



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

نمونه سوال  گام به گام 

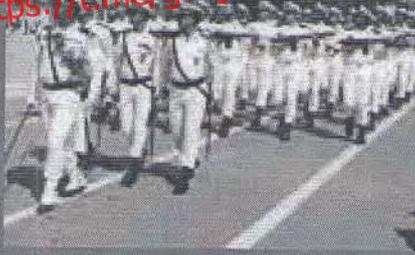
امتحان نهایی  جزوه 

دانلود آزمون های آزمایشی 

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

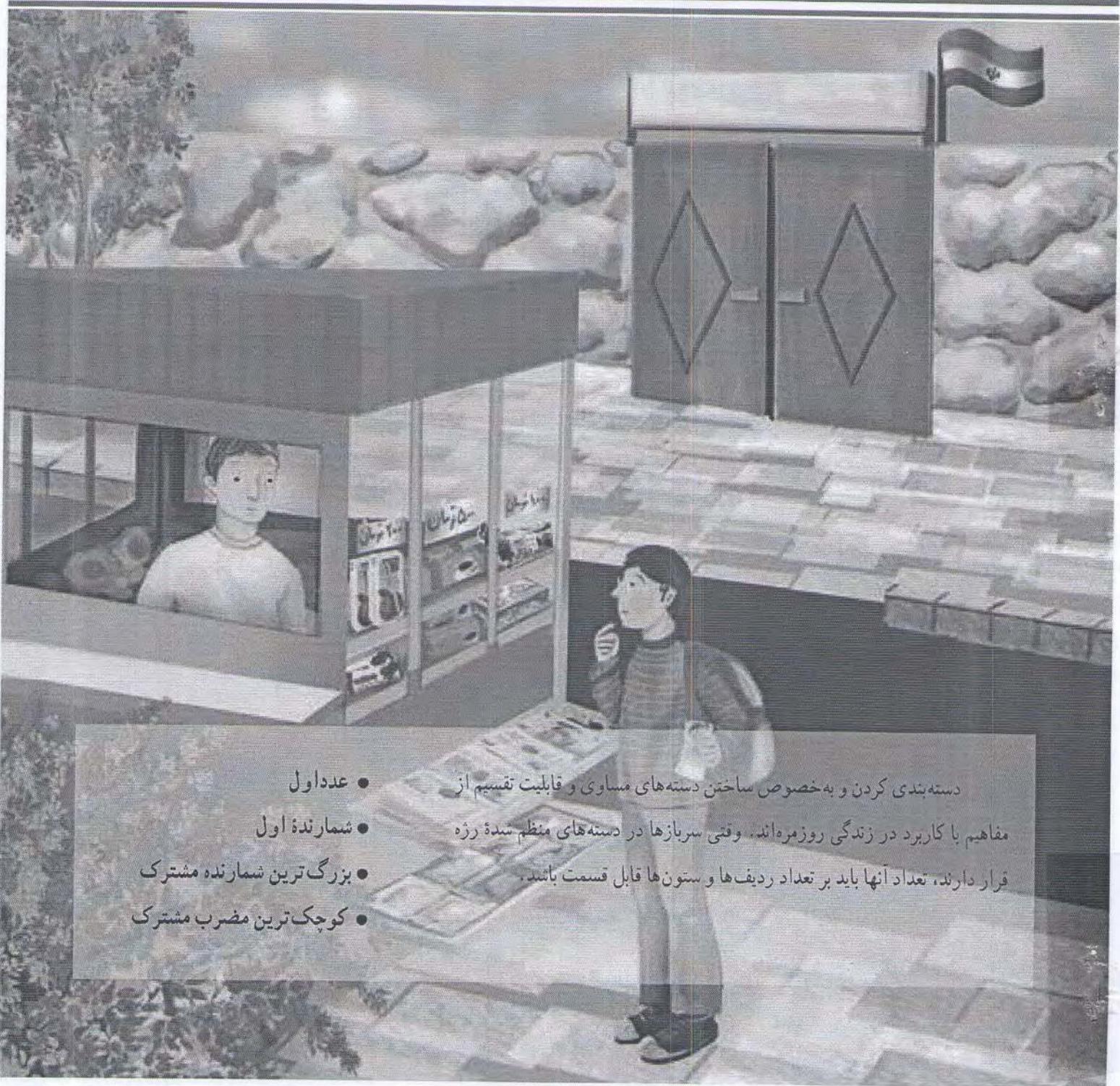
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



فصل ۶

شمارنده‌ها و اعداد اول



- دسته‌بندی کردن و به‌خصوص ساختن دسته‌های مساوی و قابلیت تقسیم از
- مفاهیم با کاربرد در زندگی روزمره‌اند. وقتی سربازها در دسته‌های منظم شده رژه
- قرار دارند، تعداد آنها باید بر تعداد ردیف‌ها و ستون‌ها قابل قسمت باشند.
- عدد اول
- شمارنده اول
- بزرگ‌ترین شمارنده مشترک
- کوچک‌ترین مضرب مشترک

۱- دانش آموزان یک مدرسه در کلاس های ورزشی ثبت نام کرده اند. جدول تعداد ثبت نام شده ها و تعداد نفرات هر تیم در آن رشته در جدول زیر مشخص شده است. در کدام رشته ورزشی تعداد ثبت نام شده ها مناسب است؟ چرا؟
 در کدام رشته تعداد ثبت نام شده ها مناسب نیست؟ چرا؟ ثبت نام در تیم های زیر جزء والیبال مناسب نیست و هم وضع در تیم فوتبال ضعیف تر است

رشته ورزشی	فوتسال	والیبال	بسکتبال	پینگ پنگ	بدمینتون
تعداد ثبت نام شده ها	۲۱	۱۲	۱۳	۹	۷
تعداد نفرات هر تیم	۱۲	۶	۵	۲	۲

بالای ۲ مناسب

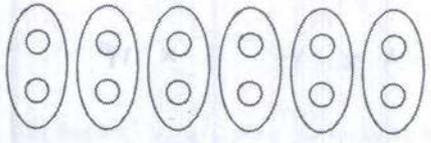
با کمترین جابه جایی نفرات، پیشنهادی ارائه کنید تا تعداد نفرات تمام رشته ها مناسب شوند.
 ۲- عدد ۶ را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بنویسید و معنی کنید.

معنی دو دسته ۳ تایی $6 = 2 \times 3$ سه دسته ۲ تایی $6 = 3 \times 2$
 معنی دو دسته ۴ تایی $6 = 1 \times 4$ یک دسته ۶ تایی $6 = 4 \times 1$

۳- عدد ۱۰ را مانند نمونه تقسیم کنید و یک تساوی بنویسید و آن را معنی کنید. (تقسیم ها نباید باقی مانده بیاورند).
 یعنی ۱۰ را می توان ۲ تا ۲ تا شمرد

$10 \div 2 = 5$
 $10 \div 5 = 2$
 $10 \div 1 = 10$
 $10 \div 10 = 1$

۴- دایره را مانند نمونه به دسته های مساوی تقسیم کنید. یعنی مشخص کنید ۱۲ را چند تا چند تا می شود شمرد. به این ترتیب شماره های عدد ۱۲ به دست می آید.



۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ : شماره های ۱۲

فعالیت دست و زری

اطلاع نمود

۱- با یکی از روش های بالا شماره های هر عدد را مشخص کنید.

- شماره های ۱۴ : ۱، ۲، ۷، ۱۴
- شماره های ۱۵ : ۱، ۳، ۵، ۱۵
- شماره های ۹ : ۱، ۳، ۹
- شماره های ۸ : ۱، ۲، ۴، ۸

۲- عدد ۲، شماره ۴ هست. ۴ هم شماره ۱۲ است. آیا می توان نتیجه گرفت که ۲ شماره ۱۲ هم هست؟ چرا؟ بله
 a شماره ۲ هست و b شماره ۴ هست c است a شماره ۱۲ است
 ۳- به طور کلی اگر a شماره b باشد، b هم شماره a باشد، آیا می توان نتیجه گرفت که a شماره c هم هست؟ چرا؟

کلاسی

آری

۱- جدول زیر را کامل کنید. شمارنده‌های عدد را از کوچک به بزرگ بنویسید.



با دیدن این جدول چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

عدد بید شمارنده همه اعداد است.

کوچک‌ترین شمارنده هر عدد بید است.

بزرگ‌ترین شمارنده هر عدد خود آن عدد است.

همه شمارنده‌های یک عدد آن عدد می‌شمارد

بعضی از عددها فقط دو شمارنده دارند

هر عدد بزرگ‌تر از ۱ حداقل دو شمارنده دارد.

اصلاح

عدد	شمارنده‌های عدد			
۹	۱	۳	۹	
۱۵	۱	۳	۵	۱۵
۴	۱	۲	۴	
۱۴	۱	۲	۷	۱۴
۵	۱	۵		
۱۳	۱	۱۳		

۲- برای عدد ۷ از روش‌های ضرب یا تقسیم کردن یا دسته‌بندی استفاده کرده و شمارنده‌های آن را پیدا کنید.

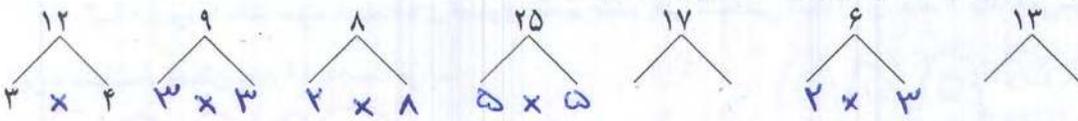


اعداد اول

به عددهایی مثل ۵، ۱۳ و ۷ که فقط ۲ شمارنده دارند و آن دو شمارنده عدد یک و خود آن عدد می‌باشد،

عدد اول می‌گویند.

۱- مانند نمونه عددها را به حاصل ضرب دو عدد غیر از یک بنویسید.



کدام عددها را نمی‌توان به صورت ضرب دو عدد غیر از یک نوشت؟ ۱۳ و ۱۷

آیا می‌توان گفت هر عددی که به صورت ضرب دو عدد، بزرگ‌تر از یک نوشته شود، اول نیست؟ آری

۲- با قاعده‌های بخش‌پذیری بر ۲، ۳، ۵ که در دبستان آموخته‌اید و یا روش‌های بالا، مشخص کنید کدام یک از عددهای

طبیعی کمتر از ۳۰، اول هستند. دور آنها را خط بکشید. عددهایی را که اول نیستند، به صورت بالا با ضرب دو عدد غیر از یک

نشان دهید

با شیخ بازمس

۱	(۲)	(۳)	۴ ۲x۲	(۵)	۶ ۲x۳	(۷)	۸ ۲x۴	۹ ۳x۳	۱۰ ۲x۵
(۱۱)	۱۲ ۲x۶	(۱۳)	۱۴ ۲x۷	۱۵	۱۶ ۴x۴	(۱۷)	۱۸ ۲x۹	(۱۹)	۲۰ ۵x۴
۲۱ ۳x۷	۲۲ ۲x۱۱	(۲۳)	۲۴ ۲x۱۲	۲۵ ۵x۵	۲۶ ۲x۱۳	۲۷ ۳x۹	۲۸ ۲x۱۴	(۲۹)	۳۰ ۳x۱۰

کار در کلاس

۱- آیا عدد ۱۷ شمارنده ۲۴۷ هست؟ چرا؟ خیر، چون عدد طبیعی وجود ندارد که در ۱۷ ضرب شود حاصل ۲۴۷ شود

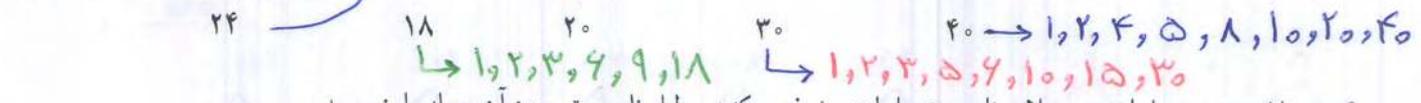
۲- آیا اگر عددی بر ۳ بخش پذیر بود، می توان گفت که ۳ شمارنده آن است؟ بلی

۳- ۴ عدد بنویسید که ۵ شمارنده آنها باشد. ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۵

عددی بر ۱۵ بخش پذیر است

۴- کدام یک از عددهای روبه رو بر ۱۵ بخش پذیر است؟ چرا؟ ۳۶۰، ۵۵۵، ۹۲۴، ۳۴۵ که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشند

۵- تمام شمارنده های عددهای زیر را بنویسید. ۲۰، ۱۰، ۵، ۴، ۲، ۱



۶- جملات درست را با ✓ و جملات نادرست را با × مشخص کنید. دلیل نادرست بودن آن جمله را بنویسید.

