث هم نهشت می باشند

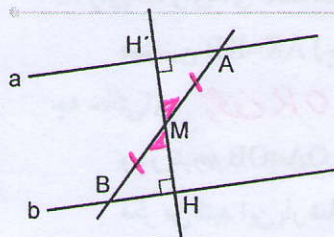
• برابری وتر و یک زاویه تند

• برابری وتر و یک ضلع

یا به اختصار (وز)

یا به اختصار (وض)

کارد در کلاس



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده ایم. **کلاسی**

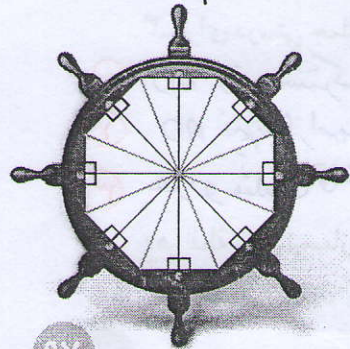
دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)

۲- در شکل روبه رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی اند. **کلاسی**

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)

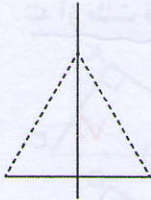


نیاز به دلیل آوردن

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند :



«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»

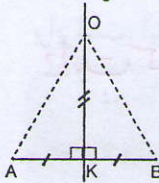
شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟

۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

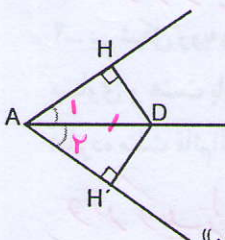
O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟)»

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در

چه حالتی؟) «چون OK منصف AB است - (ض: عرضی)»

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟) «چون دو مثلث هم نهشت هستند»

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟



۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید :

① AD وتر مشترک هر دو مثلث است

② AD نیم سازه است پس داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

③ هر دو مثلث قائم الزامی باشند

«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

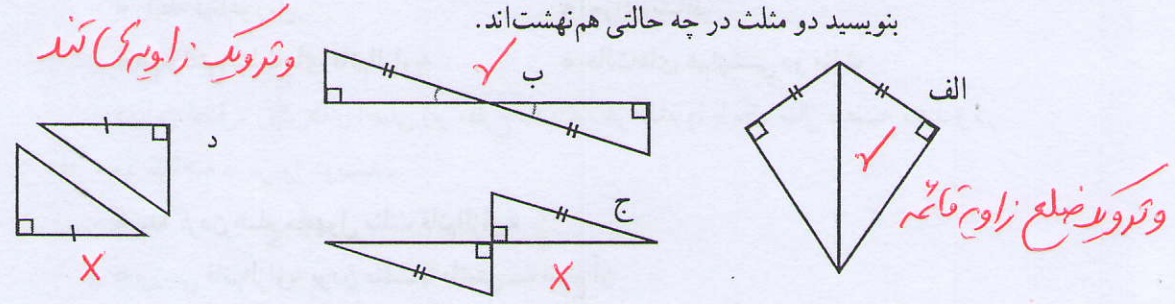
۹۸

نتیجه می گیریم به حالت وتر و دو زاویه تند دو مثلث هم نهشت می باشند ①, ②, ③

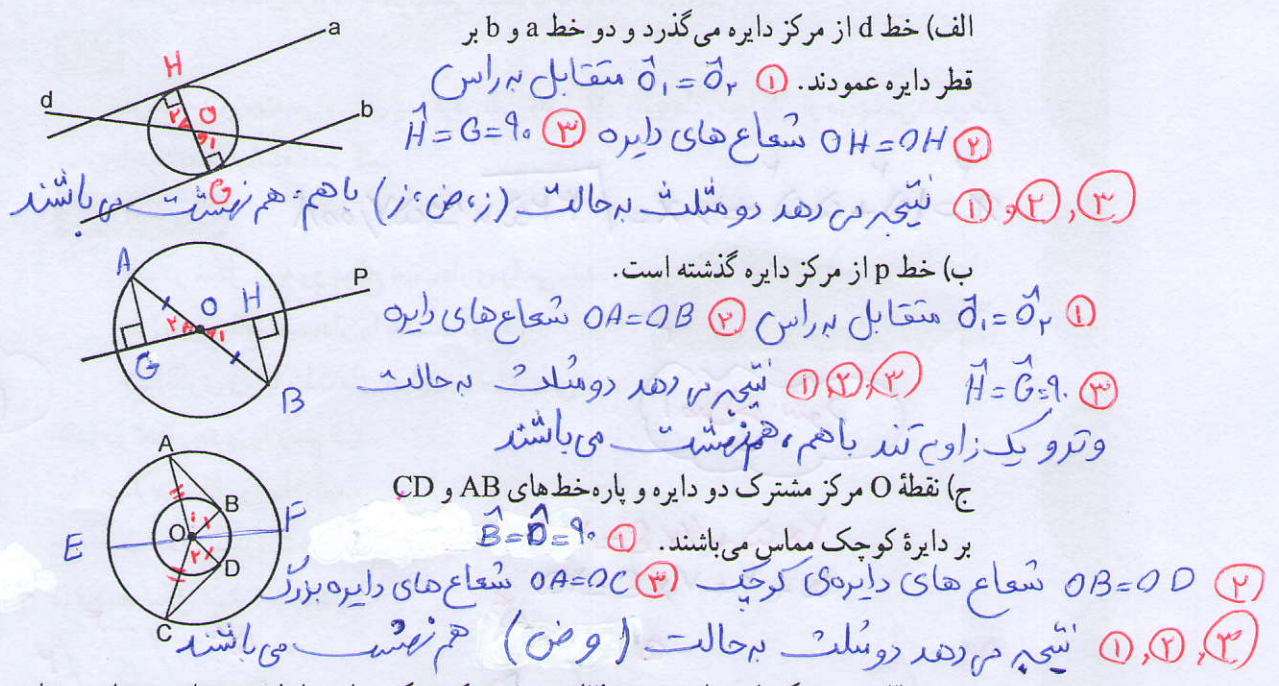
$1+n3 = n3 + 5 \times 2 = 10$ ← مثال ۱
 $7+n3 = n3 + 7 + 5 = 12$ ← مثال ۲



۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم‌نهشت‌اند.



۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.



۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

الف ← دوران 180° نسبت به نقطه O
 ب ← دوران 180° نسبت به نقطه O
 ج ← تقارن نسبت به قطر EF

در شکل n ام رابع

$$n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 2 \times 5 + 4n = 4n + 10$$

$$n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 5 + 2 + 4n = 4n + 7$$

مرور فصل ۶

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

• اجزای متناظر

• رابطه فیثاغورس

• حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث

• هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

• پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه

• بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن

• نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت

• هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین

• هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع

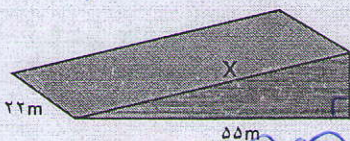
• حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

$$x^2 = 15^2 + 55^2 \Rightarrow x = \sqrt{3250} \approx 57.001$$

تمرین‌های ترکیبی



۱- در شکل روبه‌رو سطح شیب‌داری را می‌بینید.

طول این سطح شیب‌دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

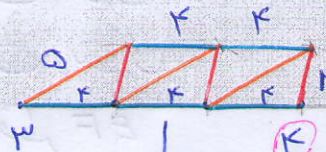
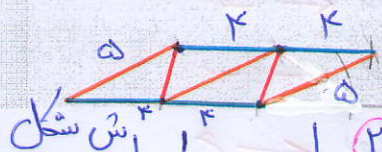
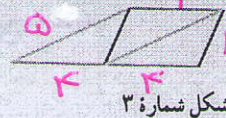
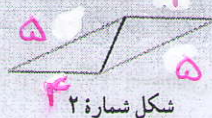
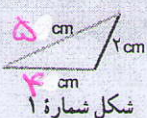
اصلاح شود

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟



شکل	۱	زوج ۲	۳	زوج ۴	۵
محيط	$5 + 4 + 3 = 12$	$2 \times 5 + 2 \times 4 = 18$	$5 + 3 \times 4 + 2 = 19$	$2 \times 5 + 4 \times 4 = 24$	$5 + 2 + 5 \times 4 = 27$