✓ - عدد ۲۹ اول است. فقط دو شمارنده دارد. \times - هر عدد حداقل ۲ شمارنده دارد. عدد یک فقط یک شمارنده دارد

\times - تمام عددهای اول، فرد هستند؛ چون اگر زوج باشند، عدد ۲ شمارنده آنها می شود. عدد ۲ زوج است ولی اول است

✓ - اگر عددی غیر از خودش و یک شمارنده دیگری داشت، حتماً اول نیست. چون پس از دو شمارنده دارد

۷- در کلاس ۴ گروه ۳ نفره و ۶ گروه ۴ نفره وجود دارد. دانش آموزان این کلاس را در چند حالت می توان به گروه هایی با تعداد مساوی که تعداد نفرات هر گروه بین ۲ و ۷ نفر باشند، تقسیم کرد؟

نفر $3 \times 4 = 12$ ۱۲ گروه سه نفره
 $4 \times 3 = 12$ ۹ گروه چهار نفره
 $6 \times 2 = 12$ ۶ گروه شش نفره

۸- وقتی می نویسیم $3 \times 6 = 18$ ، آیا می توان نتیجه گرفت که هم ۳ و هم ۶ شمارنده های ۱۸ هستند؟ چرا؟

بلی - چون ۱۸ را می توان 3×3 و 3×6 و 2×9 شمارش کرد

آیا می توان نتیجه گرفت که همیشه تعداد شمارنده های یک عدد زوج است؟ خیر مثال ۹

۹- آیا حاصل ضرب دو عدد اول می تواند عددی اول باشد؟ چرا؟ خیر چون عدد حاصل را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد بزرگ تر از یک نوشت

۱۰- هر عبارت را کامل کنید.

- مجموع دو عدد طبیعی فرد همیشه عددی زوج است.

- مجموع دو عدد طبیعی زوج همیشه عددی زوج است.

- مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد همیشه عددی فرد است.

پس از تکمیل کردن جمله های فوق (می توانید با حدس و آزمایش جمله ها را کامل کنید.) به سؤال زیر پاسخ دهید.

- آیا حاصل جمع دو عدد اول همواره یک عدد اول می باشد؟ خیر غیر اول اول اول $3 + 5 = 8$

شمارنده اول

فعالیت

۱- تمام شمارنده‌های عددهای زیر را بنویسید.

شمارنده‌های ۱۲: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲

شمارنده‌های ۳۵: ۱, ۵, ۷, ۳۵

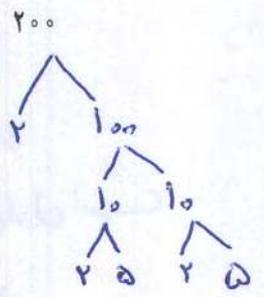
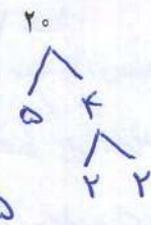
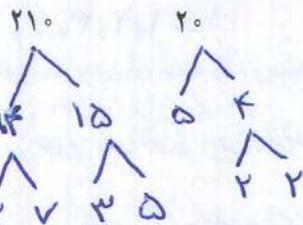
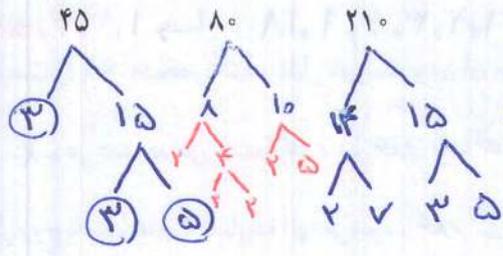
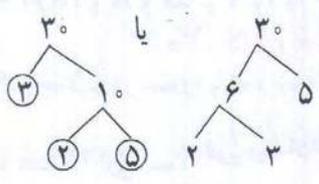
شمارنده‌های ۱۴: ۱, ۲, ۷, ۱۴

شمارنده‌های ۹: ۱, ۳, ۹

در هر قسمت، زیر شمارنده‌هایی که عدد اول هستند، خط بکشید.

شمارنده‌های اول ۳۵ چه عددی‌اند؟ ۷ و ۵
شمارنده اول عدد ۹ چه عددی است؟ ۳

۲- مانند نمونه هر عدد را به صورت ضرب دو عدد بنویسید. این کار را آن قدر ادامه دهید تا به شمارنده‌های اول آن عدد برسید.



۳- با توجه به نمودارهای درختی بالا می‌توان عددها را به صورت ضرب عددهای اول نوشت:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

شمارنده‌های اول عددهای اولی هستند که با استفاده از حاصل ضرب و تکرار آنها، می‌توان عددهای مختلفی را به دست آورد.

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

با شمارنده‌های اول (۲ و ۳) عددهای مختلف را با ضرب کردن بسازید. مانند نمونه‌ها بنویسید.

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

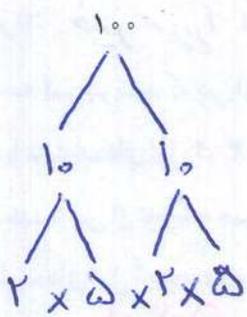
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

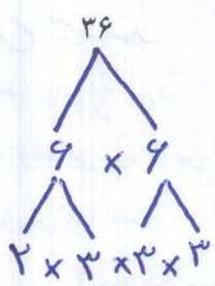
ویژگی عددهای به دست آمده این است که شمارنده‌های اول آنها عددهای ۲ و ۳ هستند.

کار در کلاس

شمارنده‌های اول عددهای زیر را با رسم نمودار درختی پیدا کنید و آنها را به صورت ضرب شمارنده اول بنویسید.



100 = 2 x 2 x 5 x 5



36 = 2 x 2 x 3 x 3



8 = 2 x 2 x 2

۱- در دوره دبستان آموختید که چگونه کسرها را ساده کنید. به مثال‌های زیر توجه کنید.

4/6 = (2x2)/(2x3) = 2/3

18/27 = (2x9)/(3x9) = 2/3

با تجزیه کردن، عددهای صورت و مخرج، کسرها را تا حد امکان ساده کنید. در واقع شمارنده‌های مشترک صورت و مخرج را ساده کنید.

20/50 = (2x2x5)/(2x5x5) = 2/5

28/42 = (2x2x7)/(2x3x7) = 2/3

81/32 = (3x3x3x3)/(2x2x2x2x2) = 81/32

۲- مساحت یک مستطیل که طول و عرض آن عددهای طبیعی اند ۱۸ شده است. تمام حالت‌هایی را که طول و عرض

- 1 x 18 = 18
- 2 x 9 = 18
- 3 x 6 = 18

مستطیل می‌توانند داشته باشند، بنویسید. طول و عرض این مستطیل چه ارتباطی با مساحت آن دارند؟ ^{شمارنده‌های عدد ۱۸} می‌باشند

۱- شمارنده‌های اول صورت یک کسر ۲ و ۳ هستند. شمارنده‌های اول مخرج آن کسر ۵ و ۷ هستند. آیا این کسر ساده می‌شود؟ چرا؟

خیر - زیرا از بزرگترین نیستند

$$\frac{21}{35}, \frac{4}{10}, \frac{9}{15}$$

۲- سه کسر بنویسید که پس از ساده شدن برابر $\frac{3}{5}$ شود.

۳- با شمارنده‌های اول ۲ و ۳ چند عدد تولید می‌شود که بین ۳۰ و ۵۰ باشد؟ ۴۸، ۳۶، ۳۳

۴- عدد a پس از تجزیه به صورت مقابل درآمده است. $a = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

شمارنده‌های اول آن چه عددی‌اند؟ ۴ شمارنده این عدد را بنویسید که اول نباشند. ۱، ۴، ۶، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۶، ۴۸

۵- عدد b پس از تجزیه به صورت مقابل درآمده است. $b = 4 \times 3 \times 15 \times 6$

شمارنده‌های اول آن چه عددی‌اند؟ ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۹۰

۶- عددهای زیر را با رسم نمودار درختی تجزیه کرده و شمارنده‌های اول آنها را مشخص کنید.

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \quad 297 = 3 \times 3 \times 3 \times 11 \quad 104 = 2 \times 2 \times 2 \times 13$$

۷- عددهای ۷ و ۵ و ۱۳ اول هستند. شمارنده‌های اول آنها را بنویسید. براساس آن تعریف دیگری برای عددهای اول ارائه کنید.

۸- جملات درست را با \checkmark و نادرست را با \times مشخص کنید. دلیل نادرستی را توضیح دهید.

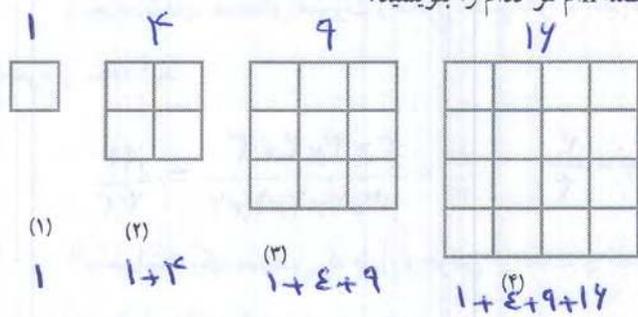
\times الف) تمام عددها شمارنده اول دارند. عددی شمارنده اول ندارد. اعدادی که اول باشند و گویا و زوج باشند.

\checkmark ب) اگر عددی زوج باشد یکی از شمارنده‌های اولش ۲ است.

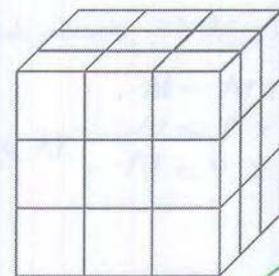
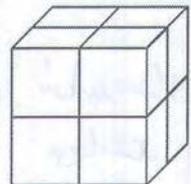
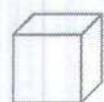
\times ج) هیچ عددی پیدا نمی‌شود که ۵ شمارنده اول داشته باشد. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$

\checkmark د) تعداد عددهای اول بی‌پایان‌اند.

۹- الگوهای شکل‌ها را به الگوهای عددی تبدیل کنید. جمله nام هر کدام را بنویسید.



رابطه‌ی یک: $n \times n = n^2$ (مجموعی nام)
 رابطه‌ی دوم: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ (مجموعی nام)



۷۹

(۱) ۱

(۲) ۸

(۳) ۲۷

رابطه‌ی اول: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (مجموعی nام)

رابطه‌ی دوم: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (مجموعی nام)



۱- قرار است دانش آموزان سال اول یک مدرسه به اردو بروند. آنها می خواهند در اردو چادر بزنند. تعداد افراد چادرها باید مساوی باشند. کلاس اول الف ۳۰ دانش آموز دارد. در این کلاس از چادرهای چند نفره می توان استفاده کرد؟ چرا؟
شمارنده های ۳۰: ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰

چون این اعداد ۳۰ را شمارنده و باقیمانده ی تقسیم عدد ۳۰ بر آنها برابر صفر است و چادرها به صورت مساوی برمی شود

کلاس اول ب، ۳۶ دانش آموز دارد. برای این کلاس چه چادرهایی می توان

بر پا کرد؟ چرا؟
شمارنده های ۳۶: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶

زیرا در تقسیم ۳۶ بر این اعداد باقی مانده صفر می شود و چادرها به صورت مساوی برمی شود

۱, ۲, ۳, ۶

اگر قرار باشد یک نوع چادر، برای هر دو کلاس تهیه کنیم، چادرهای چند نفره مناسب است؟ چرا؟
چون در تقسیم ۳۰، ۳۶ بر این اعداد باقی مانده صفر می شود و چادرها به صورت مساوی برمی شود
اگر قرار باشد از چادر مشترک برای دو کلاس استفاده شود و تعداد دانش آموزان یک چادر بیشترین تعداد باشد تا چادر

کمتری تهیه شود، چادر چند نفره مناسب است؟ ۶ نفره

۲- دو عدد ۲۴ و ۱۸ را در نظر بگیرید. می خواهیم بزرگ ترین شمارنده مشترک دو عدد را پیدا کنیم.
امید از روش زیر استفاده کرد:

شمارنده های مشترک دو عدد = { ۱, ۲, ۳, ۶ }
تمام شمارنده های ۱۸: { ۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸ }

بزرگ ترین شمارنده مشترک دو عدد { ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴ } = ۶
تمام شمارنده های ۲۴: { ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴ }

احمد از روش زیر استفاده کرد. او ابتدا عددها را به صورت ضرب شمارنده های اول نوشت.

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$\xrightarrow{\text{ب.ش.}} 2 \times 3 = 6$$

سپس حاصل ضرب قسمت های مشترک آنها را مشخص کرد تا بزرگ ترین شمارنده مشترک مشخص شود.

شمارنده های یک عدد را مقسوم علیه های آن نیز می گویند بنابراین بزرگ ترین شمارنده مشترک دو عدد همان بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک است که به اختصار آن را ب.م.م می نویسند. ب.م.م دو عدد را به صورت (و) نشان می دهند. مانند:

تعریف مقسوم علیه

(۱۸ و ۲۴) = ۶

آیا می توانید بگویید در فعالیت بالا احمد از چه روشی استفاده کرده است؟

از ضرب عوامل های مشترک ۱۸ و ۲۴ استفاده کرده

(12, 14) = 2

(20, 30) = 10

کار در کلاس

۱- با نوشتن تمام شمارنده های دو عدد ب.م.م آنها را پیدا کنید.

12 = 2 x 2 x 3
(14, 12) = 14 = 2 x 7

20 = 2 x 2 x 5
30 = 2 x 3 x 5
2 x 5 = 10
(20 و 30) =

۲- با تجزیه عددها به شمارنده های اول ب.م.م دو عدد را پیدا کنید.

48 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3
36 = 2 x 2 x 3 x 3
(48 و 36) =
2 x 2 x 3 = 12

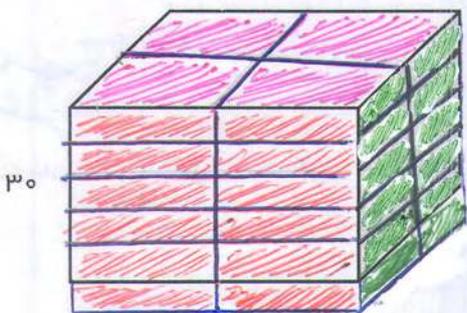
42 = 2 x 3 x 7
30 = 2 x 3 x 5
(42 و 30) =
2 x 3 = 6

فعالیت

۱- می خواهیم مستطیلی به طول ۱۶ و عرض ۱۲ سانتی متر را با کاشی های مربعی بر کنیم
ضلع این کاشی مربعی چه عددهایی می تواند باشد؟ چرا؟
این مستطیل را کاشی بچسبانیم، این اعداد شمارنده های مشترک ۱۶ و ۱۲ هستند
اگر بخواهیم کاشی های مصرف شده کمترین تعداد باشد (ضلع کاشی باید بزرگ باشد)، چه عددی برای ضلع کاشی مناسب است؟ چرا؟
۴ زیرا کاشی به ضلع ۴ بزرگ ترین شمارنده های مشترک این دو عدد می باشد

اگر بخواهیم کاشی های مصرف شده بیشترین تعداد باشد (ضلع کاشی کوچک ترین عدد باشد) چه عددی برای ضلع کاشی مناسب است؟ چرا؟
۱ چون ضلع کوچک ترین کاشی بدون شکستن این مستطیل را بر می کند
کاشی به ضلع ۱ می باشد
۲- در فصل قبل به این مسئله جواب دادید.

یک جعبه دستمال به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰، ۲۴ و ۳۰ سانتی متر جا می گیرد؟
در این مسئله ابعاد کارتن چه ارتباطی با ابعاد جعبه دستمال دارند. با توجه به این ارتباط شکل زیر را کامل کنید تا مشخص شود چند جعبه در این کارتن جا گرفته است؟



راهبرد رسم شکل

4 x 2 x 2 = 16

جعبه های دستمال کاغذی

- ۲۵ عدد ۵۰ را می شمارد
- ۱۲ عدد ۲۴ را می شمارد
- ۵ عدد ۳۰ را می شمارد

عددهای زیر تجزیه شده اند، ب.م.م های خواسته شده را به دست آورید.

28 = 2 x 2 x 7

12 = 2 x 2 x 3

36 = 2 x 2 x 3 x 3

فهرستی می گیرید

(28 و 12) = 2 x 2 = 4

(28 و 36) = 2 x 2 = 4

(12 و 36) = 2 x 2 x 3 = 12 (12 و 36 و 28) = 2 x 2 = 4



۱- دو ظرف به گنجایش ۱۲ و ۱۸ لیتر داریم. می خواهیم با یک پیمانه که هر بار پر و خالی می شود، دو ظرف را به طور کامل پر کنیم. کدام پیمانه ها برای این کار مناسب است؟ بزرگ ترین پیمانه کدام است؟

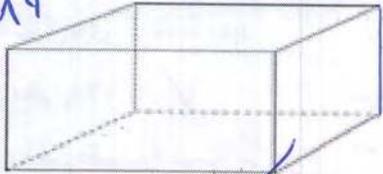
18 = 2 x 3 x 3, 12 = 2 x 2 x 3, 2, 3, 4, 6

شماره های ۲ پیمانه های مناسب برای این کار است

۲- یک مکعب مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۳۶ و ۲۸ سانتی متر را با مکعب های مساوی پر کرده ایم.

بزرگ ترین ضلع این مکعب چه عددی است؟ در این صورت چند مکعب در این مکعب مستطیل جا می شود؟

28 x 36 x 12 = 11808, 4 x 4 x 4



12 = 2 x 2 x 3, 36 = 2 x 2 x 3 x 3, 28 = 2 x 2 x 7

2 x 2 = 4

۳- برای درستی جملات زیر دلیل بیاورید.

- ✓ اگر دو عدد a و b اول باشند، ب.م.م آنها عدد یک می شود.
- ✓ اگر عددی بر عدد دیگر هم بخش پذیر باشند، عدد کوچک تر ب.م.م دو عدد است.
- ✓ کوچک ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) هر دو عدد ۱ است.

۴- ابتدا عددهای صورت و مخرج را تجزیه کنید سپس کسرها را ساده کنید. 96/144 = 2x2x2x2x2x2 / 2x2x2x2x3x3 = 2/3, 25/245 = 5x5 / 5x7x7 = 1/7

91 = 13 x 7, 117 = 13 x 9

(91 و 117) = 13

(216 و 108) = 108

(121 و 55) = 11

214 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3, 108 = 2 x 2 x 3 x 3 x 3

121 = 11 x 11, 55 = 5 x 11

۶- برای جملات درست زیر ۲ مثال بزنید.

(n و n) = n, (2, 2) = 2, (4, 4) = 4

ب.م.م دو عدد a و b شمارنده دو عدد a و b است.

اگر عدد a اول باشند، ب.م.م a و عدد دیگر مثل b یا یک می شود یا خود a.

(5, 14) = 1

(5, 15) = 5

کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد اولین مضرب مشترک آن دو عدد است. مضرب های مشترک بعدی را با داشتن اولین مضرب مشترک می توان پیدا کرد. کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد را به طور اختصار ک.م.م می گویند و به صورت [و] نمایش می دهند.

$$[6 \text{ و } 4] = 12$$

به عنوان نمونه

۱- ک.م.م دو عدد ۱۲ و ۱۸ را پیدا کنید.

مضارب ۱۸: ۱۸, ۳۶, ۵۴, ...
مضارب ۱۲: ۱۲, ۲۴, ۳۶, ...

[۱۲ و ۱۸] = ۳۶ : مضارب مشترک ۱۲ و ۱۸: ۳۶, ۷۲, ۱۰۸, ۱۴۴

$$\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{18}$$

$$\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{12}$$

۲- عددهای ۱۸ و ۱۲ به صورت تجزیه شده، نوشته شده اند.

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$[18 \text{ و } 12] = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$$

با توجه به پاسخ بالا چه رابطه ای بین شماره های اول دو عدد و ک.م.م آنها می بینید؟ توضیح دهید. حاصل ضرب مشترک ها و غیر مشترک ها می توانید از مثال زیر هم استفاده کنید.

$$A = 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$B = 2 \times 5 \times 3 \times 3$$

$$[A \text{ و } B] = 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5$$

$$B = 2 \times 5 \times 3 \times 3$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 2$$

$$2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 5$$

۱- تساوی $6 \times 4 = 24$ را به صورت های مختلف می توان معنی کرد، جاهای خالی را کامل کنید.

ششمین مضرب - عدد ۲۴ است.

۴ شماره ده ۲۴ است.

چهارمین مضرب ۴ عدد ۲۴ است.

۶ شماره ده ۲۴ است.

عددهای ۴ و ۶ شماره ده ۲۴ است. عدد ۲۴ بر ۴ و ۶ قابل قسمت است.

۲- یکی از مهم ترین کاربردهای ک.م.م در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است. یعنی کوچک ترین عددی را پیدا می کنیم که به هر دو مخرج بخش پذیر (قابل قسمت) باشد. مانند نمونه حاصل جمع ها و تفریق ها را با کمک ک.م.م مخرج ها

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{23}{18}$$

$$[6 \text{ و } 9] = 18$$

$$\frac{7}{15} + \frac{9}{20} = \frac{28}{60} + \frac{27}{60} = \frac{55}{60}$$

$$[15 \text{ و } 20] = 60$$

$$\frac{15}{12} - \frac{7}{18} = \frac{45}{36} - \frac{14}{36} = \frac{31}{36}$$

$$[12 \text{ و } 18] = 36$$

فعالیت

کار در کلاس



۱- هر ۲۰ دقیقه یک اتوبوس خط A از ترمینال حرکت می کند. اتوبوس های خط B هر ۳۰ دقیقه از ترمینال حرکت می کند. ساعت ۱۲ ظهر دو اتوبوس در خط های A و B همزمان حرکت کرده اند. در چه ساعتی به طور

همزمان اتوبوس ها از این دو خط حرکت می کنند؟ $\frac{۶۰}{۲۰} = ۳$ یعنی ساعت ۱۳

۲- یک پیست دو میدانی در یک مجتمع فرهنگی ورزشی قرار دارد.

امید و فرامرز از یک نقطه شروع به دویدن می کنند. اگر امید هر ۳۵ دقیقه یک دور کامل پیست را طی کند و فرامرز هر ۲۱ دقیقه یک دور کامل طی کند، پس از چند دقیقه فرامرز و

امید با هم به همان نقطه شروع می رسند؟ در این صورت هر کدام چند دور دویده اند؟
 $\frac{۳۵}{۲۱} = \frac{۵}{۳}$ مضربهای ۳۵: ۳۵, ۷۰, ۱۰۵, ۱۴۰, ۱۷۵, ۲۱۰
 $\frac{۳۵}{۲۱} = \frac{۵}{۳}$ مضربهای ۲۱: ۲۱, ۴۲, ۶۳, ۸۴, ۱۰۵

۳- آیا ۲۱۰ مضرب مشترک ۷ و ۳۰ است؟ چرا؟ بله، باقیمانده ی تقسیم ۲۱۰ بر ۷ برابر ۳۰ و برابر مضرب مشترک است

آیا ۴۲۰ مضرب مشترک ۷ و ۳۰ است؟ چرا؟ بله، باقیمانده ی تقسیم ۴۲۰ بر ۷ برابر ۳۰ است

دو عدد ۷ و ۳۰ چند مضرب مشترک دارند؟

شمار
کامی

۴- دلیل درستی جملات زیر را بیان کنید.

$[۱۸, ۶] = ۱۸$

✓ اگر عددی بر عدد دیگر بخش پذیر باشند، عدد بزرگ تر ک.م.م دو عدد است.

✓ اگر ب.م.م دو عدد یک باشد، ک.م.م دو عدد برابر حاصل ضرب دو عدد است.

$(۹, ۱۰) = ۱ \Rightarrow [۹, ۱۰] = ۹۰$
 $(۵, ۷) = ۱ \Rightarrow [۵, ۷] = ۳۵$

✓ ک.م.م دو عدد اول برابر حاصل ضرب آنهاست.

۵- برای هر کدام از جملات درست زیر یک مثال بزنید.

$[۱۰, ۱] = ۱۰$ $n = [۱, n]$

$[۱۰, ۱۰] = ۱۰$ $n = [n, n]$

✓ ب.م.م دو عدد شمارنده ک.م.م دو عدد است. $\frac{۱۲}{۳} = ۴$ پس ۱۲ از ۳ باشد

✓ حاصل ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب ک.م.م و ب.م.م دو عدد است.

۶- به صورت ذهنی تساوی ها را کامل کنید.

$(۲۰ و ۳۰) = ۱۰$ $(۵ و ۷) = ۱$ $(۱۵ و ۳) = ۳$ $[۱۲ و ۴] = ۱۲$

$[۳۰ و ۵۰] = ۱۵۰$ $(۳۸ و ۱۹) = ۱۹$ $[۱۵ و ۳۰] = ۳۰$ $(۴ و ۹) = ۱$

$[۴ و ۹] = ۳۶$ $[۳ و ۷] = ۲۱$ $(۳ و ۲ و ۷) = ۱$ $[۴ و ۶] = ۱۲$

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

□ عدداول □ شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد □ شمارنده اول □ مضرب □ م.م.ب □ م.م.ک

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- نوشتن شمارنده‌های یک عدد
- پیدا کردن شمارنده اول یک عدد
- پیدا کردن تمام شمارنده‌های یک عدد با معلوم بودن تجزیه عدد
- تجزیه عدد به شمارنده‌های اول
- پیدا کردن م.م.ب دو عدد
- پیدا کردن م.م.ک دو عدد
- نوشتن مضرب‌های یک عدد
- رابطه بین مضرب و مقسوم علیه

کاربرد

از مفاهیم م.م.ب و م.م.ک در محاسبات کسری (ساده کردن و منخرج مشترک) استفاده می‌کنیم. درک شمارنده‌های اول یک عدد زمینه‌ساز همین بحث به صورت جبری است.

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- با توجه به تساوی $3 \times 4 = 12$ معانی مختلف آن را بیان کنید. *۳، ۴، ۱۲ شمارنده‌های ۱۲ می‌باشند، ۱۲ مضرب ۳ و ۴ هست*

۲- ابتدا دو عدد زیر را به شمارنده‌های اول تجزیه کنید، سپس م.م.ب و م.م.ک آنها را به دست آورید.

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $(72, 60) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

۳- عددهای اول بین ۵۰ تا ۸۰ را بنویسید.

$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79$

۴- با شمارنده‌های اول ۲ و ۳ دو عدد بنویسید که م.م.ب آنها ۶ و م.م.ک آنها ۳۶ باشد.

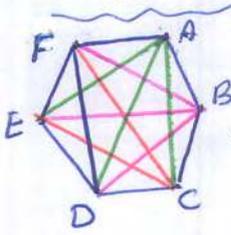
$(18, 12) = 6$, $[18, 12] = 36$

$(4, 36) = 4$, $[4, 36] = 36$

با استفاده از تجزیه

راهبرد حرف
حالت‌های
۸۶
نا مطلوب

چون هر قطر دو بار تکرار شده $10 \div 2 = 5$



$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow 3 \quad D \rightarrow 3 \quad 4 \times 2 = 8 \\
 B \rightarrow 3 \quad E \rightarrow 3 \\
 C \rightarrow 2 \quad F \rightarrow 2 \quad 18 \div 2 = 9
 \end{array}$$

چون هر قطر دو بار تکرار شده مسئله استفاده کردید؟ از هر رأس یک n ضلعی را به دست آورید و با یک عبارت جبری نشان دهید، از چه راهبردهایی برای حل این

اینکه هر قطر دو بار تکرار شده داریم

$$\text{تعداد قطر (ها)} = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

۲- اگر $x=5$ باشد، مقدار عددی عبارت جبری $\frac{4x+7}{3x-7}$ را به دست آورید.

$$\frac{4 \times 5 + 7}{3 \times 5 - 7} = \frac{20 + 7}{15 - 7} = \frac{27}{8}$$

۳- عبارت های جبری را ساده کنید.

$$2a - 5b + 3b - 7b = 2a - 9b$$

$$9x - 8a + 2x - 3x = 8x - 8a$$

$$5a - 2a - 9a + 4b = -4a + 4b$$

$$2(a-b) - 3(b-a) = 2a - 2b - 3b + 3a = 5a - 5b$$

۴- معادله های زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 9x + 8 &= -10 \\
 \Rightarrow 9x &= -10 - 8 \\
 \Rightarrow 9x &= -18 \\
 \Rightarrow x &= \frac{-18}{9} = -2
 \end{aligned}$$

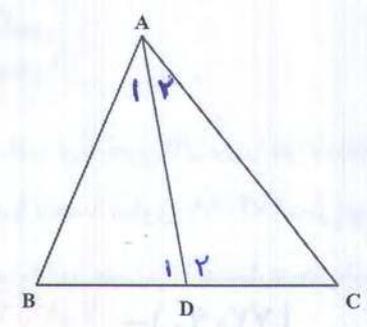
$$\begin{aligned}
 4x - 4 &= 8 \Rightarrow 4x = 8 + 4 \\
 \Rightarrow 4x &= 12 \\
 \Rightarrow x &= \frac{12}{4} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x + 18 &= -12 \Rightarrow 3x = -12 - 18 \\
 \Rightarrow 3x &= -30 \\
 \Rightarrow x &= \frac{-30}{3} = -10
 \end{aligned}$$

۵- آیا امکان دارد که یک معادله بیشتر از یک جواب داشته باشد؟ چرا؟

چون حاصل یک عبارت جبری ممکن است به ازای مقادیر متفاوت برابر شود

۶- در شکل زیر تمام پاره خط ها و زاویه ها را نام ببرید. توضیح دهید از چه راهبردی استفاده می کنید. **الوسازی**



پاره خط ها $(AB, AC, AD), (BD, BC), CD$

$(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{BAC})$

$(\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{BDC})$

\hat{B}, \hat{C}

۷- کوچک ترین عددی را که ۳ شمارنده اول متفاوت داشته باشد، پیدا کنید.

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

راه حل خود را توضیح دهید.

همان روش بالا تعداد پاره خط ها را بدست آورید

روش دوم

سپس برای بدست آوردن تعداد قطر (ها) (تعداد اضلاع - تعداد پاره خط ها) را بدست آورید

۸- یک توالی عددی، از ۷ شروع می‌شود و چهار تا چهار تا به آن اضافه می‌شود. در توالی دیگری عدد از ۱ شروع و



۹ تا ۹ تا به آن اضافه می‌شود. اولین و دومین عدد مشترک این دو توالی را پیدا کنید.

۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, ۲۳, ۲۷, ۳۱, ۳۵, ۳۹, ۴۳, ۴۷, ۵۱, ۵۵, ... $+34$ $+34$
 ۱, ۱۰, ۱۹, ۲۸, ۳۷, ۴۶, ۵۵, ... $[9, 4] = 36$ ۱۹, ۵۵, ۹۱, ...

۹- دو عدد بنویسید که ۴ و ۹ شمارنده آنها باشند. یک عدد بنویسید که ۴ و ۹ دو شمارنده آن باشند و ۴ شمارنده دیگر



(۳۶, ۷۲)

۳۶ نیز داشته باشد.

۳۶ ضرایب: ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶

۱- عددهای اول بین ۸۰ تا ۱۰۰ را بنویسید. $81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90$
 مضارب: ۲, ۳, ۵, ۷ را حذف کنیم $91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99$

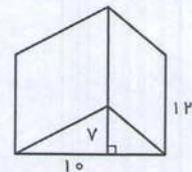
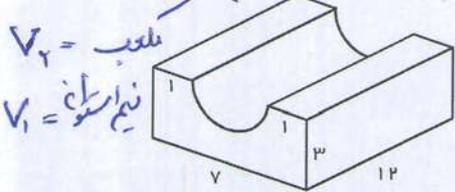


۱۱- کوچک ترین عددی را پیدا کنید که شمارنده هایش ۳ و ۶ و ۵ باشد.

جواب: ۳۰

۱۲- حجم هر یک از اجسام زیر را به دست آورید.

$V = (V_2 - V_1)$

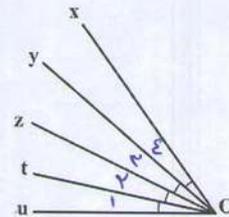
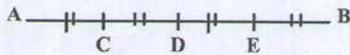


۱۳- مساحت جانبی و مساحت کل یک جسم منشوری را پیدا کنید که قاعده آن شکل زیر و ارتفاعش ۱۰ سانتی متر



باشد. $S_{\text{مستطیل}} + \frac{S_{\text{جانبی استوان}}}{2}$
 $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2 \times (\text{کریه دایره})$

۱۴- با توجه به شکل های زیر روابط بین پاره خط ها و زاویه ها را کامل کنید.



$AD = 2 \cdot DE$

$u \hat{O}t + t \hat{O}z = u \hat{O}z$

$AB - DE = AD + EB$

$x \hat{O}u = \dots y \hat{O}z$

$AE = \dots AB$

$y \hat{O}u = \dots x \hat{O}u$

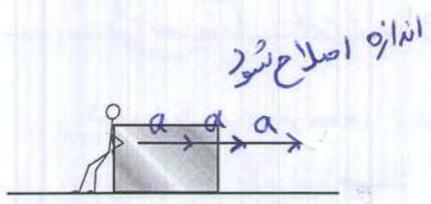
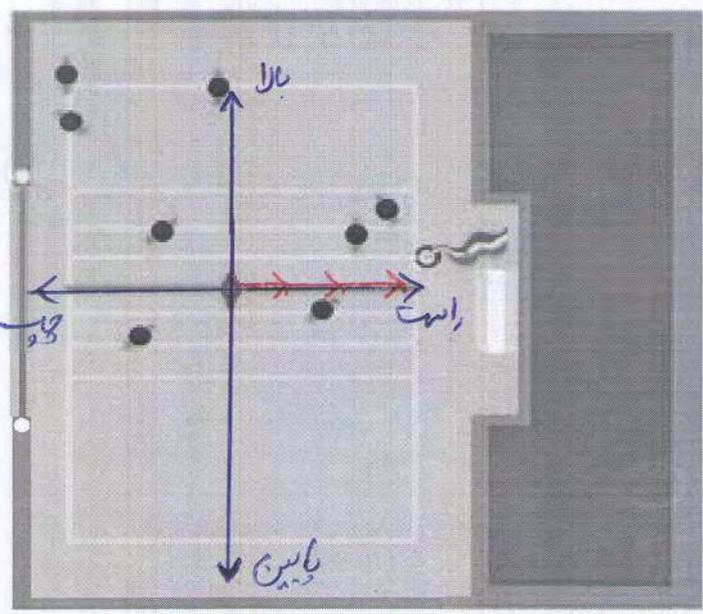
$AC - CE + EB = AB$

$y \hat{O}u - z \hat{O}t = y \hat{O}z + t \hat{O}u$

۱- یک دانش آموز در حیاط مدرسه ایستاده است. در صفحه زیر این دانش آموز را با یک نقطه نشان داده ایم. این فرد در حیاط مدرسه در چند مسیر مختلف می تواند حرکت کند؟ آنها را نشان دهید.

از بین مسیرها یک مسیر افقی را انتخاب کنید. حالا این فرد در چند جهت می تواند حرکت کند؟ روی آن مسیر (راستا) جهت ها را با فلش نشان دهید. برای حرکت این دانش آموز یک جهت انتخاب کنید.

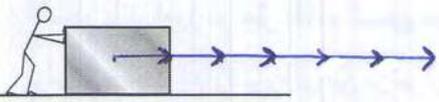
اگر هر قدم حرکت آن دانش آموز را با پاره خطی به طول a نمایش دهیم روی شکل ۳ قدم حرکت را در جهتی که انتخاب کردید، نشان دهید.



۲- شخصی در حال حرکت دادن یک جعبه روی زمین است.

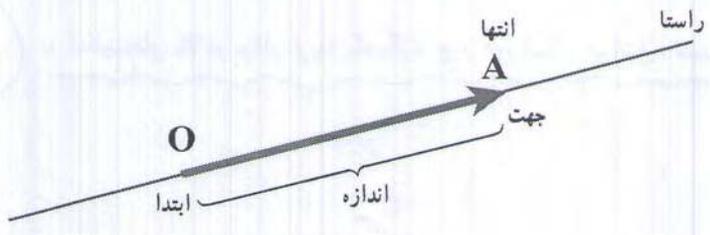
راستا یا مسیری که شخص به جسم نیرو وارد می کند روی شکل مشخص شده است، اگر اندازه نیرویی که شخص وارد کرده است را با a نشان دهیم روی راستای بالا مقدار نیرو و جهت آن را نشان دهید. سه برابر وافر در راستای افق به سمت شرق (راستا)

در شکل زیر همان شخص ۲ برابر نیرو به جسم وارد کرده است.



راستا، اندازه و جهت نیرو را روی شکل مانند بالا نشان دهید. در همان راستا و در همان جهت و دو برابر آن

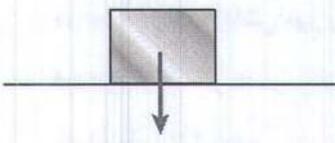
در مثال های بالا حرکت و نیرو را با پاره خط های جهت دار نشان دادیم. در ریاضی به پاره خط جهت دار بردار می گوئیم. بردار OA را به صورت \overline{OA} نشان می دهیم.



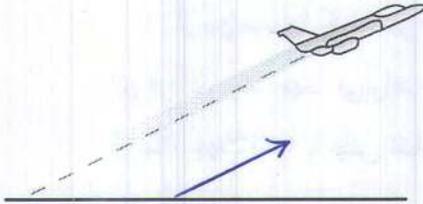
هدف: جهت نیرو

کار در کلاس

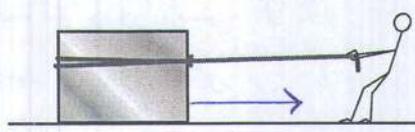
در شکل زیر نیروی وزن یک جعبه با یک بردار مشخص شده است. مانند نمونه برای حرکت‌ها با نیروهای مشخص شده در شکل‌های زیر بردار رسم کنید.



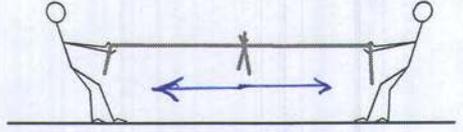
در این تمرین فقط جهت حرکت مهم است، اندازه مد نظر نیست



مسیر حرکت هواپیما



نیروی که فرد با طناب به جعبه وارد می‌کند.



نیروهایی که دو نفر در مسابقه طناب‌کشی وارد می‌کنند.

هدف: معرفی بردارهای قرینه

فعالیت

۱- در شکل زیر دو نفر جعبه را از دو طرف می‌کشند. با توجه به نیروهای رسم شده به سؤالات زیر پاسخ دهید.

• آیا دو نیرو در یک راستا هستند؟

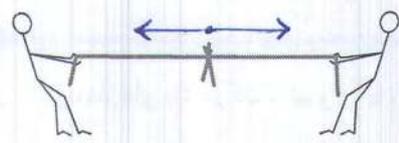
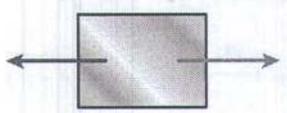
• جهت دو نیرو چه تفاوتی دارند. مخالف هم می‌باشند

• اندازه نیروها را با هم مقایسه کنید. اندازه ی نیروها با توجه به طول

بردارها با هم مساوی اند

۲- دو دانش‌آموز در حال طناب کشیدن هستند.

راستا، جهت و اندازه نیروهای این دو نفر را نسبت به محل مشخص شده روی طناب با دو بردار نشان بدهید.



اندازه ی نیروها مساوی است و در خلاف جهت

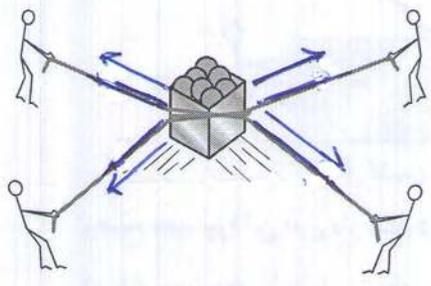
هم می‌باشند زیرا در حالت اولیه قرار دارند

در فعالیت‌های بالا دو بردار قرینه یکدیگرند چون هم راستا و هم اندازه هستند ولی جهت‌هایشان عکس یکدیگر است.

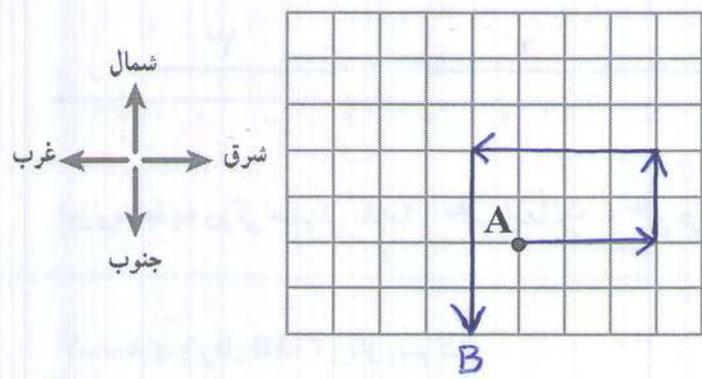


۳۷

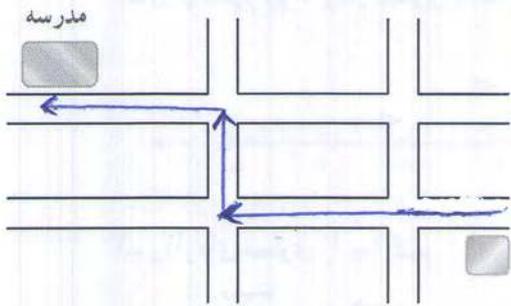
۱- شکل زیر تصویر یک جعبه است که چند نفر آن را با طناب می کشند. نیروهایی که به این جعبه وارد می شود را با بردار در تصویر از بالا نشان دهید.



۲- با توجه به ۴ جهت نشان داده شده حرکت نقطه A را نشان دهید.



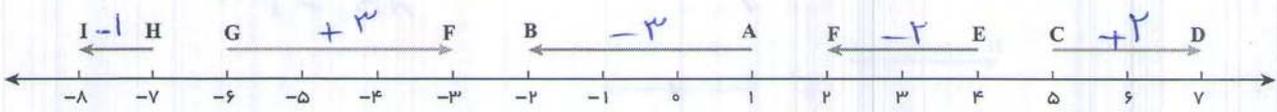
از نقطه A، ۳ واحد به سمت شرق، ۲ واحد به سمت شمال، ۴ واحد به سمت غرب و ۴ واحد به سمت جنوب حرکت کنید. محل نهایی نقطه را با B نشان دهید.



۳- علی از خانه به مدرسه رفته است. با انتخاب مسیر رفتن علی به مدرسه، حرکت های او را با بردار نشان دهید.

پاسخ با زاسب: راه های متفاوتی وجود دارد

۴- بردار AB، -۳ است، یعنی ۳ واحد در جهت منفی محور از نقطه A به نقطه B حرکت کرده ایم. ابتدای این بردار نقطه +۱ محور و انتهای آن نقطه -۲ است.

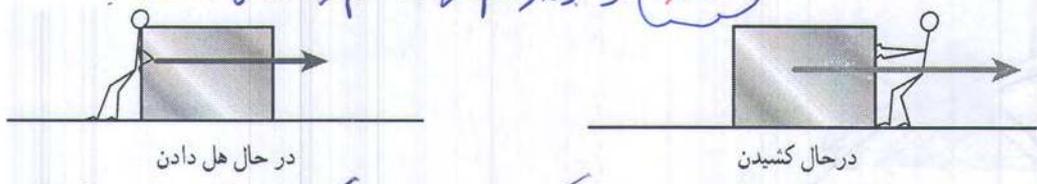


با توجه به نمونه فوق ابتدا، انتها و اندازه بردارهای مشخص شده روی محور را بنویسید.

*اندازه کدیف بردار یعنی کولند
کدیف عدد منفی باشد*

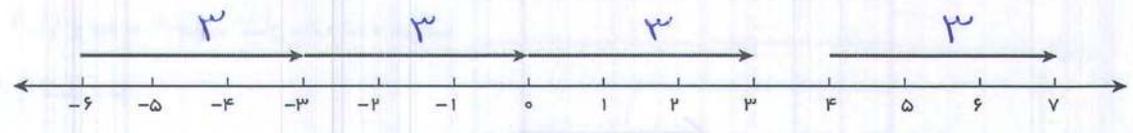
نام بردار	ابتدا	انتها	اندازه	عدد مناسط
\vec{AB}	+۱	-۲	۳	-۳
\vec{CD}	۵	۷	۲	+۲
\vec{EF}	۴	۲	۲	-۲

۱- در شکل های زیر دو نفر نیروهای با اندازه های برابر به جسم وارد می کنند. یک نفر در حال هل دادن جسم و یک نفر در حال کشیدن آن است.



نکته: دو بردار هم جهت هم راستا می باشند

توضیح دهید چرا این دو بردار مساوی هستند. چون در هر دو بردار جهت و هم اندازه است
 ۲- با توجه به محور اندازه بردارهای زیر را مشخص کنید.

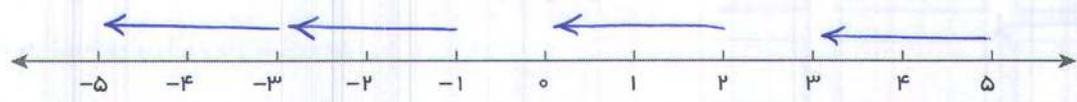


این بردارها چه ویژگی مشترکی دارند؟ هم اندازه، هم جهت و هم راستا می باشند

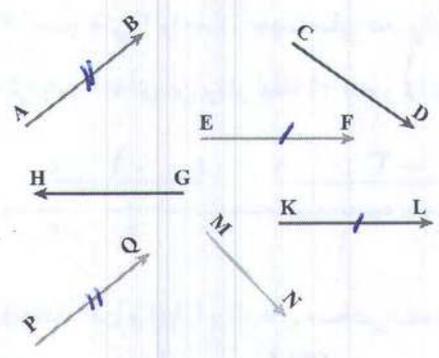


۱- مساوی با بردار AB، ۳ بردار رسم کنید.

۲- روی محور زیر ۴ بردار مساوی با اندازه ۲ واحد در جهت منفی رسم کنید.

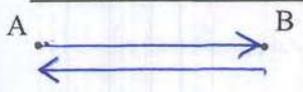


۳- بردارهای مساوی را پیدا کنید.



$$\vec{EF} = \vec{KL}$$

$$\vec{AB} = \vec{PQ}$$



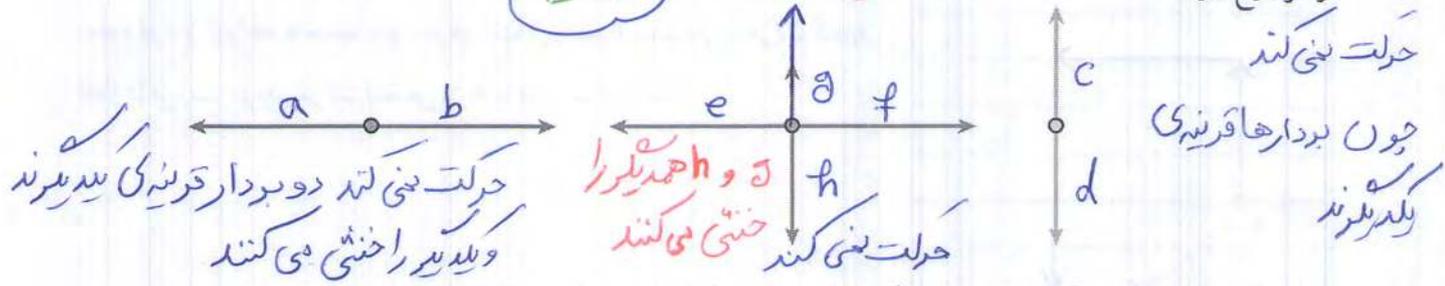
۱- شخصی از نقطه A به نقطه B رفته است. حرکت او را با یک بردار نشان دهید.

اگر این شخص از نقطه B به نقطه A برگردد حرکت دوم را نیز با یک بردار نشان دهید.

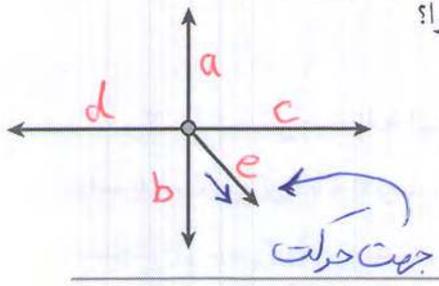
این دو بردار را از نظر راستا، اندازه و جهت مقایسه کنید. هم راستا، هم اندازه و خلاف جهت هم آیا این دو بردار قرینه یکدیگرند؟ چرا؟ بله، چون برخلاف جهت هم و هم اندازه می باشند مجموع حرکت این فرد چقدر است؟ صفر

۲- با توجه به نیروهای وارد بر جسم زیر و بردارهای قرینه، مشخص کنید جسم به کدام سمت حرکت می کند. دلیل خود را توضیح دهید.

فرد همیشه را خنثی می کند اصل صحت



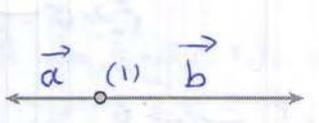
۳- با توجه به نیروهای وارد شده در شکل مقابل، جسم به کدام طرف حرکت می کند؟ چرا؟



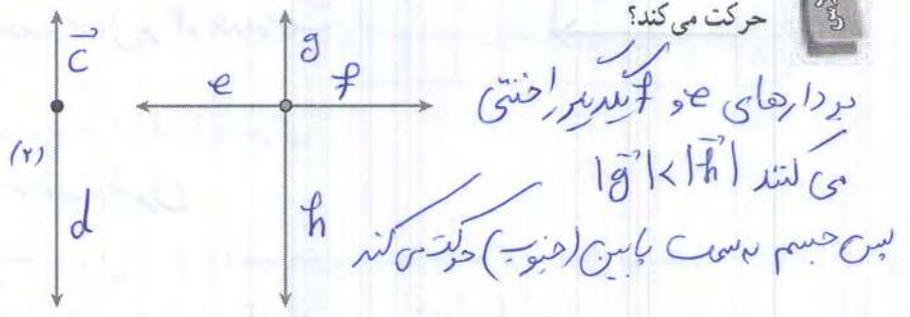
در جهت بردار e حرکت می کند زیرا a و b یکدیگر را خنثی می کنند و c و d نیز یکدیگر را خنثی می کنند

۱- با توجه به اندازه بردارهای نیرو که با طول های مختلف نشان داده شده است، توضیح دهید که جسم به کدام سمت حرکت می کند؟

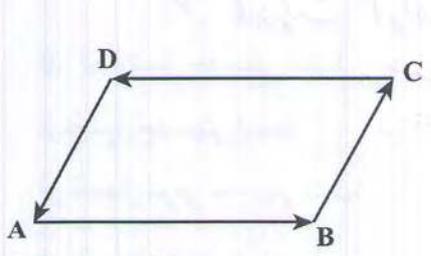
(۱) به سمت شرق (راست) حرکت می کند زیرا $|a| < |b|$



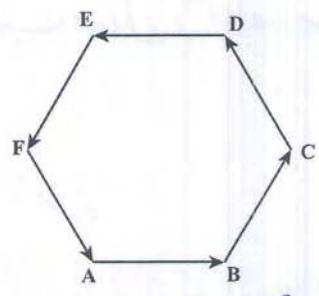
(۲) به سمت چپ (بایین) حرکت می کند



۲- با توجه به شکل های زیر بردارهای قرینه را نام ببرید.



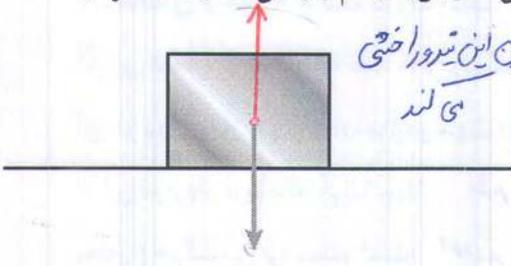
بردارهای \vec{AB} و \vec{CD} و همچنین بردارهای \vec{BC} و \vec{DA} قرینه می باشند



۱- \vec{FA} و \vec{CD} قرینه می باشند
۲- \vec{AB} و \vec{DE} قرینه می باشند
۳- \vec{BC} و \vec{EF} قرینه می باشند
۹۴

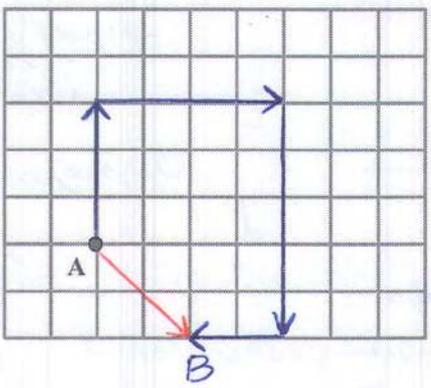
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = 0$$

۱- در شکل زیر نیرو و وزن جسم با یک بردار مشخص شده است، نیرویی که زمین به جسم وارد می کند را با یک بردار

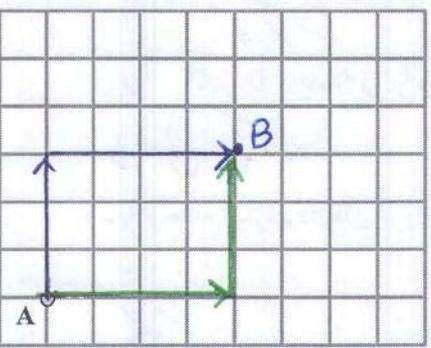


نمایش دهید. چرا جسم روی زمین می ماند و حرکت نمی کند؟
این دو نیرو کرینبی یا کشند چون جسم حرکتی
نمی کند
زیرا نیروی زمین این نیرو را خنثی
می کند

۲- شخصی در نقطه A ایستاده است، اگر ۳ واحد به سمت شمال، ۴ واحد به سمت شرق و ۵ واحد به سمت جنوب و در انتها ۲ واحد به سمت غرب حرکت کند به نقطه B می رسد. بردار حرکت شخص از A به B را نشان دهید.



۳- اگر شخصی در نقطه A ایستاده باشد. ۳ واحد به سمت شمال و سپس ۴ واحد به سمت شرق برود تا به B برسد. اگر شخص دیگر از همان نقطه A، ۴ واحد به سمت شرق و سپس ۳ واحد به سمت شمال برود به کدام نقطه می رسد؟ چرا؟



به همان نقطه که از مسیر اول رفته بودی رسید (نقطه B)
زیرا در هر دو حرکت ما سه واحد به سمت شمال و ۴ واحد به سمت
غرب می رویم

۴- اگر شخص از نقطه A، ۲ واحد به سمت غرب حرکت کند با چه حرکتی به نقطه A می رسد؟ با حرکت ۲ واحد به سمت شرق

حالا اگر شخص از نقطه A، ۳ واحد به سمت شرق و ۲ واحد به سمت جنوب برود با چه حرکتی به محل اول خود برمی گردد؟

- ۱- با حرکت ۳ واحد به سمت غرب و ۲ واحد به سمت شمال
- ۲- با حرکت ۲ واحد به سمت شمال و ۳ واحد به سمت غرب

۵- قرینه شمال چه جهتی است؟ جنوب

قرینه شرق چه جهتی است؟ غرب

قرینه شمال شرقی چه جهتی است؟ جنوب غربی

۱- در دوره دبستان با محورهای مختصات آشنا شدید.

مختصات نقاط A و B و C را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نقاط $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $G = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

معرفی دستگاه مختصات

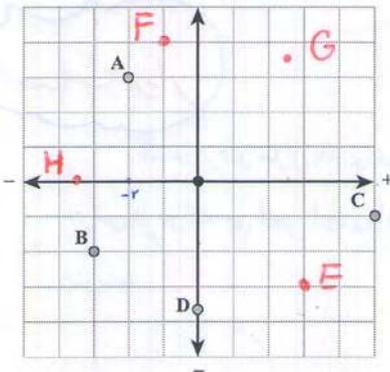
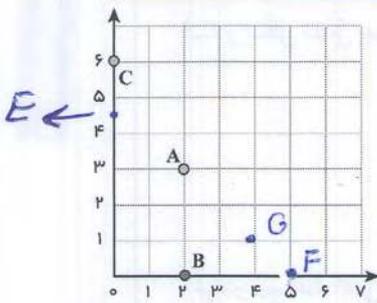
۲- با توجه به محور عددهای صحیح که در فصل اول آموختید محورهای زیر را در جهت‌های منفی ادامه دادیم تا

محورهای مختصات کامل شوند. حالا مختصات نقاط مشخص شده را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

نقاط زیر را روی محور مختصات پیدا کنید.

$$E = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

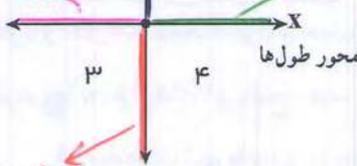


محور عرضها y

مرز ناحیه یک و دو

مرز ناحیه ۲ و سه

مرز ناحیه یک و دو چهار



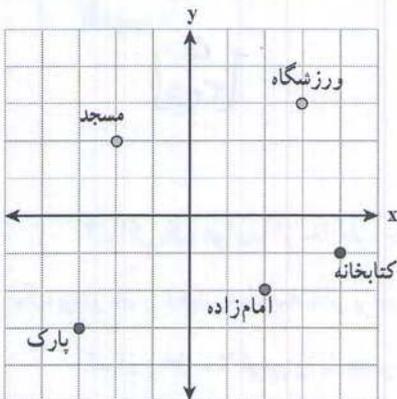
محورهای مختصات صفحه را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنند.

در شکل مقابل این ۴ ناحیه با عددهای ۱ تا ۴ مشخص شده‌اند.

مرز ناحیه ۱ و ۲ را مشخص کنید. مرز ناحیه ۳ و ۴ را نیز مشخص کنید.

مرز ناحیه ۱ و ۴ و همچنین ۲ و ۳ را نیز مشخص کنید.

مرز ناحیه ۱ سه و چهار



با توجه به تصویر روبه‌رو به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- ۱- مختصات ورزشگاه چیست؟ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ۲- مختصات چه بنایی است؟ امامزاده $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ اصلاحیه
- ۳- مختصات مسجد چیست؟ $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$
- ۴- کتابخانه در کدام نقطه واقع است؟ $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

۱- در شکل مقابل حرکت از نقطه A به B با بردار AB نشان داده شده است.

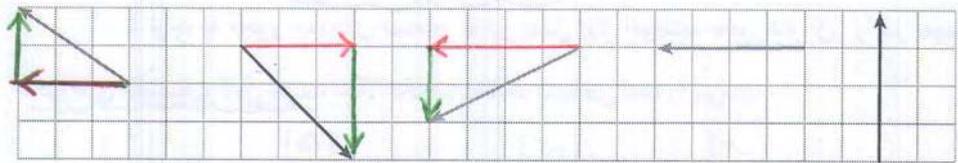


ابتدا حرکت افقی و سپس حرکت عمودی

۳۳۵

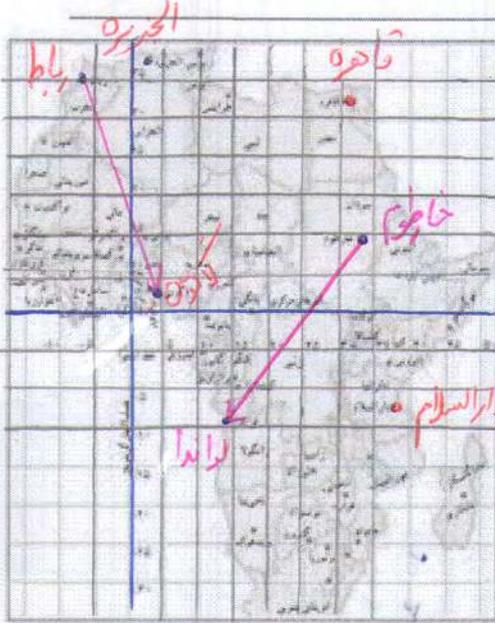
اگر بتوانیم فقط افقی یا عمودی حرکت کنیم (قرار می‌گذاریم که همیشه ابتدا افقی و سپس عمودی حرکت می‌کنیم).

مسیر حرکت از A تا B را نشان دهید. در بردارهای زیر نیز مسیر را مشخص کنید.



مختصات بردار

۲- در بردار سؤال بالا برای حرکت از A به B، ۴ واحد به سمت مثبت محور طول و سپس ۲ واحد به سمت مثبت محور عرض ها حرکت می‌کنیم. این بردار را در صفحه مختصات می‌توانیم به صورت $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ نمایش دهیم. مختصات سایر بردارها را بنویسید.



طول جغرافیایی هر نقطه با نصف‌النهاری که از آن می‌گذرد و عرض جغرافیایی

هر نقطه با مدار مربوطه آن مشخص می‌شود. در نقشه مقابل با توجه به مدارها (خط‌های افقی) و مدار مبدأ (خط استوا) و نصف‌النهارها (خط‌های عمودی) و نصف‌النهار مبدأ (گرینویچ) به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱- مختصات شهرهای زیر را به‌طور تقریبی بنویسید.

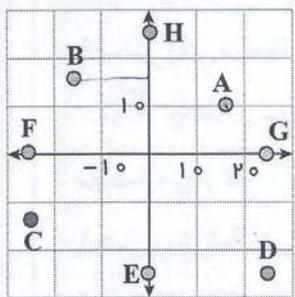
- قاهره: $\begin{bmatrix} 31 \\ 25 \end{bmatrix}$
- دارالسلام: $\begin{bmatrix} 37,5 \\ -7,5 \end{bmatrix}$
- الجزیره: $\begin{bmatrix} 5 \\ 37,5 \end{bmatrix}$

۲- اگر یک هواپیما از خارطوم به لوآندا در مسیر تقریباً مستقیم حرکت کند، حرکت این هواپیما را به‌صورت تقریبی با

یک بردار نشان دهید. مختصات آن بردار را بنویسید. $\begin{bmatrix} 11,5 \\ -47 \end{bmatrix}$

۳- از رباط تا لاگوس را با چه برداری می‌توان پیمود؟

$\begin{bmatrix} 11,5 \\ -52,5 \end{bmatrix}$

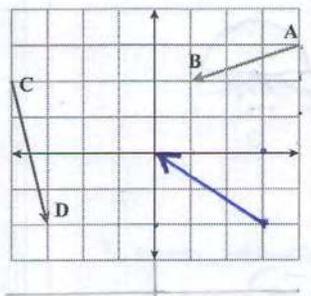


۱- با توجه به شکل مختصات هر نقطه را به صورت تقریبی بنویسید.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲- بردار $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در محور مختصات زیر طوری رسم کنید که ابتدای بردار نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشد.



مختصات نقطه انتهای آن را بنویسید. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

با توجه به شکل، مختصات نقطه م و بردارهای زیر را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \overline{AB} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \overline{CD} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

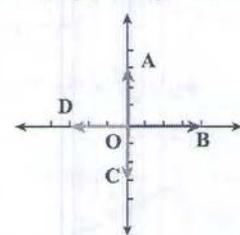
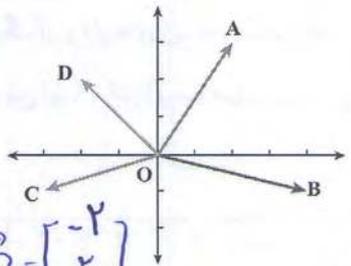
۳- ابتدا مختصات بردار AB را تعیین کنید. قرینه بردار AB را نسبت به محور طول ها رسم کنید و مختصات قرینه \overline{AB} را بنویسید. قرینه بردار AB را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید و مختصاتش را بنویسید.

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \overline{AC} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A'B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A'C' = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نکته: قرینه نسبت به محور طول ها، طول ثابت می ماند و عرض قرینه می شود. $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول

۴- مختصات بردارها را در شکل های زیر بنویسید.



$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{OB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{OD} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۵- از نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ با بردار $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و سپس با بردار $\overline{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ حرکت کردیم تا به نقطه C برسیم. با چه برداری می توانستیم از A به C حرکت کنیم؟

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۶- مشخص کنید که نقاط مقابل در کدام ناحیه قرار دارد.

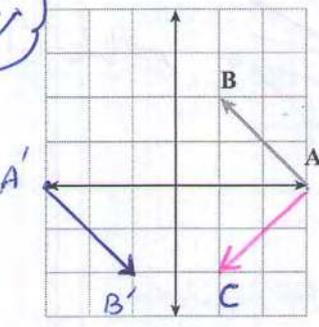
$$A = \begin{bmatrix} -250 \\ -180 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 47 \\ -81 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -141 \\ 252 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -200 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- A ← ناحیه ۳
- B ← ناحیه ۴
- C ← ناحیه ۲
- D ← ناحیه ۲

طول بی از نقاط C و D نسبت شود

۴

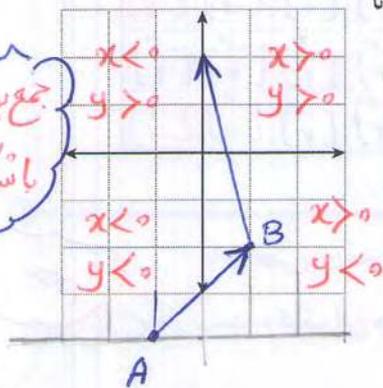


$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{OD} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

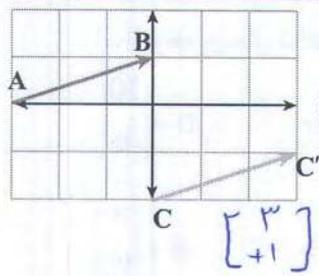
جمع بردارها با شکل



اصلاح شود

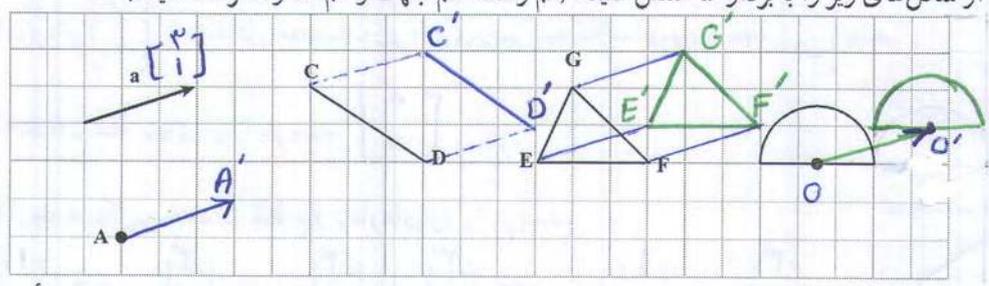
اصلاح شود

بهتر است ۳ باشد



۱- مسیر رفتن از نقطه A به B را به صورت زیر بیان کنید :
 واحد در جهت مثبت محور x ها و واحد در جهت مثبت محور y ها
 مختصات بردار AB را بنویسید.
 $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

با همین بردار نقطه C را به نقطه C' منتقل کردیم. مختصات بردار CC' را مشخص کنید.
 ۲- هر یک از شکل های زیر را با بردار \vec{a} منتقل کنید. (هم راستا، هم جهت و هم اندازه حرکت کنید.)

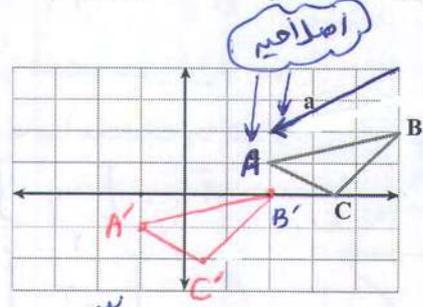


۳- در محور مختصات زیر مثلث ABC را با بردار \vec{a} انتقال دهید و مثلث جدید را A'B'C' بنامید. مختصات رأس ها

را بنویسید.

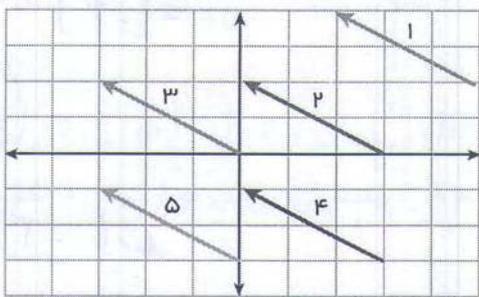
$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$



همی بردار انتقال جمع شوند

۴- برای هر یک از بردارهای زیر مختصات ابتدا و انتهای بردار را بنویسید.
 چه رابطه ای بین ابتدا و انتها و مختصات بردار وجود دارد؟ این بردارها چه ویژگی دارند.

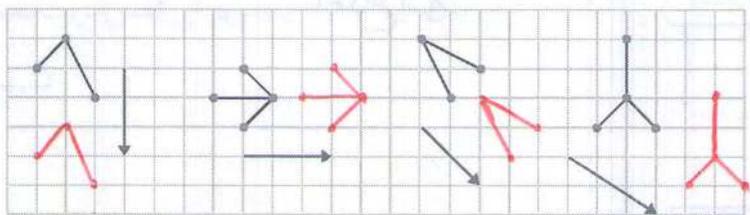


بردار	۱	۲	۳	۴	۵
مختصات ابتدا	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$
مختصات بردار	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
مختصات انتها	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

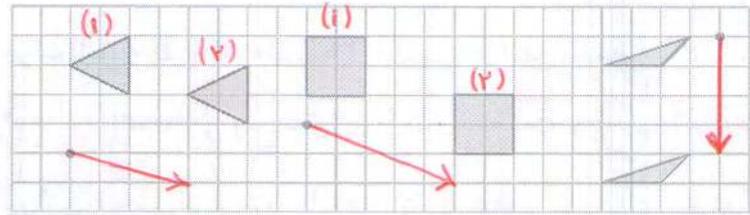
با مشخص بودن مختصات ابتدا، مختصات بردار و مختصات انتهای یک بردار می توان یک جمع متناظر برای بردار نوشت به کمک این جمع و با معلوم بودن ۲ مختصات می توان مختصات قسمت سوم (نامعلوم) را پیدا کرد.

۳۳

۱- هر شکل را با بردار انتقال مربوطه انتقال دهید. مختصات بردارهای انتقال را بنویسید.



۲- بردار انتقال مربوط به هر شکل را از نقطه قرمز کنار آن رسم کنید. متناظر با هر کدام یک جمع بنویسید.



یا سبب باز
دو جواب دارد

قرنبری این بردارها
نیز می تواند درست
باشد

انتهای بردار مختصات بردار ابتدای بردار

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$-2 + x = 3 \Rightarrow x = 5$$

۳- مختصات مورد نظر را به دست آورید.

$$1 + y = -4 \Rightarrow y = -5$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x + (-1) = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$y + 2 = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$-6 + 2 = x \Rightarrow x = -4$$

$$3 + (-1) = -y \Rightarrow y = -2$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

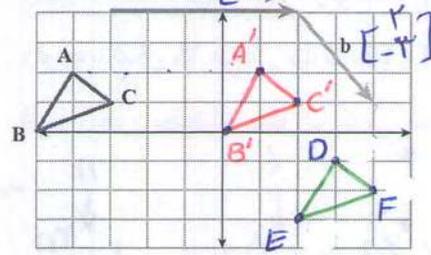
۴- مختصات برداری را که ابتدای آن $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و انتهای آن $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ پیدا کنید.

$$\vec{AB} = B - A \Rightarrow \vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

مختصات بردار

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقاط A و B و C را با بردار a انتقال دهید و آنها را A' و B' و C' بنامید.



$$A = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

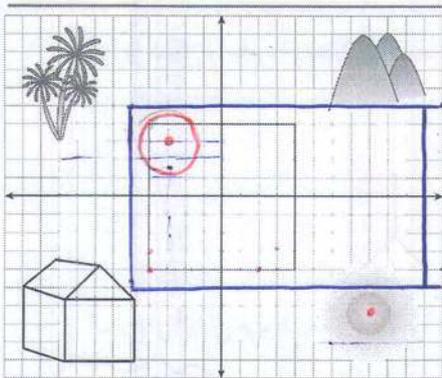
$$A' = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = C' = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حالا مثلث جدید را با بردار b بردار دهید و آن را با D, E, F نشان دهید.

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

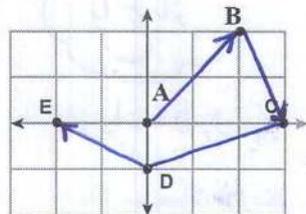
با چه برداری نقاط A, B, C مستقیماً به D, E, F منتقل می شوند؟

$$\vec{a} + \vec{b} = c, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$



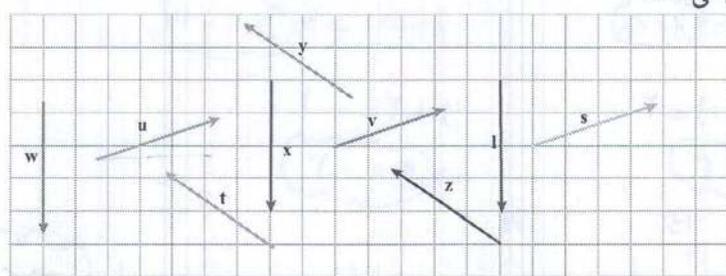
۱- هر یک از اجزای نقاشی را با بردار انتقال دلخواه به محل مناسب در کادر انتقال دهید و مختصات بردار انتقال را بنویسید. اصلاح شود

بازی با بردار



۲- مسیر حرکت از A به B، به C، به D و به E را با بردارهای انتقال مشخص کنید و مختصات هر بردار را بنویسید. $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{DE} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

می توانید این بازی را به صورت دو نفره انجام دهید. یک نفر نقطه می گذارد و نفر دوم باید بگوید با چه بردار انتقالی نقطه شروع را به نقطه مشخص شده انتقال می دهد.



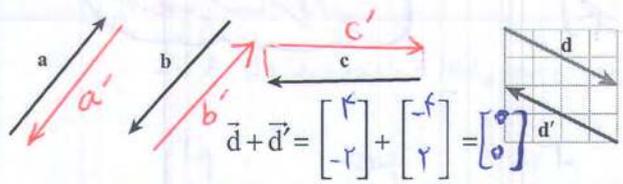
۳- بردارهای مساوی را مشخص کنید.

$$\vec{w} = \vec{x} = \vec{l} \quad \vec{t} = \vec{y} = \vec{z}$$

$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{s}$$

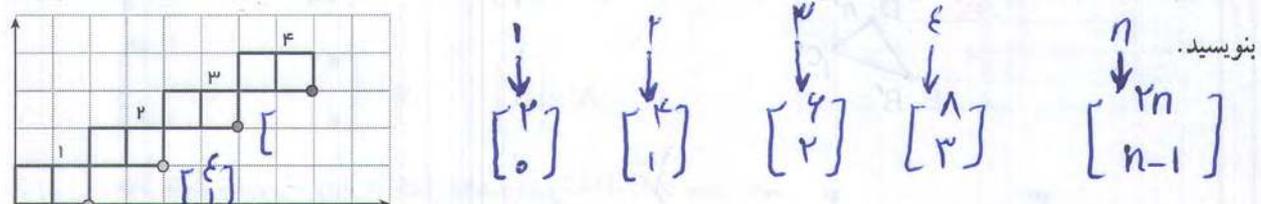
۴- بردار قرینه هر بردار را رسم کنید و تساوی ها را کامل کنید.

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -\vec{d}' = -\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



چگونه مختصات قرینه یک بردار نوشته می شود؟
با توجه به شکل بالا حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

۵- در محور مختصات مقابل در کاشی شماره n مختصات گوشه ای که با علامت مشخص شده است را به صورت جبری بنویسید.



۶- در یک بازی روی صفحه شطرنجی، سعید مهره خود را از خانه ای به مختصات

$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ابتدا ۳ خانه به سمت راست و سپس ۴ خانه به سمت پایین آورد. در حرکت دوم او مهره اش را ۲ خانه به سمت چپ آورد. هم

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اکنون مهره سعید روی کدام نقطه صفحه قرار دارد؟

۷- اگر نقطه A به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را با بردار انتقال $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ منتقل کنیم تا به نقطه B برسیم مختصات نقطه B را به صورت جبری بنویسید.

$$B = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$

مفاهیم و مهارت ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

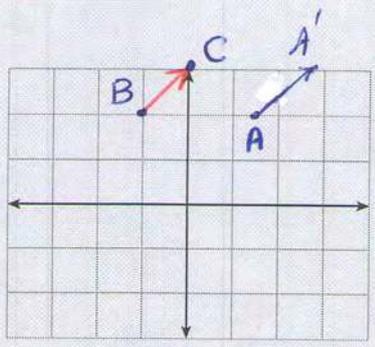
- بردار
- راستا
- بردار انتقال
- پاره خط جهت‌دار

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- ویژگی‌ها، نام‌گذاری و نمایش بردار
- بردار انتقال
- مختصات نقطه در صفحه
- بردارهای مساوی
- جمع متناظر با بردار
- پیدا کردن مختصات بردار
- بردار قرینه و بردار صفر
- ۴ ناحیه محور مختصات

کاربرد

کاربرد اصلی این موضوع را در درس‌های علوم خود خواهید دید. در دوره دوم متوسطه و در درس فیزیک نیز با کاربردهای بیشتری از این موضوع آشنا می‌شوید. در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.



۱- نقاط به مختصات $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

$A' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

نقطه A را با بردار \overline{BC} منتقل کنید و مختصات نقطه منتقل شده را بنویسید. بدون رسم شکل ابتدا مختصات بردار \overline{BC} را پیدا کنید.

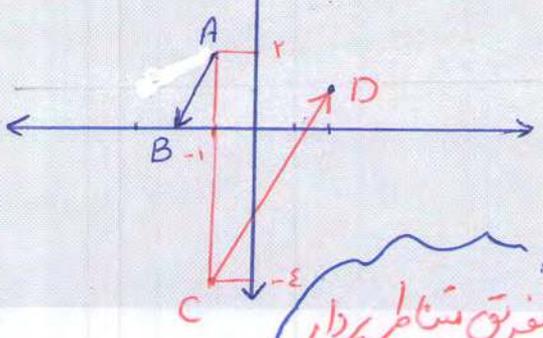
$\overline{BC} = C - B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\overline{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A + \overline{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

تفریق بردارها

۲- بردار خواسته را رسم کنید:



بردار $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ابتدا در $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بردار $\overline{CD} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ انتها در $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B = A + \overline{AB} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

تفریق متناظر بردار

$C = D - \overline{CD} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$